THE UNIVERSITY
OF ILLINOIS
LIBRARY

515
~~517~~
C126
v.7

MATHEMATICS

515
C126
v.7

Kaiserin-Auguste-Victoria-Gymnasium zu Plön.

25253
412
eee

Einführung in die Differentialrechnung

von

Professor C. Langhans.

Ostern 1914.

Plön.
O. Kavens Buchdruckerei (herm. Sönksen).
1914.

1914. Progr.-Nr. 404.

Bei der vorliegenden Arbeit, die für die Hand des Schülers bestimmt ist, handelt es sich um eine Beschreibung des im letzten Jahre angestellten Versuches, die Differentialrechnung in die Prima des Plöner Gymnasiums einzuführen.

Auf den vorhergehenden Klassenstufen werden die Schüler mit dem Funktionsbegriff vertraut gemacht und in der graphischen Darstellung der Funktionen soweit geübt, daß der Durchnahme der Differentialrechnung in der Prima keine Bedenken entgegenstehen können, wenn mit der Einführung des neuen Lehrstoffes eine Entlastung auf anderen Gebieten des mathematischen Wissens verknüpft wird. Dies kann in der Weise geschehen, daß man die Herleitung mancher Formeln und Beweise als Uebungen behandelt und auf eine Wiedergabe der Herleitung seitens der Schüler verzichtet.

Trotzdem erschwert der Umstand, daß Unter- und Oberprima zu Plön in einer Klasse vereinigt sind, die Einführung der Differentialrechnung. Dazu kommt, daß schon am Anfang des Jahres mit dieser neuen Rechnungsart begonnen werden muß, weil sich sonst keine sicheren Erfolge bis zur Reifeprüfung erzielen lassen. Für die Differentiationen steht also der binomische Lehrsatz noch nicht zur Verfügung; es ist vielmehr ein umständlicheres, aber auch anschaulicheres Verfahren einzuschlagen.

Der Versuch, die Differentialrechnung in die kombinierte Prima des Plöner Gymnasiums einzuführen, mußte also in vorsichtiger Weise angestellt werden. Daher ist von vornherein darauf verzichtet worden, die Differentialrechnung um ihrer selbst willen zu behandeln, sondern sie ist nur soweit betrieben worden, wie sie für die Lösung mehrerer Aufgabengruppen erforderlich ist. Diese bestehen in der Herleitung von Tangentengleichungen beliebiger Kurven und in der Bestimmung des größten und kleinsten Wertes der Funktionen und des wahren Wertes des vieldeutigen Symbols $\frac{0}{0}$; auch ist das Differenzieren zur Entwicklung des binomischen Lehrsatzes benutzt worden. Ferner sind aus

595521

Rücksicht auf die Gefahr, die Schüler zu belasten, keine transzendenten, sondern nur algebraische Funktionen verwandt worden. Aus demselben Grunde erschien es mir zweckmäßig, bei der Herleitung des Differentialquotienten keine besonderen Symbole für endliche Differenzen zu verwenden, sondern den Differentialen zunächst endliche Werte beizulegen.

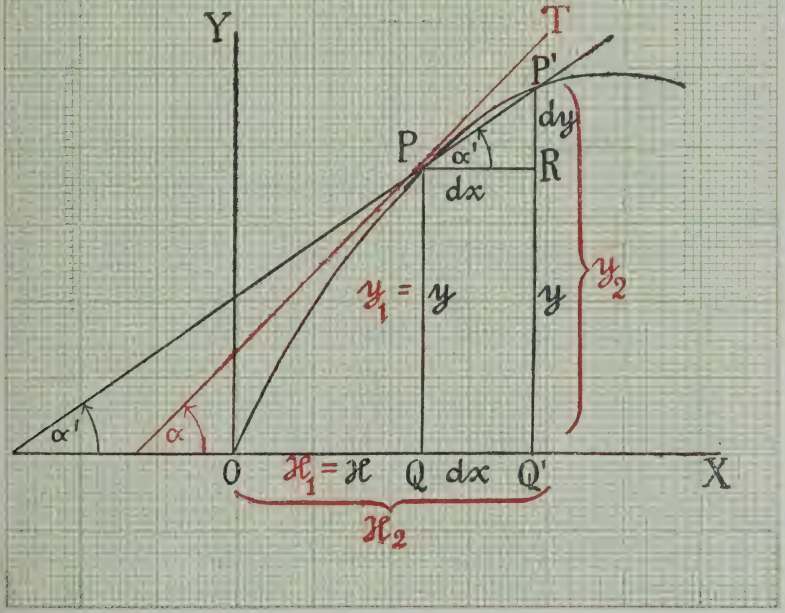
Differentialrechnung.

§ 1. Geometrische Bedeutung des Differentialquotienten.

1. Graphische Darstellung der Funktion

$$y = 2x - \frac{1}{5}x^2.$$

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	1,8	3,2	4,2	4,8	5	4,8



2. Bestimmung der Richtungskonstanten der durch zwei Kurvenpunkte gehenden Sekante.

a) In der Gleichung

$$y = 2x - \frac{1}{2}x^2$$

sind die Variablen x und y die Koordinaten jedes beliebigen Punktes der Kurve. Bezeichnet man nun die Koordinaten

des Punktes P zunächst mit x_1 und y_1,
„ „ P' „ „ x_2 und y_2,

so lauten die für P und P' geltenden Gleichungen:

$$y_1 = 2\,x_1 - \frac{1}{5}\,x_1^2$$

und

$$y_2 = 2\,x_2 - \frac{1}{5}\,x_2^2.$$

b) Der Einfachheit halber behält man für die Koordinaten des Punktes P die Zeichen x und y bei, so daß

$$x_1 = x \text{ und } y_1 = y$$

gesetzt wird und für den Punkt P die ursprüngliche Gleichung

$$y = 2\,x - \frac{1}{5}\,x^2$$

bestehen bleibt.

c) Die Koordinaten des Punktes P' drückt man aber mittels des Zuwachses aus, den die Koordinaten x und y des Punktes P erfahren.

Die Abszisse von P' ist nämlich $x_2 = x + Q\,Q'$,
„ Ordinate „ P' „ „ $y_2 = y + R\,P'$.
Den Zuwachs Q Q' bezeichnet man mit dx,
„ „ R P' „ „ „ dy.

Die Größen dx und dy sind nicht als Produkte, sondern als symbolische Zeichen wie log a und sin α anzusehen.

Da $dx = x_2 - x_1$ und $dy = y_2 - y_1$, also Differenzen zwischen den Koordinaten der Punkte P und P' sind, so heißen sie Differentiale. Und zwar heißt dx das Differential von x und dy das Differential von y.

Die Differentiale dx und dy sind, solange die Punkte P und P' einen endlichen Abstand voneinander haben, endliche Größen.

d) Bei Zugrundelegung der neuen Zeichen für die Koordinaten der Punkte P und P' ergeben sich für diese Punkte die in folgender Tabelle stehenden Gleichungen:

	Koordinaten:	Gleichungen:
jedes Punktes	x und y	$y = 2x - \frac{1}{5}x^2$
des Punktes P	x_1 und y_1 $x_1 = x$ $y_1 = y$	$y_1 = 2x_1 - \frac{1}{5}x_1^2$ $y = 2x - \frac{1}{5}x^2$
des Punktes P'	x_2 und y_2 $x_2 = x + dx$ $y_2 = y + dy$	$y_2 = 2x_2 - \frac{1}{5}x_2^2$ $y + dy = 2(x + dx) - \frac{1}{5}(x + dx)^2$

e) Hiernach findet man die für die Koordinaten der Punkte P und P' gültigen Gleichungen in der einfachsten Weise, indem man für den Punkt P die ursprüngliche Gleichung

$$y = 2x - \frac{1}{5}x^2$$

bestehen läßt und für den Punkt P' statt der laufenden Koordinaten x und y die besonders gekennzeichneten Koordinaten $x + dx$ und $y + dy$ einsetzt.

Diese Gleichungen lauten also:

$$\left.\begin{aligned} y &= 2x - \frac{1}{5}x^2 \\ y + dy &= 2(x + dx) - \frac{1}{5}(x + dx)^2 \\ &= 2(x + dx) - \frac{1}{5}[x^2 + 2x\,dx + (dx)^2] \\ &= 2x + 2dx - \frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{5}x\,dx - \frac{1}{5}(dx)^2 \end{aligned}\right\} -$$

$$dy = 2dx - \frac{2}{5}x\,dx - \frac{1}{5}(dx)^2$$

Dividiert man beide Seiten der Gleichung durch dx und beachtet, daß im rechtwinkligen Dreieck PRP'

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{dy}{dx}$$

ist, so erhält man:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{dy}{dx} = 2 - \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}dx.$$

3. Bestimmung der Richtungskonstanten der im Punkte P an die Kurve gelegten Tangente.

a) Rückt P' unaufhörlich nach P hin, so nehmen die Differentiale dx und dy beständig ab.

Dabei wird, wenn diese Differentiale unendlich klein und für die weitere Rechnung so gut wie Null geworden sind, die Richtungskonstante

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{dy}{dx}$$

die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen.

Ein solcher unbestimmter Ausdruck hat aber einen endlichen Wert, wie folgendes Beispiel zeigt:

Für $x = a$ wird der Bruch

$$\frac{a^2 - x^2}{a - x} = \frac{0}{0}$$

Aber

$$\frac{a^2 - x^2}{a - x} = \frac{(a + x)(a - x)}{a - x}$$

$$= a + x = 2a \text{ für } x = a.$$

Ebenso läßt sich für jeden Kurvenpunkt nachweisen, daß die Richtungskonstante einen endlichen Wert besitzt.

b) P sei ein bestimmter Punkt der Kurve, dessen Abszisse $x = 2{,}5$ ist.

Für diesen Punkt ist

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{5} dx.$$

Setzt man für dx kleiner und kleiner werdende Zahlen, die sich der Null nähern, so wächst die Richtungskonstante, aber nur bis zu einer bestimmten Grenze, wie folgende Tabelle zeigt:

dx	1	0,7	0,4	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{dy}{dx}$	0,80	0,86	0,92	0,98	0,998	0,9998	0,99998

Die Richtungskonstante bewegt sich also unaufhörlich auf die Grenze 1 zu, je näher P' an P und damit dx an Null heranrückt. Gleichzeitig geht die Sekante PP' mehr und mehr in die Tangente PT und der Sekantenwinkel α' in den Tangentenwinkel α über.

Für den Grenzfall, daß P' mit P zusammenfällt, ist die Umwandlung der Sekante in die Tangente vollendet und dx so unendlich klein geworden, daß die Richtungskonstante

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{5}\, dx$$

den Wert annimmt:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = 1.$$

c) P sei ein beliebiger Punkt der Kurve. Für diesen Fall gilt eine analoge Entwicklung, mit dem einzigen Unterschied, daß die Richtungskonstante sich nicht der Zahl 1, sondern einer anderen Grenze nähert, wenn die Abszisse des Punktes P von 2,5 verschieden ist. Dabei geht die für jeden Punkt geltende Richtungskonstante

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{dy}{dx} = 2 - \frac{2}{5}\, x - \frac{1}{5}\, dx$$

in die Gleichung über:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = 2 - \frac{2}{5}\, x.$$

Diese Größe wird auch mit y' bezeichnet und Differentialquotient oder Ableitung genannt.

Somit ergibt sich für den Differentialquotienten einer Funktion die geometrische

Erklärung: Unter dem Differentialquotienten oder der Ableitung einer Funktion versteht man die Richtungskonstante jeder Tangente der Kurve, durch welche die Funktion graphisch dargestellt wird.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = y'.$$

§ 2. Potenzen mit ganzen positiven Exponenten.

1. Potenzen ohne einen konstanten Faktor.

a)
$$\left.\begin{array}{r} y = x \\ y + dy = x + dx \end{array}\right\} -$$
$$dy = dx$$
$$y' = \frac{dy}{dx} = 1.$$

b)
$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 \\ y + dy &= (x + dx)^2 \\ &= x^2 + 2\,x\,dx + (dx)^2 \end{aligned}\right\} -$$
$$\begin{aligned} dy &= 2\,x\,dx + (dx)^2 \\ y' = \frac{dy}{dx} &= 2\,x + dx \\ &= 2\,x, \end{aligned}$$

weil dx im Verhältnis zu 2 x verschwindend klein ist.

c)
$$\left.\begin{aligned} y &= x^3 \\ y + dy &= (x + dx)^3 \\ &= x^3 + 3\,x^2\,dx + 3x\,(dx)^2 + (dx)^3 \end{aligned}\right\} -$$
$$\begin{aligned} dy &= 3\,x^2\,dx + 3\,x\,(dx)^2 + (dx)^3 \\ y' = \frac{dy}{dx} &= 3\,x^2 + 3\,x\,dx + (dx)^2 \\ &= 3\,x^2, \end{aligned}$$

weil die beiden letzten Glieder der rechten Seite im Verhältnis zum ersten verschwindend klein sind.

Zusammenstellung:

	Funktion	Differentialquotient
	$y = x$	$y' = 1$
	$y = x^2$	$y' = 2\,x$
	$y = x^3$	$y' = 3\,x^2$
	$y = x^4$	$y' = 4\,x^3$
	------	--------
allgemein:	$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$

d) Wenn die Variablen einer Funktion mit anderen Symbolen statt mit x oder y bezeichnet werden, so ergeben sich analoge Gleichungen.

z. B.:
$$\left.\begin{aligned} y &= u^2 \\ y + dy &= (u + du)^2 \\ &= u^2 + 2\,u\,du + (du)^2 \end{aligned}\right\} -$$
$$\begin{aligned} dy &= 2\,u\,du + (du)^2 \\ \frac{dy}{dx} &= 2\,u + du \\ &= 2\,u, \text{ wenn du unendlich klein wird.} \end{aligned}$$

Zusammenstellung:

Funktion	Differentialquotient
$y = u^n$	$\frac{dy}{du} = nu^{n-1}$
$y = v^n$	$\frac{dy}{dv} = nv^{n-1}$
$u = x^n$	$\frac{du}{dx} = nx^{n-1}$
$v = x^n$	$\frac{dv}{dx} = nx^{n-1}$
$F = a^2$	$\frac{dF}{da} = 2a$
$V = a^3$	$\frac{dV}{da} = 3a^2$

2. Potenzen mit einem konstanten Faktor.

a) Ist y eine Funktion von u und u eine Funktion von x, so gilt die identische Gleichung:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

b)

$$\left.\begin{aligned} y &= ax^n \\ &= au \\ y + dy &= a(u + du) \\ &= au + adu \end{aligned}\right\} -$$

$$u = x^n$$
$$\frac{du}{dx} = nx^{n-1}$$

$$dy = a\,du$$
$$\frac{dy}{du} = a$$
$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= anx^{n-1}$$

Regel: Ein Produkt, das einen konstanten Faktor enthält, wird differenziert, indem man den variablen Faktor differenziert und den erhaltenen Differentialquotienten mit dem konstanten Faktor multipliziert.

Zusammenstellung:

Funktion	Differentialquotient
$p = 2\,r\,\pi$	$\frac{dp}{dr} = 2\,\pi \cdot 1 = 2\,\pi$
$F = r^2\,\pi$	$\frac{dF}{dr} = \pi \cdot 2\,r = 2\,r\,\pi$
$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$	$\frac{dh}{da} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
$F = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$	$\frac{dF}{da} = \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot 2\,a = \frac{a}{2}\sqrt{3}$
$O = 6\,a^2$	$\frac{dO}{da} = 6 \cdot 2\,a = 12\,a$
$O = 4\,r^2\,\pi$	$\frac{dO}{dr} = 4\,\pi \cdot 2\,r = 8\,r\,\pi$
$V = \frac{4}{3}\,r^3\,\pi$	$\frac{dV}{dr} = \frac{4}{3}\,\pi \cdot 3\,r^2 = 4r^2\,\pi$

§ 3. Potenzen, deren Exponent Null ist.

$$\left.\begin{aligned} y &= ax^0 \\ &= a \\ y + dy &= a\,(x + dx)^0 \\ &= a \end{aligned}\right\} -$$

$$dy = 0$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 0$$

Regel: Der Differentialquotient einer konstanten Größe ist gleich Null.

§ 4. Potenzen mit ganzen negativen Exponenten.

1.

$$\left.\begin{aligned} y &= x^{-1} \\ &= \frac{1}{x} \\ y + dy &= \frac{1}{x + dx} \end{aligned}\right\} -$$

$$dy = \frac{1}{x + dx} - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{x}{x^2 + xdx} - \frac{x + dx}{x^2 + xdx}$$

$$= \frac{x - (x + dx)}{x^2 + xdx}$$

$$= \frac{x - x - dx}{x^2 + xdx}$$

$$= \frac{-dx}{x^2 + xdx}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x^2 + xdx}$$

$$= -\frac{1}{x^2},$$

wenn dx unendlich klein wird.

2) $y = ax^{-1}$

$$= a \cdot \frac{1}{x} \qquad u = \frac{1}{x}$$

$$= au; \qquad \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{dy}{du} = a$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= -\frac{a}{x^2}$$

3) $y = ax^{-n}$

$$= \frac{a}{x^n}$$

$$= \frac{a}{u} \qquad u = x^n$$

$$\frac{dy}{du} = -\frac{a}{u^2} \qquad \frac{du}{dx} = nx^{n-1}$$

$$= -\frac{a}{x^{2n}}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= -\frac{a}{x^{2n}} \cdot nx^{n-1}$$

$$= -anx^{-n-1}$$

oder $= -\frac{an}{x^{n+1}}$

§ 5. Wurzeln (Bruchpotenzen).

1.
$$y = \sqrt{x},$$
$$\text{also } y^2 = x$$
$$\text{oder } x = y^2$$
$$\frac{dx}{dy} = 2y$$
$$= 2\sqrt{x}$$
$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2.
$$y = \sqrt{x^3}$$
$$= (\sqrt{x})^3$$
$$= u^3 \qquad u = \sqrt{x}$$
$$\frac{dy}{du} = 3u^2 \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$= 3x$$
$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= \frac{3x}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{3x\sqrt{x}}{2x}$$
$$= \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

3.
$$y = \sqrt[3]{x},$$
$$\text{also } y^3 = x$$
$$\text{oder } x = y^3$$
$$\frac{dx}{dy} = 3y^2$$
$$= 3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2$$
$$= 3\sqrt[3]{x^2}$$
$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

4.

$$y = \sqrt[3]{x^2}$$

$$= \sqrt[3]{u} \qquad u = x^2$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}} \qquad \frac{du}{dx} = 2x$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$$

$$= \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{2x}{3x\sqrt[3]{x}}$$

$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Zusammenstellung:

Exponent	Funktion	Differentialquotient
n	$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
4	$y = x^4$	$y' = 4x^3$
3	$y = x^3$	$y' = 3x^2$
2	$y = x^2$	$y' = 2x^1 = 2x$
$1\frac{1}{2}$	$y = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$	$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$
1	$y = x^1 = x$	$y' = 1 \cdot x^0 = 1$
$\frac{2}{3}$	$y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$	$y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$
$\frac{1}{2}$	$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{3}$	$y = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$	$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
0	$y = x^0 = 1$	$y' = 0 \cdot x^{-1} = 0$

Exponent	Funktion	Differentialquotient
n	$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
-1	$y = x^{-1} = \frac{1}{x}$	$y' = -1 \cdot x^{-2} = -1 \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x_2}$
-2	$y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$	$y' = -2x^{-3} = -2 \cdot \frac{1}{x^3} = -\frac{2}{x^3}$
-3	$y = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$	$y' = -3x^{-4} = -3 \cdot \frac{1}{x^4} = -\frac{3}{x^4}$
-4	$y = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$	$y' = -4x^{-5} = -4 \cdot \frac{1}{x^5} = -\frac{4}{x^5}$

Aus dieser Zusammenstellung ersieht man, daß alle Potenzen nach demselben Verfahren differenziert werden.

Regel: Eine Potenz, deren Exponent eine beliebige ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl ist, wird differenziert, indem man

a) ihre Basis mit dem um 1 verkleinerten Exponenten potenziert und

b) ihren Exponenten mit der erhaltenen Potenz multipliziert.

§ 6. Summe und Differenz von Funktionen. (Mehrgliedrige Größen).

$$\left.\begin{aligned} y &= ax - bx^2 + cx^3 \\ &= u - v + w \\ y + dy &= u + du - (v + dv) \\ &\quad + w + dw \\ &= u + du - v - dv \\ &\quad + w + dw \end{aligned}\right\} -$$

$$u = ax;\ \frac{du}{dx} = a$$

$$v = bx^2;\ \frac{dv}{dx} = 2bx$$

$$w = cx^3;\ \frac{dw}{dx} = 3cx^2$$

$$dy = du - dv + dw$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx}$$

$$= a - 2bx + 3cx^2$$

Regel: Eine mehrgliedrige Größe wird differenziert, indem man jedes Glied differenziert und die erhaltenen Differentialquotienten addiert bezw. subtrahiert.

Ist also $y = u - v + w$, wo u, v und w Funktionen von x sind, so ist:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx}$$

§ 7. Produkt zweier Funktionen.

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2\sqrt{x} \\ &= u \cdot v \\ y + dy &= (u + du)(v + dv) \\ &= uv + udv + vdu \\ &\quad + dudv \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} u &= x^2;\ \frac{du}{dx} = 2x \\ v &= \sqrt{x};\ \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$dy = udv + vdu + dudv$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + du\frac{dv}{dx}$$

$$\text{oder} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + \frac{du}{dx}dv$$

In beiden vorhergehenden Gleichungen ist das letzte Glied im Verhältnis zu den andern Gliedern der rechten Seite verschwindend klein, da der Differentialquotient dieses Gliedes noch mit dem unendlich kleinen Differential du bezw. dv multipliziert wird. Demnach ergibt sich:

$$\begin{aligned} y' = \frac{dy}{dx} &= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \\ &= \frac{x^2}{2\sqrt{x}} + 2x\sqrt{x} \\ &= \frac{x^2\sqrt{x}}{2x} + 2x\sqrt{x} \\ &= \tfrac{1}{2}x\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} \\ &= 2\tfrac{1}{2}x\sqrt{x} \end{aligned}$$

Das gewählte Beispiel läßt sich folgendermaßen kürzer behandeln:

$$\begin{aligned} y &= x^2\sqrt{x} \\ &= \sqrt{x^4} \cdot \sqrt{x} \\ &= \sqrt{x^5} \\ &= x^{\frac{5}{2}} \\ y' = \frac{dy}{dx} &= \tfrac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} \\ &= \tfrac{5}{2}\sqrt{x^3} \\ &= \tfrac{5}{2}x\sqrt{x} \end{aligned}$$

Regel: Ein aus zwei Faktoren bestehendes Produkt wird differenziert, indem man jeden Faktor mit dem Differentialquotienten des andern Faktors multipliziert und die erhaltenen Produkte zueinander addiert.

Ist $y = u \cdot v$, wo u und v Funktionen von x sind, so ist

$$y' = \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

§ 8. Quotient zweier Funktionen.

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{x}}$$

$$\left.\begin{aligned} &= \frac{u}{v} \\ y + dy &= \frac{u + du}{v + dv} \end{aligned}\right\} - \qquad \begin{aligned} u &= x^2;\ \frac{du}{dx} = 2x \\ v &= \sqrt{x};\ \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$dy = \frac{u + du}{v + dv} - \frac{u}{v}$$

$$= \frac{v\,(u + du)}{v^2 + vdv} - \frac{u\,(v + dv)}{v^2 + vdv}$$

$$= \frac{v\,(u + du) - u\,(v + dv)}{v^2 + vdv}$$

$$= \frac{uv + vdu - uv - udv}{v^2 + vdv}$$

$$= \frac{vdu - udv}{v^2 + vdv}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2 + vdv},$$

$$= \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}, \text{ wenn dv unendlich klein wird,}$$

$$= \frac{2\,x\,\sqrt{x} - \frac{x^2}{2\sqrt{x}}}{x} \quad \text{(mit } 2\sqrt{x} \text{ den Doppelbruch erweitern!)}$$

$$= \frac{4\,x^2 - x^2}{2\,x\,\sqrt{x}}$$

$$= \frac{3\,x^2}{2\,x\,\sqrt{x}}$$

$$= \frac{3\,x}{2\,\sqrt{x}}$$

$$= \frac{3\,x\,\sqrt{x}}{2\,x}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

Das gewählte Beispiel läßt sich folgendermaßen kürzer behandeln:

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^4}}{\sqrt{x}}$$

$$= \sqrt{x^3}$$

$$= x^{\frac{3}{2}}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\,x^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

Regel: Ein Bruch wird differenziert, indem man den Nenner mit dem Differentialquotienten des Zählers und den Zähler mit dem Differetialquotienten des Nenners multipliziert, die erhaltenen Produkte voneinander subtrahiert und diese Differenz durch das Quadrat des Nenners dividiert.

Ist $y = \frac{u}{v}$, wo u und v Funktionen von x sind, so ist:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{v\,\frac{du}{dx} - u\,\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

§ 9. Gleichungen von Tangenten beliebiger Kurven.

Aufgabe: In einem Punkte, dessen Ordinate gleich 1,5 ist, soll an die Kurve

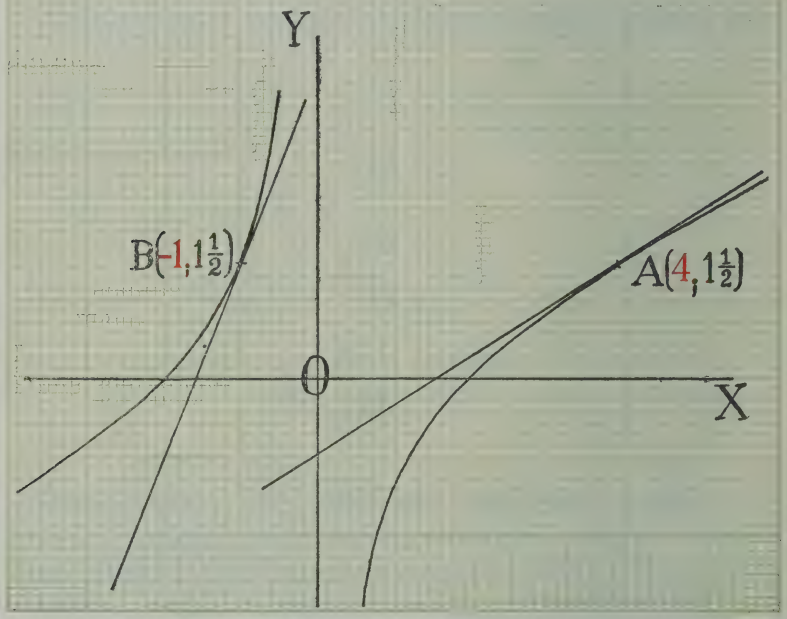
$$y = \frac{x^2 - 4}{2x}$$

eine Tangente gelegt werden. Wie lautet ihre Gleichung?

Lösung:

1. Konstruktion der Kurve.

x	−4	−3	−2	−1	−0,5	0	0,5	1	2	3	4	5
y	−1,5	−0,8	0	1,5	3,8	$\pm\infty$	−3,8	−1,5	0	0,8	1,5	2,1



2. Gleichung der Tangente im Berührungspunkt $(x_1; y_1)$:

$$y - y_1 = (x - x_1) \operatorname{tg} \alpha.$$

Bekannt: $y_1 = 1\frac{1}{2}$

Unbekannte: x_1 und $\operatorname{tg} \alpha$.

3. Berechnung der Abszisse des Berührungspunktes.

Setzt man $y = 1{,}5$ in die gegebene Kurvengleichung ein, so erhält man:

$$\frac{x^2 - 4}{2x} = \frac{3}{2}$$

$$x^2 - 4 = 3x$$

$$\left.\begin{aligned} x^2 - 3x &= 4 = \frac{16}{4} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{9}{4} \end{aligned}\right\} +$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

$$x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$x = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$$

Punkt A: $x_1 = 4; \quad y_1 = 1\frac{1}{2}$

„ B: $x_2 = -1; \quad y_2 = 1\frac{1}{2}$

4. Richtungskonstante der Tangente.

a) für jeden beliebigen Punkt der Kurve.

Die gegebene Funktionsgleichung lautet:

$$y = \frac{x^2 - 4}{2x}$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{2}{x}$$

$$= \frac{1}{2}x - 2x^{-1}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} - 2 \cdot (-1)\, x^{-2}$$

$$= \frac{1}{2} + 2x^{-2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{x^2}$$

oder umständlicher:

$$y = \frac{x^2 - 4}{2x}$$

$$= \frac{u}{v} \qquad u = x^2 - 4; \quad \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2} \qquad v = 2x; \quad \frac{dv}{dx} = 2$$

$$= \frac{4x^2 - (x^2 - 4)\cdot 2}{4x^2}$$

$$= \frac{4x^2 - 2x^2 + 8}{4x^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 8}{4x^2}$$

$$= \frac{x^2 + 4}{2x^2}$$

b) für den Punkt A:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x^2 + 4}{2x^2} = \frac{5}{8} \text{ für } x = 4$$

c) für den Punkt B:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x^2 + 4}{2x^2} = \frac{5}{2} \text{ für } x = -1$$

5. Gleichung der Tangente in A:

$$y - \frac{3}{2} = (x - 4)\cdot\frac{5}{8}$$

$$8y - 12 = 5x - 20$$

$$5x - 8y - 8 = 0$$

6. Gleichung der Tangente in B:

$$y - \frac{3}{2} = (x + 1)\cdot\frac{5}{2}$$

$$2y - 3 = 5x + 5$$

$$5x - 2y + 8 = 0$$

§ 10. Wahrer Wert des Bruches $\frac{0}{0}$.

1. Die Funktion

$$y = \frac{6\frac{2}{5} - \frac{1}{10}(x-9)^2}{1\frac{3}{5} - \frac{1}{10}(x-5)^2}$$

nimmt für $x = 1$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an.

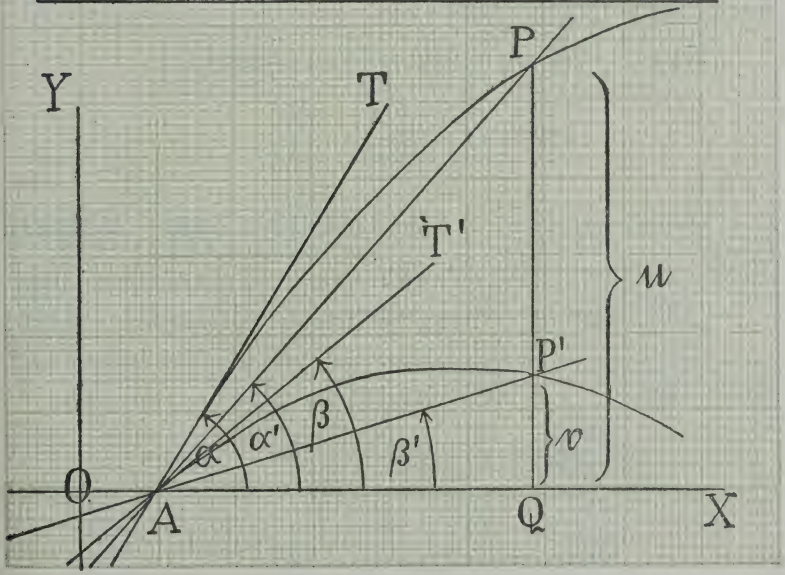
Bezeichnet man den Zähler mit u und den Nenner mit v, so kann man in den Funktionsgleichungen

$$u = 6\tfrac{2}{5} - \tfrac{1}{10}(x - 9)^2$$

$$\text{und } v = 1\tfrac{3}{5} - \tfrac{1}{10}(x - 5)^2$$

sowohl die Variablen x und u als auch die Variablen x und v als Koordinaten von Punkten ansehen und so Kurven finden, die das geometrische Bild beider Gleichungen sind. Da ferner die Ordinaten u und v für denselben Wert der Abszisse $x = 1$ gleichzeitig gleich Null werden, so schneiden sich beide Kurven in einem Punkte A, dessen Abszisse gleich 1 und Ordinate gleich Null ist.

$\mathcal{X}$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathcal{U}$	0	1,5	2,8	3,9	4,8	5,5	6	6,3
$\mathcal{V}$	0	0,7	1,2	1,5	1,6	1,5	1,2	0,7



2. Im Punkte A legt man an beide Kurven die Tangenten AT und AT' und zieht von ihm aus nach zwei Kurvenpunkten P und P', die dieselbe Abszisse OQ haben, die Sekanten AP und AP'. Aus der Figur ergibt sich:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{u}{AQ}, \text{ also } u = AQ \cdot \operatorname{tg} \alpha'$$

$$\operatorname{tg} \beta' = \frac{v}{AQ}, \quad \text{„} \quad v = AQ \cdot \operatorname{tg} \beta'$$

$$y = \frac{u}{v} = \frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \beta'}$$

3. Rückt nun P und somit auch P' unaufhörlich nach A hin, so gehen schließlich die Sekanten AP und AP' in die Tangenten AT und AT' und die Sekantenwinkel α' und β' in die Tangentenwinkel α und β über.

Für diesen Grenzfall ist daher

$$y = \frac{u}{v} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}$$

Nun sind die Richtungskostanten der Tangenten die Differentialquotienten der Funktionen u und v. Zur Ermittelung des gesuchten Wertes ergibt sich also folgende

Regel: Um den wahren Wert des Bruches

$$y = \frac{6\frac{2}{5} - \frac{1}{10}(x - 9)^2}{1\frac{3}{5} - \frac{1}{10}(x - 5)^2}$$

zu bestimmen, der für $x = 1$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annimmt, differenziere man Zähler und Nenner einzeln nach x und setze in den Quotienten der beiden Differentialquotienten $x = 1$ ein.

Nach dieser Regel erhält man für das gewählte Beispiel den wahren Wert

$$y = \frac{-\frac{1}{5}(x - 9)}{-\frac{1}{5}(x - 5)} = \frac{x - 9}{x - 5} = 2 \text{ für } x = 1.$$

4. Aufgabe: Für welchen Wert von x nimmt der Bruch

$$y = \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 4} - 6}{8 - \sqrt{3x^2 + 2x - 1}}$$

die Form $\frac{0}{0}$ an, wenn beide Quadratwurzeln als positive Größen angesehen werden? Und welches ist der wahre Wert dieses unbestimmten Ausdrucks?

Lösung:

a) Man setze Zähler und Nenner einzeln gleich Null und bestimme die gemeinschaftliche Wurzel der beiden so gebildeten Gleichungen.

$$\alpha)\quad \sqrt{x^2 - 3x - 4} - 6 = 0$$
$$\sqrt{x^2 - 3x - 4} = 6$$
$$x^2 - 3x - 4 = 36$$
$$x^2 - 3x = 40 = \frac{160}{4}$$
$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \quad \Big\}+$$
$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{169}{4}$$
$$x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{169}{4}}$$
$$x = \frac{3}{2} \pm \frac{13}{2}$$
$$x_1 = 8$$
$$x_2 = -5$$

$$\beta)\quad 8 - \sqrt{3x^2 + 2x - 1} = 0$$
$$-\sqrt{3x^2 + 2x - 1} = -8$$
$$\sqrt{3x^2 + 2x - 1} = 8$$
$$3x^2 + 2x - 1 = 64$$
$$3x^2 + 2x = 65$$
$$x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{65}{3} = \frac{195}{9}$$
$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \quad \Big\}+$$

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{196}{9}$$

$$x + \frac{1}{3} = \pm\sqrt{\frac{196}{9}}$$

$$x = -\frac{1}{3} \pm \frac{14}{3}$$

$$x_1 = 4\frac{1}{3}$$

$$x_2 = -5$$

Demnach ist $x = -5$ die gemeinschaftliche Wurzel der beiden aufgelösten Gleichungen. Für diesen Wert nimmt der gegebene Bruch tatsächlich die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an.

b) Man setze den Zähler des gegebenen Bruches gleich u und den Nenner gleich v und differenziere beide Größen nach x.

α) $u = \sqrt{x^2 - 3x - 4} - 6$

$= \sqrt{z} - 6 \qquad z = x^2 - 3x - 4$

$\frac{du}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{z}} \qquad \frac{dz}{dx} = 2x - 3$

$= \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 3x - 4}}$

$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$

$= \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x - 4}}$

β) $v = 8 - \sqrt{3x^2 + 2x - 1}$

$= 8 - \sqrt{z} \qquad z = 3x^2 + 2x - 1$

$\frac{dv}{dz} = -\frac{1}{2\sqrt{z}} \qquad \frac{dz}{dx} = 6x + 2$

$= -\frac{1}{2\sqrt{3x^2 + 2x - 1}}$

$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$

$= -\frac{6x + 2}{2\sqrt{3x^2 + 2x - 1}}$

$= -\frac{3x + 1}{\sqrt{3x^2 + 2x - 1}}$

c) Dividiert man nun beide Differentialquotienten durcheinander und setzt $x = -5$ in den Quotienten ein, so erhält man als wahren Wert des gegebenen Bruches

$$y = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x-4}} : -\frac{3x+1}{\sqrt{3x^2+2x-1}}$$
$$= \frac{-13}{2\cdot 6} : -\frac{-14}{8}$$
$$= -\frac{13}{12} : \frac{7}{4}$$
$$= -\frac{13\cdot 4}{12\cdot 7}$$
$$= -\frac{13}{21}.$$

§ 11. Differentialquotienten höherer Ordnung und binomischer Lehrsatz.

1. Graphische Darstellung der höheren Differentialquotienten.

a) Wenn der Differentialquotient einer Funktion wieder eine Funktion von x ist, kann man die neue Funktionsgleichung nochmals differenzieren und solange mit dem Differenzieren fortfahren, bis ein Differentialquotient gleich Null geworden ist.

Es sei gegeben die

Funktion $$y = \frac{1}{10}(x+2)(x-2)(x-6)$$
$$= \frac{1}{10}x^3 - \frac{3}{5}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{12}{5}$$

I. Differentialquotient: $$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{3}{10}x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{2}{5}$$

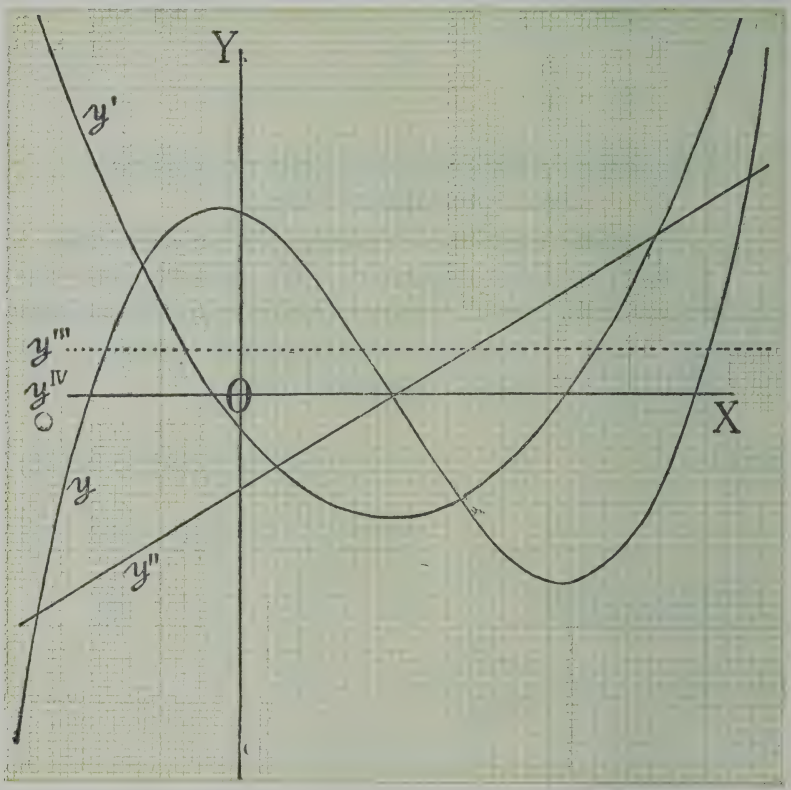
II. „ $$\frac{dy'}{dx} = y'' = \frac{3}{5}x - \frac{6}{5}$$

III. „ $$\frac{dy''}{dx} = y''' = \frac{3}{5}$$

IV. „ $$\frac{dy'''}{dx} = y^{IV} = 0$$

b) Da die Variablen x und y, y', y''... als Koordinaten von Punkten angesehen werden können, so findet man folgendes geometrisches Bild der ursprünglichen und der abgeleiteten Funktionen, auf dem die den einzelnen Funktionen entsprechenden Kurven mit dem Funktionszeichen kenntlich gemacht sind:

x	— 3	— 2	— 1	0	1	2	3	4	5	6	7
y	— 4,5	0	2,1	2,4	1,5	0	— 1,5	— 2,4	— 2,1	0	4,5
y'	5,9	3,2	1,1	— 0,4	— 1,3	— 1,6	— 1,3	— 0,4	1,1	3,2	5,9
y''	— 3	— 2,4	— 1,8	— 1,2	— 0,6	0	0,6	1,2	1,8	2,4	3
y'''	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
y^{IV}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0



2. Herleitung des binomischen Lehrsatzes.

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \ldots$$

$$(a-b)^n = a^n - \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \ldots$$

a) In den identischen Gleichungen

$$(1+x)^1 = 1 + x$$
$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$$
$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$
$$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$$

ist jede Potenz von $(1 + x)$ in eine Reihe entwickelt, die nach Potenzen von x fortschreitet. Es ist ohne weiteres klar, daß auch jede folgende Potenz von $(1 + x)$ als eine derartige Reihe dargestellt werden kann.

Demnach darf man

$$(1+x)^n = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots$$

setzen und diese Gleichung als eine identische ansehen, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet und a, b, c... noch unbekannte Koeffizienten sind.

b) Jede Seite der letzten Gleichung bezeichne man nun mit y und differenziere beide identischen Funktionen y nach x.

$$y = (1+x)^n \qquad y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots$$
$$\frac{dy}{dx} = n(1+x)^{n-1} \qquad \frac{dy}{dx} = 1b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 + \ldots$$

Da identische Funktionen durch dieselbe Kurve graphisch dargestellt werden und somit auch denselben Differentialquotienten haben, ergibt sich nach Gleichsetzung der letzten beiden Differentialquotienten die erste Ableitung der ursprünglichen Gleichung:

$$n(1+x)^{n-1} = 1b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 + \ldots$$

In analoger Weise findet man die folgenden Ableitungen:

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = 1\cdot 2c + 2\cdot 3dx + 3\cdot 4ex^2 + \ldots$$
$$n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3} = 1\cdot 2\cdot 3\,d + 2\cdot 3\cdot 4\,ex + \ldots$$

---

c) Setzt man in der ursprünglichen Gleichung und in ihren Ableitungen $x = 0$, so erhält man zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten die Gleichungen:

$$1 = a, \qquad \text{also } a = 1$$

$$n = 1\,b, \qquad \text{„ } b = \frac{n}{1}$$

$$n(n-1) = 1 \cdot 2\,c, \qquad \text{„ } c = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$$

$$n(n-1)(n-2) = 1 \cdot 2 \cdot 3\,d, \qquad \text{„ } d = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

---

d) Nach Einsetzung der für die Koeffizienten gefundenen Werte lautet die ursprüngliche Gleichung

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \ldots$$

Für $x = \frac{b}{a}$ nimmt diese Gleichung die Form an

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{b}{a} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{b^2}{a^2} + \frac{n(n-1)n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{b^3}{a^3} + \ldots$$

Nach Multiplikation mit a^n ergibt sich

$$a^n \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = \left[a\left(1 + \frac{b}{a}\right)\right]^n =$$

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 1}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{n-3}b^3 + \ldots$$

und, wenn $-b$ statt $+b$ gesetzt wird,

$$(a-b)^n = a^n - \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{n-3}b^3 + \ldots$$

§ 12. Maximum und Minimum der Funktionen.

1. Die Entscheidung der Frage, ob bei einer Funktion extreme Werte vorkommen und ob sie Maxima oder Minima d. h. größer oder kleiner als die Nachbarwerte sind, hängt von dem ersten und zweiten Differentialquotienten der Funktion ab.

Es sei die Funktion

$$y = \frac{1}{10}(x^3 - 12x + 44)$$

gegeben. Ihre Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung lauten:

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{1}{10}(3x^2 - 12)$$

$$= \frac{3}{10}(x^2 - 4)$$

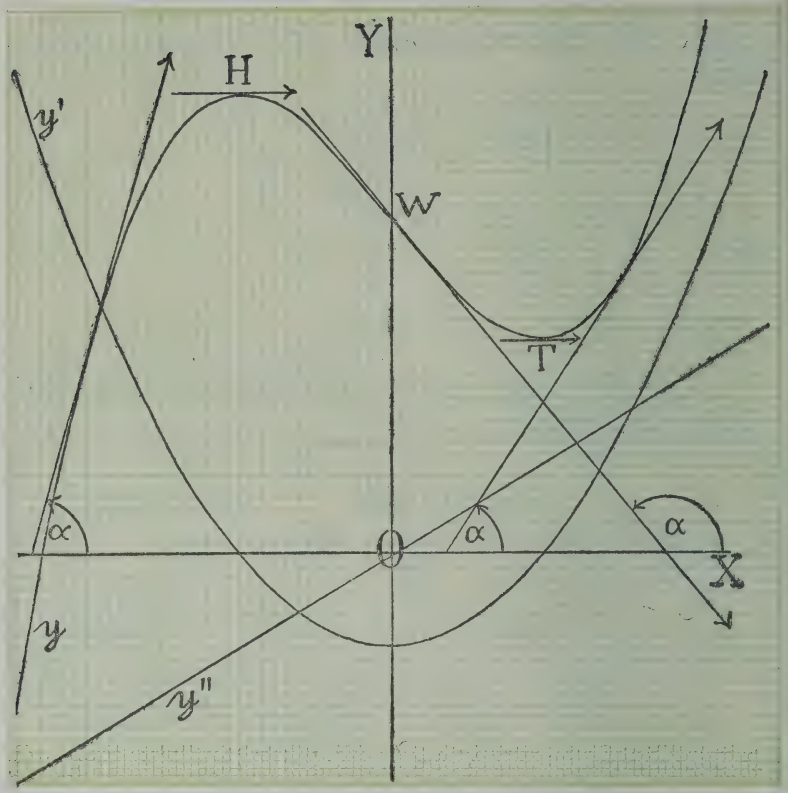
und

$$\frac{dy'}{dx} = y'' = \frac{3}{10} \cdot 2x$$

$$= \frac{3}{5}x.$$

2. Graphische Darstellung der Funktion y und ihrer Differentialquotienten y' und y''.

Kurve	→ W → nach unten offen — nach oben offen Höhepunkt H — Wendepunkt — Tiefpunkt T → steigend — fallend → — steigend →
x	−5 | −4 | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 → zunehmend →
y	−2,1 | 2,8 | 5,3 | 6 | 5,5 | 4,4 | 3,3 | 2,8 | 3,5 | 6 | 10,9 Maximum — Minimum → zunehmend — → abnehmend — → zunehmend
α	→ spitz — 0° — → stumpf — 180° — → spitz → abnehmend — → zunehmend → — →
$\operatorname{tg}\alpha = y'$	6,3 | 3,6 | 1,5 | 0 | −0,9 | −1,2 | −0,9 | 0 | 1,5 | 3,6 | 6,3 → positiv — → negativ — → positiv
y''	−3 | −2,4 | −1,8 | −1,2 | −0,6 | 0 | 0,6 | 1,2 | 1,8 | 2,4 | 3 → negativ — → positiv



3. An dem Verlauf der Funktion y und ihres Differentialquotienten y' ersieht man, daß der Differentialquotient einer Funktion

a) im Höhe- und Tiefpunkt gleich Null ist,

b) während ihres Abnehmens negativ, während ihres Zunehmens positiv ist.

Nun ist y' bis zum Wendepunkt eine abnehmende, von da an eine zunehmende Größe.

Folglich ist der Differentialquotient von y' d. h. der zweite Differentialquotient von y bis zum Wendepunkt und somit auch im Höhepunkt negativ, von da an und somit auch im Tiefpunkt positiv.

Da also y'' bis zum Wendepunkt negativ, von da an aber positiv ist, muß y'' im Wendepunkt selber gleich Null sein.

4. Hieraus ergibt sich für die Bestimmung der extremen Werte einer Funktion folgende

Regel:

a) Man setze den ersten Differentialquotienten der Funktion gleich Null und berechne aus der so gebildeten Gleichung den Wert von x.

Wenn für diesen Wert der zweite Differentialquotient
negativ wird, so liegt ein Maximum vor,
positiv „ „ „ „ Minimum „ .

b) Man setze den zweiten Differentialquotienten der Funktion gleich Null und berechne aus der so gebildeten Gleichung den Wert von x.

Ist ein solcher vorhanden, so gehört zu ihm ein Wendepunkt.

5. Nach dieser Regel ist das der obigen Entwicklung zu Grunde gelegte Beispiel zu behandeln.

Aufgabe: Für welchen Wert von x wird die Funktion

$$y = \frac{1}{10}(x^3 - 12x + 30)$$

ein Maximum oder ein Minimum?

Lösung:

a) Die beiden ersten Differentialquotienten der Funktion lauten:

$$y' = \frac{1}{10}(3x^2 - 12)$$

$$= \frac{3}{10}(x^2 - 4)$$

$$y'' = \frac{3}{10} \cdot 2x$$

$$= \frac{3}{5}x$$

b) Setzt man

$$y' = \frac{3}{10}(x^2 - 4) = 0,$$

so erhält man $x^2 = 4$,

also $x = \pm 2$.

Für $x = 2$ wird $y'' = \frac{3}{5}x = \frac{6}{5}$, also positiv.

„ $x = -2$ „ $y'' = \frac{3}{5}x = -\frac{6}{5}$, „ negativ.

Demnach besitzt die gegebene Funktion für $x = 2$ ein Minimum, für $x = -2$ ein Maximum.

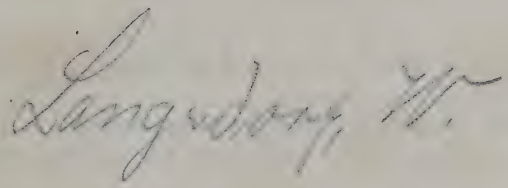
c) Setzt man

$$y'' = \frac{3}{5}\, x = 0,$$

so erhält man $x = 0$.

Für diesen Wert wird die gegebene Funktion $y = 3$.

Die ihr entsprechende Kurve besitzt also im Punkte $(0; 3)$ einen Wendepunkt.



XXI.

Ueber die Permutationszahlen (Faktoriellen mit der Differenz Eins) und ihre Anwendung auf's Differentiiren und Integriren.

Von

Herrn Dr. *Wilhelm Langsdorf*

zu Worms.

---

1) Allgemeiner Begriff des Differentiirens.

Der ζte Differentialquotient einer beliebigen Funktion wird repräsentirt durch eine Kurve, deren Gleichung ist:

$$y=\frac{\partial^{\zeta} f(x)}{\partial x^{\zeta}}.$$

Diese Kurve hat ihre Schnittpunkte mit der x-Axe da, wo die dem $(\zeta-1)$ten Differentialquotienten entsprechende Kurve

$$y=\frac{\partial^{\zeta-1} f(x)}{\partial x^{\zeta-1}}$$

ihre Maxima oder Minima besitzt. Ganz dieselbe Beziehung findet zwischen je zwei beliebigen successiven Differentialquotienten-Kurven Statt.

Gewöhnlich versteht man unter dem Grad ζ des Differentialquotienten $\frac{\partial^{\zeta} f(x)}{\partial x^{\zeta}}$ nur eine positive ganze Zahl. Fasst man aber

den Begriff desselben allgemeiner auf, so ergiebt sich sofort die Berechtigung folgender Bezeichnungen:

$$\frac{\partial^{-1} f(x)}{\partial x^{-1}} = \int f(x)\partial x,$$

$$\frac{\partial^{-2} f(x)}{\partial x^{-2}} = \int(\int f(x)\partial x)\partial x, \text{ u. w s.}$$

so dass man also das ζte Integral als das $-\zeta$te Differential betrachtet.

Der Uebergang vom ζten zum $(\zeta+1)$ten und $(\zeta-1)$ten Differentialquotienten geschieht nicht plötzlich, sondern stetig durch die Vermittlung von Funktionen, welche als gebrochene Differentialquotienten darzustellen sind. Diese können nun ebenfalls positiv oder negativ sein. Im letzteren Falle haben wir es mit einer Funktion zu thun, die das Mittelglied zwischen zwei auf einander folgenden ganzen Integralen bildet.

Dadurch dass man in $y=\frac{\partial^{\zeta} f(x)}{\partial x^{\zeta}}$ ζ ganz allgemein reell, positiv oder negativ, ganz oder gebrochen annimmt, ist man in Stand gesetzt, Diffentiiren und Integriren unter demselben Gesichtspunkt aufzufassen, so dass man in den nach diesem Princip aufgestellten Differentialformeln blos $\zeta=-1$ zu setzen braucht, um das Integral der betreffenden Funktion zu erhalten.

Da die Potenz x^m für alle anderen Funktionen den Ausgangspunkt bildet, sonach auch alle Funktionen sich beliebig differentiiren lassen, wenn man das allgemeine, z. B. ζte, Differential von x^m kennt, so wollen wir dieses zuerst bestimmen.

Der ζte Differentialquotient von x^m:

$$\frac{\partial^{\zeta}(x^m)}{\partial x^{\zeta}} = m.m-1.....m-\zeta+1.x^{m-\zeta} \qquad (I)$$

besteht ausser der Potenz $x^{m-\zeta}$, welche für jeden beliebige reellen Werth von ζ zulässig ist, noch aus dem Produkt:

$$m.m-1....m-\zeta+1,$$

welches die Anzahl der Permutationen von m Elementen zu je ζ ausdrückt, und das wir daher mit $(mP\zeta)$ (m Grössen permutirt zu je ζ) bezeichnen wollen.

Ist ζ positiv ganz, so ist das Produkt $(mP\zeta)$ gegeben, nicht aber, wenn ζ beliebig positiv oder negativ ist, d. h. das Produkt

$$m.m-1.....m-\zeta+1$$

st ein specieller Fall einer Funktion, welche für $\zeta=1, 2, 3....$ lie respektiven Werthe:

$$m,\ m.m-1,\ m.m-1.m-2,\ \text{u. s. w.}$$

annimmt.

Die Haupteigenschaften dieser Funktion lassen sich leicht a priori angeben.

Da wir nämlich das Produkt

$$m.m-1....m-\zeta+1=(mP\zeta)$$

auch so schreiben können:

$$(m.m-1....m-\zeta+2)(m-\zeta+1)=(mP\zeta-1)(m-\zeta+1),$$

so ergibt sich sofort:

$$(mP\zeta)=(m-\zeta+1)(mP\zeta-1). \qquad \text{(II)}$$

Ebenso ist

$$m.m-1....m-\zeta+1=m(m-1....m-\zeta+1),$$

d. h.

$$(mP\zeta)=m(m-1P\zeta-1)$$

oder, da (nach (II))

$$(mP\zeta)=(m-\zeta+1)(mP\zeta-1)$$

ist,

$$(mP\zeta-1)=\frac{m}{m-\zeta+1}(m-1P\zeta-1). \qquad \text{(III)}$$

Die Formel (II) giebt für $\zeta=1, 0, -1, -2, ...$:

$$(mP1)=m,\ (mP0)=1,\ (mP-1)=\frac{1}{m+1},$$

$$(mP-2)=\frac{1}{(m+1)(m+2)},\ \text{u. s. w.}$$

Aus Formel (III) dagegen folgern wir für $m=1$:

$$(0P\zeta-1)=\frac{2-\zeta}{1}(1P\zeta-1)$$

oder

$$(0P\zeta)=\frac{1-\zeta}{1}(1P\zeta)=\frac{1-\zeta.2-\zeta}{1.2}(2P\zeta)=\text{ u. s. w,}$$

Mit Anwendung dieser Eigenschaften der Funktion $(mP\zeta)$ auf Gleichung (I) erhält man nun sogleich, wenn man einerseits $\zeta=1, 2, 3....$, andererseits $\zeta=0, -1, -2, ...$ setzt:

$$\frac{\partial(x^m)}{\partial x}=mx^{m-1},\quad \frac{\partial^2(x^m)}{\partial x^2}=m.m-1.x^{m-2},$$

$$\frac{\partial^3(x^m)}{\partial x^3}=m.m-1.m-2x^{m-3}...., \quad \frac{\partial^0(x^m)}{\partial x^0}=(mP0)x^{m-0}=x^m,$$

$$\frac{\partial^{-1}(x^m)}{\partial x^{-1}}=\int x^m\partial x=(mP-1)x^{m+1}=\frac{1}{m+1}x^{m+1},$$

$$\frac{\partial^{-2}(x^m)}{\partial x^{-2}}=\int(\int x^m\partial x)\partial x=(mP-2)x^{m+2}=\frac{1}{m+1.m+2}x^{m+2},$$

u. s. w.

Wir wollen nun eine Methode angeben, wie man einen beliebigen Differentialquotienten (ganz oder gebrochen, positiv oder negativ) einer beliebigen Funktion in eine Reihe entwickeln kann, sofern man nur die ganzen positiven Differentialquotienten derselben kennt. Man erhält nämlich durch successives Differentiiren des Produkts $y=f(x).\varphi(x)$:

$$\frac{\partial(f(x)\varphi(x))}{\partial x}=f(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}+\varphi(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2(f(x)\varphi(x))}{\partial x^2}=f(x)\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^2}+2\frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}+\varphi(x)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2},$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^\zeta(f(x)\varphi(x))}{\partial x^\zeta}=f(x)\frac{\partial^\zeta\varphi(x)}{\partial x^\zeta}+\frac{\zeta}{1}\frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{\partial^{\zeta-1}\varphi(x)}{\partial x^{\zeta-1}}+\frac{\zeta.\zeta-1}{1.2}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\frac{\partial^{\zeta-2}\varphi(x)}{\partial x^{\zeta-2}}+.... \quad \text{(IV)}$$

Für $f(x)=y$, $\varphi(x)=A$ gibt dies:

$$\frac{\partial^\zeta(yA)}{\partial x^\zeta}=y\frac{\partial^\zeta(A)}{\partial x^\zeta}+\frac{\zeta}{1}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^{\zeta-1}(A)}{\partial x^{\zeta-1}}+\frac{\zeta.\zeta-1}{1.2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^{\zeta-2}(A)}{\partial x^{\zeta-2}}+....,$$

oder da

$$\frac{\partial^\zeta(A)}{\partial x^\zeta}=\frac{\partial^\zeta(A.x^0)}{\partial x^\zeta}=A\frac{\partial^\zeta(x^0)}{\partial x^\zeta}=A(0P\zeta)x^{0-\zeta},$$

$$\frac{\partial^{\zeta-1}(A)}{\partial x^{\zeta-1}} = A(0P\zeta-1)x^{1-\zeta} \text{ u. s. w.}$$

und

$$(0P\zeta-1) = \frac{(0P\zeta)}{1-\zeta}, \; (0P\zeta-2) = \frac{(0P\zeta)}{1-\zeta.2-\zeta}, \text{ u. s. w.}$$

ist:

$$\frac{\partial^{\zeta}(y.A)}{\partial x^{\zeta}} = \frac{A(0P\zeta)}{x^{\zeta}}\left\{y + \frac{\zeta}{1}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{x}{1-\zeta} + \frac{\zeta.\zeta-1}{1.2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{x^2}{1-\zeta.2-\zeta} + \ldots\right\}$$

oder

$$\frac{\partial^{\zeta}f(x)}{\partial x^{\zeta}} = \frac{(0P\zeta)}{x^{\zeta}}\left\{f(x) + \frac{\zeta}{1}\frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{x}{1-\zeta} + \frac{\zeta.\zeta-1}{1.2}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\frac{x^2}{1-\zeta.2-\zeta} + \ldots\right\}. \quad \text{(V)}$$

Von dieser Reihe ist die Bernoulli'sche Reihe:

$$\int f(x)\partial x = f(x).x - \frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{x^2}{1.2} + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\frac{x^3}{1.2.3} - \ldots,$$

derjenige specielle Fall, in welchen sie für $\zeta=-1$ übergeht. Man erhält nämlich aus (V) für $\zeta=-1$:

$$\frac{\partial^{-1}f(x)}{\partial x^{-1}} = \int f(x)\partial x$$

$$= \frac{(0P-1)}{x^{-1}}\left(f(x) - \frac{1}{1}\frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{x}{1.2} + \frac{1.2}{1.2}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\frac{x^2}{1.2.3} - \ldots\right)$$

$$= xf(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{x^2}{1.2} + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\frac{x^3}{1.2.3} - \ldots$$

Setzt man in den Werth des ζten Differentialquotienten von x^m

$$\frac{\partial^{\zeta}(x^m)}{\partial x^{\zeta}} = (mP\zeta)x^{m-\zeta}$$

$m=0$, so wird daraus, wie sich schon oben ergab:

$$\frac{\partial^{\zeta}(1)}{\partial x^{\zeta}} = (0P\zeta)x^{-\zeta},$$

während für $m=\zeta$

$$\frac{\partial^{\zeta}(x^{\zeta})}{\partial x^{\zeta}} = (\zeta P\zeta)x^{\zeta-\zeta} = (\zeta P\zeta)$$

hervorgeht.

Die Funktionen $(0P\zeta)$ und $(\xi P\zeta)$ erscheinen daher als specielle Fälle von $(mP\zeta)$ und müssen sich aus derselben entwickeln lassen.

2) Die Faktorielle $(mP\zeta)$.

Eintwickeln wir nun zuerst die Faktorielle $(mP\zeta)$.

Das Produkt $(mP\zeta)=m.m-1....m-\zeta+1$ besteht aus ζ einfachen Faktoren in Bezug auf m, lässt sich also als eine Gleichung vom ζten Grad in Bezug auf m betrachten, deren Wurzeln $0, 1, 2....(\zeta-1)$ sind. Ordnet man diese Gleichung nach Potenzen von m, so entsteht ein Ausdruck von der Form:

$$(mP\zeta)=m^\zeta+f'(\zeta)m^{\zeta-1}+f''(\zeta)m^{\zeta-2}+f'''(\zeta)m^{\zeta-3}+....$$

Es ist sonach die Entwickelung für $(mP\zeta)$ gefunden, sofern die successiven Funktionen $f'(\zeta)$, $f''(\zeta)$.... sich angeben lassen.

Fasst man die Bedeutung der Funktionen $f'(\zeta)$, $f''(\zeta)$.... als successiver Coefficienten einer Gleichung, deren Wurzeln $0, 1, 2....\zeta-1$ sind, näher ins Auge, so ergibt sich:

$$f'(\zeta)=a_1\zeta+a_2\zeta^2,$$

$$f''(\zeta)=b_1\zeta+b_2\zeta^2+b_3\zeta^3+b_4\zeta^4, \text{ u. s. w.}$$

wobei nur noch a_1, a_2; b_1, b_2, b_3, b_4;.... zu bestimmen sind, so dass man hat:

$$(mP\zeta)=m^\zeta+(a_1\zeta+a_2\zeta^2)m^{\zeta-1}+(b_1\zeta+b_2\zeta^2+b_3\zeta^3+b_4\zeta^4)m^{\zeta-2}+.... \quad (1)$$

Kommt es nun darauf an, die Coefficienten a_1, a_2; b_1, b_2, b_3, b_4; u. s. w. numerisch anzugeben, und will man nicht zugleich das Gesetz ihres Zusammenhangs auffinden, so führt folgende Methode zum Ziel.

Setzt man in Gleichung (1) ζ successiv $=1, 2, 3....$, so kennt man einerseits direkt die Werthe $(mP1)$, $(mP2)$...., nämlich $(mP1)=m$, $(mP2)=m.m-1$, u. s. w. und andererseits erhält man die entsprechenden Werthe durch die Coefficienten a_1, a_2; b_1, b_2, b_3, b_4;.... ausgedrückt.

Zur Vereinfachung dieser Operation kan man sich folgender Hülfsbetrachtungen bedienen. Setzt man nämlich in der Gleichung

$$(mP\zeta)=m^\zeta+f'(\zeta)m^{\zeta-1}+f''(\zeta)m^{\zeta-2}+....$$

$\zeta=1$, und bezeichnet die Werthe, die dann $f'(\zeta)$, $f''(\zeta)$.... annehmen, mit $f'(1)$, $f''(1)$....; so wird:

$$(nP1)=m+f'(1)+\frac{1}{m}f''(1)+\frac{1}{m^2}f'''(1)+....$$

Da nun an und für sich $(mP1)=m$ ist, so ist diese Gleichung nicht anders möglich, als wenn

$$f'(1)+\frac{1}{m}f''(1)+\frac{1}{m^2}f'''(1)+....$$

für sich = Null ist. Da aber m jede beliebige Zahl sein kann, so ist nicht nur $f'(1)$, sondern auch $f''(1)$, $f'''(1)$, ... jedes für sich gleich Null.

Setzt man weiter in (1) $\xi=2$, so entsteht:

$$(mP2)=m^2+f'(2)m+f''(2)+\frac{1}{m}f'''(2)+....=m.m-1=m^2-m,$$

woraus ebenso

$$f''(2)=0,\ f'''(2)=0,\ \text{u. s. w.}$$

folgt.

Man erhält so folgende Systeme von Gleichungen:

$$f'(1)=0\ f''(1)=0\ f'''(1)=0....$$
$$f''(2)=0\ f'''(2)=0....$$
$$f'''(3)=0....$$

woraus folgt, dass

$f'(\zeta)$: 0 und 1;

$f''(\zeta)$: 0, 1 und 2;

$f'''(\zeta)$: 0, 1, 2 und 3; u. s. w.

zu Wurzeln haben, also auch so geschrieben werden können:

$$f'(\xi)=\xi.\xi-1.q,$$
$$f''(\xi)=\xi.\xi-1.\xi-2.q'.\varphi'(\xi),$$
$$f'''(\xi)=\xi.\xi-1.\xi-2.\xi-3.q''.\varphi''(\xi),\ \text{u. s. w.}$$

Die Constanten q, q', q''...., so wie die Funktionen $\varphi'(\xi)$, $\varphi''(\xi)$, $\varphi'''(\xi)$...., sind nun sehr leicht mittelst der Gleichungen

$(mP1)=m$, $(mP2)=m.m-1$, $(mP3)=m.m-1.m-2$, u. s. w.

zu finden, so dass man erhält:

$$
\begin{aligned}
(mP\zeta) = {} & m^{\zeta} - \frac{1}{2}\zeta.\zeta-1.m^{\zeta-1} + \frac{1}{2.4}\zeta.\zeta-1.\zeta-2\left\{\zeta - \frac{1}{3}\right\} m^{\zeta-2} - \frac{1}{2.4.6}\zeta.\zeta-1.\zeta-2.\zeta-3(\zeta.\zeta-1)m^{\zeta-3} \\
& + \frac{1}{2.4.6.8}\zeta.\zeta-1.\zeta-2.\zeta-3.\zeta-4\left\{\zeta^3 - 2\zeta^2 + \frac{1}{3}\zeta + \frac{2}{15}\right\} m^{\zeta-4} \\
& - \frac{1}{2.4.6.8.10}\zeta.\zeta-1.\zeta-2.\zeta-3.\zeta-4.\zeta-5(\zeta.\zeta-1)\left\{\zeta^2 - \frac{7}{3}\zeta - \frac{2}{3}\right\} m^{\zeta-5} \\
& + \frac{1}{2.4.6.8.10.12}\zeta.\zeta-1.\zeta-2.\zeta-3.\zeta-4.\zeta-5.\zeta-6\left\{\zeta^5 - 5\zeta^4 + 5\zeta^3 + \frac{13}{9}\zeta^2 - \frac{2}{3}\zeta - \frac{16}{63}\right\} m^{\zeta-6} \qquad \text{(VI)} \\
& - \frac{1}{2.4.6.8.10.12.14}\zeta.\zeta-1.\zeta-2.\zeta-3.\zeta-4.\zeta-5.\zeta-6.\zeta-7\left\{\zeta.\zeta-1\right\}\left\{\zeta^4 - 6\zeta^3 + \frac{17}{3}\zeta^2 + \frac{58}{9}\zeta + \frac{16}{9}\right\} m^{\zeta-7} \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Um das Gesetz des Zusammenhangs der Coefficienten in den Funktionen $f'(\zeta)$, $f''(\zeta)$, $f'''(\zeta)$.... besser übersehen zu können, bezeichnen wir mit $\psi(\zeta, n)$ die Summe der Combinationen der ζ verschiedenen Grössen 0, 1, 2.... bis $\zeta-1$ zu je n, so dass man hat:

$$(mP\zeta)=m^{\zeta}-\psi(\zeta,1)m^{\zeta-1}+\psi(\zeta,2)m^{\zeta-2}-\psi(\zeta,3)m^{\zeta-3}+.... \quad (1)$$

Setzt man statt ζ: $\zeta+1$, so ist

$$(mP\zeta+1)=m^{\zeta+1}-\psi(\zeta+1,1)m^{\zeta}+\psi(\zeta+1,2)m^{\zeta-1}-\psi(\zeta+1,3)m^{\zeta-2}+... \quad (2)$$

Nun ist aber auch

$$(mP\zeta+1)=(m-\zeta)(mP\zeta),$$

d. h., wenn man für $(mP\zeta)$ aus (1) seinen Werth einsetzt:

$$(mP\zeta+1)=m^{\zeta+1}-(\psi(\zeta,1)+\zeta)m^{\zeta}$$
$$+(\psi(\zeta,2)+\zeta\psi(\zeta,1))m^{\zeta-1}-(\psi(\zeta,3)+\zeta\psi(\zeta,2))m^{\zeta-2}+.... \quad (3)$$

Hält man (3) mit (2) zusammen, so folgt:

$$\psi(\zeta+1,n)=\zeta\psi(\zeta,n-1)+\psi(\zeta,n). \quad (4)$$

Die Vereinigung von Gleichung (1) und (4) führt uns direkt zur Bestimmung der Coefficienten des Ausdrucks für $(mP\zeta)$ und ihres Bildungsgesetzes.

Das $n$te Glied der Entwickelung für $(mP\zeta)$ (s. (1)) hat nämlich die Form:

$$\psi(\zeta,n-1)m^{\zeta-n+1}.$$

Der Faktor $\psi(\zeta,n-1)$ hat die Form:

$$\psi(\zeta,n-1)=A\zeta^{2n-2}+B\zeta^{2n-3}+C\zeta^{2n-4}+.... \quad (5)$$

Setzen wir nun dieses $n$te Glied als bekannt voraus, so wissen wir, dass im $(n+1)$ten Glied der Coefficient von $m^{\zeta-n+2}$ die Form hat:

$$\psi(\zeta,n)=\alpha\zeta^{2n}+\beta\zeta^{2n-1}+\gamma\zeta^{2n-2}+.... \quad (6)$$

Nun ist nach dem Taylor'schen Lehrsatz:

$$\psi(\zeta+1,n)=\psi(\zeta,n)+\frac{\partial\psi(\zeta,n)}{1.\partial\zeta}+\frac{\partial^2\psi(\zeta,n)}{1.2.\partial\zeta^2}+\frac{\partial^3\psi(\zeta,n)}{1.2.3.\partial\zeta^3}+.... \quad (7)$$

Aus Gleichung (4) wird daher:

$$\psi(\zeta,n)+\frac{\partial\psi(\zeta,n)}{1.\partial\zeta}+\frac{\partial^2\psi(\zeta,n)}{1.2.\partial\zeta^2}+\ldots.$$
$$=\zeta(A\zeta^{2n-2}+B\zeta^{2n-3}+C\zeta^{2n-4}+\ldots.)+\psi(\zeta,n),$$

oder da

$$\frac{\partial\psi(\zeta,n)}{\partial\zeta}=2n\alpha\zeta^{2n-1}+(2n-1)\beta\zeta^{2n-2}+\ldots.,$$

$$\frac{\partial^2\psi(\zeta,n)}{\partial\zeta^2}=2n.2n-1.\alpha\zeta^{2n-2}+2n-1.2n-2.\beta\zeta^{2n-3}+\ldots.\text{ u. s. w}$$

ist:

$$2n\alpha\zeta^{2n-1}+\frac{2n-1}{1}\beta\zeta^{2n-2}+\frac{2n-2}{1}\gamma\zeta^{2n-3}+\ldots.$$
$$=A\zeta^{2n-1}+B\zeta^{2n-2}+C\zeta^{2n-3}+\ldots.$$
$$+\frac{2n.2n-1}{1.2}\alpha\zeta^{2n-2}+\frac{2n-1.2n-2}{1.2}\beta\zeta^{2n-3}+\ldots.$$
$$+\frac{2n.2n-1.2n-2}{1.2.3}\alpha\zeta^{2n-3}+\ldots.$$

d. h.

$$2n\alpha=A,\ \alpha=\frac{A}{2n};$$

$$2n-1.\beta+\frac{2n.2n-1}{1.2}\alpha=B,\ \beta=\frac{B-\frac{2n.2n-1}{1.2}\alpha}{2n-1};$$

$$2n-2.\gamma+\frac{2n-1.2n-2}{1.2}\beta+\frac{2n.2n-1.2n-2}{1.2.3}\alpha=C,$$

$$\gamma=\frac{C-\frac{2n.2n-1.2n-2}{1.2.3}\alpha-\frac{2n-1.2n-2}{1.2}\beta}{2n-2}\text{ u. s. w.}$$

Wir kennen also nun das rekurrente Bildungsgesetz*) d
Reihe für $(mP\zeta)$ und erhalten so direkt:

---

*) Das Gesetz des Zusammenhangs dieser Coefficienten hat zue
Kramp in seiner „Analyse des refractions astronomiques
terrestres“ (Strassburg 1799) gegeben.

$$(mP\zeta) = m^\zeta - \frac{1}{2}(\zeta^2 - \zeta)m^{\zeta-1} + \frac{1}{2.4}(\zeta^4 - \frac{10}{3}\zeta^3 + 3\zeta^2 - \frac{2}{3}\zeta)$$
$$- \frac{1}{2.4.6}(\zeta^6 - 7\zeta^5 + 17\zeta^4 - 17\zeta^3 + 6\zeta^2)m^{\zeta-3} + \ldots$$

also dieselbe Reihe wie oben (Formel (VI)).

Die Formel für $(mP\zeta)$ (VI) hat am meisten Aehnlichkeit mit der Binomialformel unter folgender Form:

$$(m-1)^\zeta = m^\zeta - \zeta m^{\zeta-1} + \frac{\zeta.\zeta-1}{1.2}m^{\zeta-2} - \ldots = (m-1)(m-1)\ldots(m-1),$$

$$(mP\zeta) = m^\zeta - \frac{\zeta.\zeta-1}{2}m^{\zeta-1} + \frac{\zeta.\zeta-1.\zeta-2}{2.4}(\zeta - \frac{1}{3})\ m^{\zeta-2} - \ldots$$
$$= m(m-1)\ldots(m-\zeta+1).$$

Beides sind die Entwickelungen eines Produkts von ζ Faktoren, welche bei der Exponentialfunktion m^ζ einander gleich, bei der Funktion $(mP\zeta)$ um je Eins verschieden sind.

Aus dieser Analogie lässt sich die Berechtigung herleiten, die Entwickelung von $(mP\zeta)$ auch auf den Fall auszudehnen, wo ζ negativ oder gebrochen ist.

Einige der wichtigsten Eigenschaften der Funktion $(mP\zeta)$, namentlich aber ihre Hauptanalogien mit der Exponentialfunktion ergeben sich, wenn man das Produkt

$$x^{m-n}x^n = x^m$$

nach Formel (IV) differentiirt, indem man

$$x^{m-n} = f(x),\ x^n = \varphi(x)$$

setzt. Man erhält so, da

$$\frac{\partial^\zeta(x^m)}{\partial x^\zeta} = (mP\zeta)x^{m-\zeta}$$

ist:

$$(mP\zeta)x^{m-\zeta}=\frac{\partial^\zeta(x^{m-n}x^n)}{\partial x^\zeta}=x^{m-n}\frac{\partial^\zeta(x^n)}{\partial x^\zeta}+\frac{\zeta}{1}(m-n)x^{m-n-1}\frac{\partial^{\zeta-1}(x^n)}{\partial x^{\zeta-1}}$$
$$+\frac{\zeta.\zeta-1}{1.2}(m-n)(m-n-1)x^{m-n-2}\frac{\partial^{\zeta-2}(x^n)}{\partial x^{\zeta-2}}+\ldots.,$$

$$=x^{m-n}(nP\zeta)x^{n-\zeta}+\frac{\zeta}{1}(m-n)x^{m-n-1}(nP\zeta-1)x^{n-\zeta+1}$$
$$+\frac{\zeta.\zeta-1}{1.2}(m-n)(m-n-1)x^{m-n-2}(nP\zeta-2)x^{m-\zeta+2}+\ldots.$$

$$=x^{m-\zeta}\{(nP\zeta)+\frac{\zeta}{1}(m-nP1)(nP\zeta-1)+$$
$$+\frac{\zeta.\zeta-1}{1.2}(m-nP2)(nP\zeta-2)+\ldots.\},$$

was sich wegen

$$(nP\zeta-1)=\frac{(nP\zeta)}{n-\zeta+1}\text{ (nach Formel II)},$$

$$(nP\zeta-2)=\frac{(nP\zeta)}{(n-\zeta+1)(n-\zeta+2)}\text{ u. s. w.}$$

auch so schreiben lässt:

$$(mP\zeta)=(nP\zeta)\{1+\frac{\zeta}{1}\frac{m-n}{n-\zeta+1}+\frac{\zeta.\zeta-1}{1.2}\frac{m-n.m-n-1}{n-\zeta+1.n-\zeta+2}+\ldots.\}\text{ *)},$$

oder, wenn man statt m: $m+n$ setzt:

(VII)

$$(m+nP\zeta)=(nP\zeta)\{1+\frac{\zeta}{1}\frac{m}{n-\zeta+1}+\frac{\zeta.\zeta-1}{1.2}\frac{m.m-1}{n-\zeta+1.n-\zeta+2}+\ldots.\}.$$

Vermittelst dieser Gleichung lassen sich leicht für $(mP\zeta)$ diejenigen Relationen aufstellen, die den folgenden:

---

*) Setzt man in dieser Gleichung $n=\zeta$, so erhält man den folgenden Ausdruck:

$$\frac{(mP\zeta)}{(\zeta P\zeta)}=1+\frac{\zeta}{1}\frac{m-\zeta}{1}+\frac{\zeta.\zeta-1}{1.2}\frac{m-\zeta.m-\zeta-1}{1.2}+\ldots.,$$

$\frac{(mP\zeta)}{(\zeta P\zeta)}$ ist aber die Anzahl der Combinationen von m Grössen zu je ζ. Es drückt sonach diese letztere Reihe das Interpolationsgesetz für die Newton'schen Binomialcoefficienten aus.

$$m^n m^\zeta = m^{n+\zeta},\ (m^\zeta)^n = m^{n\zeta}$$

der Exponentialfunktion entsprechen.

Da sich nämlich das Hauptprodukt:

$$(mP\zeta) = m.m-1....(m-\zeta+1)$$

in eine beliebige Anzahl von Faktorengruppen zerlegen lässt, so hat man als allgemeinen Ausdruck des in Gleichung (II) enthaltenen Gesetzes:

$$(mP\zeta'+\zeta''+\zeta'''+....) = (mP\zeta')(m-\zeta' P\zeta'')(m-(\zeta'+\zeta'')P\zeta''').... \quad \text{(VIII)}$$

Hieraus folgt, da nach Gleichung (VII)($n=m$, $m=-\zeta'$, $\zeta=\zeta''$ gesetzt)

$$\begin{aligned}&(m-\zeta' P\zeta'')\\ =&(mP\zeta'')\{1-\frac{\zeta''\zeta'}{1.m-\zeta''+1}+\frac{\zeta''(\zeta''-1)}{1.2}\frac{\zeta'(\zeta'+1)}{m-\zeta''+1.m-\zeta''+2}-....\}\\ =&(mP\zeta'')\psi(\zeta',\ \zeta'',\ m),\end{aligned}$$

ebenso:

$$\begin{aligned}&(m-(\zeta'+\zeta'')P\zeta''')\\ =&(mP\zeta''')\{1-\frac{\zeta'''(\zeta'+\zeta'')}{1.m-\zeta'''+1}+\frac{\zeta'''(\zeta'''-1)}{1.2}\frac{(\zeta'+\zeta'')(\zeta'+\zeta''+1)}{m-\zeta'''+1.m-\zeta'''+2}-....\}\\ =&(mP\zeta''')\psi(\zeta'+\zeta'',\ \zeta''',\ m) \text{ u. s. w.}\end{aligned}$$

ist:

$$\begin{aligned}&(mP\zeta'+\zeta''+\zeta'''+....)\\ =&(mP\zeta')(mP\zeta'')(mP\zeta''')...\psi(\zeta',\ \zeta'',\ m).\psi(\zeta'+\zeta'',\ \zeta''',\ m)..., \quad \text{(IX)}\end{aligned}$$

insofern man unter

$$\psi(a,\ b,\ m)$$

die Reihe:

$$1-\frac{ba}{1.m-b+1}+\frac{b.b-1}{1.2}\frac{a.a+1}{m-b+1.m-b+2}-.....$$

versteht.

Die der Gleichung (IX) analoge Potenzformel ist:

$$m^{\zeta'+\zeta''+\zeta'''+....} = m^{\zeta'} m^{\zeta''} m^{\zeta'''}....$$

Setzt man in Formel (IX)

$$\zeta'=\zeta''=\zeta'''....=\zeta,$$

so erhält man:

$$(mPn\zeta) = (mP\zeta)^n \psi(\zeta, \zeta, m)\psi(2\zeta, \zeta, m)\psi(3\zeta, \zeta, m)\ldots \quad (X)$$
$$\ldots\psi((n-1)\zeta, \zeta, m),$$

wobei n als ganze positive Zahl vorausgesetzt wird. Die Gleichung (X) ist der Potenzformel:

$$m^{n\zeta} = (m^\zeta)^n$$

analog.

3) Entwickelung von $\overset{e}{\log}(mP\zeta)$

Wenn es sich darum handelt, für $(mP\zeta)$ Tabellen zu berechnen, so reicht die Formel (VI), in sofern man m und ζ geeignet (d. h. so, dass Gleichung (VI) nicht divergent wird) wählt, vollkommen aus. Der Anwendung wegen aber, die wir von der Faktorielle $(mP\zeta)$ beim Differentiiren machen, erscheint es zweckmässig, auch für $\overset{e}{\log}(mP\zeta)$ einen Ausdruck zu finden.

Wir bestimmen $\overset{e}{\log}(mP\zeta)$ als $\int \frac{\partial(mP\zeta)}{(mP\zeta)}$, wobei es sich also zunächst darum handelt, $\frac{\partial(mP\zeta)}{\partial\zeta}$ zu finden.

Es ist aber

$$\frac{\partial(mP\zeta)}{\partial\zeta} = \frac{(mP\zeta+\partial\zeta)-(mP\zeta)}{\partial\zeta}, \quad (1)$$

und nach Gleichung (VIII)

$$(mP\zeta+\partial\zeta) = (mP\zeta)(m-\zeta P\partial\zeta); \quad (2)$$

weiter nach Formel (VI)

$$(m-\zeta P\partial\zeta)$$
$$= (m-\zeta)^{\partial\zeta}\{1+\left(\frac{\alpha}{m-\zeta}+\frac{\beta}{(m-\zeta)^2}+\frac{\gamma}{(m-\zeta)^3}+\frac{\delta}{(m-\zeta)^4}+\ldots\right)\partial\zeta\}, \quad (3)$$

wobei wir mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$ die Konstanten bezeichnen, welche zum Vorschein kommen, wenn man

$$(m-\zeta P\partial\zeta) = (m-\zeta)^{\partial\zeta} + f'(\partial\zeta).(m-\zeta)^{\partial\zeta-1} + f''(\partial\zeta).(m-\zeta)^{\partial\zeta-2}+\ldots.$$
$$= (m-\zeta)^{\partial\zeta}\{1+\frac{f'(\partial\zeta)}{m-\zeta}+\frac{f''(\partial\zeta)}{(m-\zeta)^2}+\ldots.\},$$

entwickelt und die höheren Potenzen von $\partial\zeta$ vernachlässigt.

Weiter ist:

$$(m-\xi)^{\partial\xi} = m^{\partial\xi}\{1-\frac{\xi}{m}\partial\xi+\ldots.\}$$

$$=\{1+\partial\xi\overset{e}{\log}m+\ldots.\}\{1-\frac{\xi}{m}\partial\xi+\ldots.\}=1+\partial\xi\{\overset{e}{\log}m-\frac{\xi}{m}\}. \qquad (4)$$

Man findet daher durch Einsetzung der Werthe aus Gl. (3) und (4) in (2 und (1):

$$\frac{\partial(mP\xi)}{\partial\xi} = \frac{(mP\xi)_{\partial\xi}-(mP\xi)}{\partial\xi} = \frac{(mP\xi)\{1+\partial\xi\overset{e}{\log}m-\frac{\xi}{m}\}\{1+\left(\frac{\alpha}{m-\xi}+\frac{\beta}{(m-\xi)^2}+\frac{\gamma}{(m-\xi)^3}+\ldots\right)\partial\xi\}-(mP\xi)}{\partial\xi}$$

$$= (mP\xi)\{\overset{e}{\log}m-\frac{\xi}{m}+\{\frac{\alpha}{m-\xi}+\frac{\beta}{(m-\xi)^2}+\frac{\gamma}{(m-\xi)^3}+\frac{\delta}{(m-\xi)^4}+\ldots.\}\}. \qquad (5)$$

Daher

$$\overset{e}{\log}(mP\xi)=\int\frac{\partial(mP\xi)}{(mP\xi)}=\xi\overset{e}{\log}m-\frac{\xi^2}{2m}-\overset{e}{\log}(m-\xi)+\frac{\beta}{m-\xi}+\frac{2\gamma}{2(m-\xi)^2}+\frac{\delta}{3(m-\xi)^3}+\ldots.+\text{const.}$$

Die Konstante bestimmen wir dadurch, dass für

$$\zeta=0 \quad \overset{e}{\log}(mP0)=\overset{e}{\log}1=0$$

ist. Man hat daher

$$\text{const.}=\alpha\overset{e}{\log}m-\left(\frac{\beta}{m}+\frac{\gamma}{2m^2}+\frac{\delta}{3m^3}+\ldots.\right)$$

und

$$\overset{e}{\log}(mP\zeta)=\zeta\overset{e}{\log}m-\frac{\zeta^2}{2m}+\alpha\overset{e}{\log}\frac{m}{m-\zeta}+\frac{\beta}{1}\left(\frac{1}{m-\zeta}-\frac{1}{m}\right)$$
$$+\frac{\gamma}{2}\left(\frac{1}{(m-\zeta)^2}-\frac{1}{m^2}\right)+\frac{\delta}{3}\left(\frac{1}{(m-\zeta)^3}-\frac{1}{m^3}\right)+\ldots. \quad \text{(XI)}$$

Bestimmung der Coefficienten α, β, γ, δ.... in Gleichung (XI).

Um das rekurrente Bildungsgesetz der Coefficienten α, β, γ, δ.... aufzufinden, betrachten wir zunächst die Ausdrücke $(mP\partial\zeta)$ und $(nP\partial\zeta)$, welche zugleich für die Entwickelung von $\overset{e}{\log}(\zeta P\zeta)$ die Grundlage bilden.

Setzt man in Gleich. (VII) statt $m+n$: m, statt m: $m-n$, statt ζ: $\partial\zeta$ und vernachlässigt die höheren Potenzen von $\partial\zeta$, so wird:

$$(mP\partial\zeta)=(nP\partial\zeta)\{1+\partial\zeta(\frac{m-n}{1.n+1}-\frac{1}{1.2}\frac{m-n.m-n-1}{n+1.n+2}+\frac{1.2}{1.2.3}\frac{m-n.m-n-1.m-n-2}{n+1.n+2.n+3}-....)\}, \qquad \text{(XII)}$$

d. h.

$$\frac{(mP\partial\zeta)-(nP\partial\zeta)}{(nP\partial\zeta)\partial\zeta}=\frac{m-n}{n+1}-\frac{1}{2}\frac{m-n.m-n-1}{n+1.n+2}+\frac{1}{3}\frac{m-n.m-n-1.m-n-2}{n+1.n+2.n+3}-.... \qquad \text{(XIII)}$$

Nun ist auch:

$$(mP\partial\zeta)=\frac{(m+p-\partial\zeta Pp)(m+pP\partial\zeta)}{(m+pPp)}$$

und

$$(m+p-\partial\zeta Pp)=(m+pPp)\{1-\partial\zeta(\frac{p}{1.m+1}-\frac{p.p-1}{2.m+1.m+2}+\frac{p.p-1.p-2}{3.m+1.m+2.m+3}-....)\}.$$

Weiter nach Gleich. (VI)

$$(m+pP\partial\zeta)=(m+p)^{\partial\zeta}\{1+(\frac{\alpha}{m+p}+\frac{\beta}{(m+p)^2}+\frac{\gamma}{(m+p)^3}+....)\partial\zeta\}=(1+\partial\zeta\overset{e}{\log}(m+p))\{1+(\frac{\alpha}{m-\zeta}+\frac{\beta}{(m-\zeta)^2}+....)\partial\zeta\}$$

$$=1+\partial\zeta\{\overset{e}{\log}(m+p)+\frac{\alpha}{m+p}+\frac{\beta}{(m+p)^2}+\frac{\gamma}{(m+p)^3}+\frac{\delta}{(m+p)^4}+....\} \qquad \text{(XIV)}$$

Daher auch:

$$(mP\partial\xi)=\{1-\partial\xi(\frac{p}{1.m+1}-\frac{p.p-1}{2.m+1.m+2}+....)\}$$
$$\times\{1+\partial\xi(\overset{e}{\log}(m+p+\frac{\alpha}{m+p}+\frac{\beta}{(m+p)^2}+...)\}$$

$$=1+\partial\xi[\overset{e}{\log}(m+p)+\frac{\alpha}{m+p}+\frac{\beta}{(m+p)^2}+....$$
$$...-(\frac{p}{1.m+1}-\frac{p.p-1}{2.m+1.m+2}+\frac{p.p-1.p-2}{3.m+1.m+2.m+3}-...)],$$

und

$$\frac{(mP\partial\xi)-(nP\partial\xi)}{(nP\partial\xi)\partial\xi}=\overset{e}{\log}\left(\frac{m+p}{1}\right)+\alpha\left(\frac{1}{m+p}-\frac{1}{n}\right)+\beta\left(\frac{1}{(m+p)^2}-\frac{1}{n^2}\right)+....$$
$$....-\{\frac{p}{1.m+1}-\frac{p.p-1}{2.m+1.m+2}+....\} \quad (2)$$

Setzt man (XIII)=(2), so wird:

$$\overset{e}{\log}\left(\frac{m+p}{n}\right)+\alpha\left(\frac{1}{m+p}-\frac{1}{n}\right)+\beta\left(\frac{1}{(m+p)^2}-\frac{1}{n^2}\right)+....$$
$$....-\left(\frac{p}{1.m+1}-\frac{p.p-1}{2.m+1.m+2}+.....\right)$$
$$=\frac{m-n}{n+1}-\frac{1}{2}\frac{m-n.m-n-1}{n+1.n+2}+\frac{1}{3}\frac{m-n.m-n-1.m-n-2}{n+1.n+2.n+3}-... \quad (XV$$

Wenn man in dieser Gleichung $n=m$ setzt, so verschwinde die Reihe rechts und man bekommt:

$$\overset{e}{\log}\frac{m+p}{m}+\alpha\left(\frac{1}{m+p}-\frac{1}{m}\right)+\beta\left(\frac{1}{(m+p)^2}-\frac{1}{m^2}\right)+....$$
$$....=\frac{p}{1.m+1}-\frac{p.p-1}{2.m+1.m+2}+..., \quad (XVI$$

welche Gleichung sich zur Bestimmung von α, β, γ.... vorzugs weise eignet. Man braucht nämlich dem p nur einen bestimmte ganzen positiven Werth zu geben. Setzt man z. B. $p=1$ un statt m: x, so wird,

$$\overset{e}{\log}\left(\frac{x+1}{x}\right)+\alpha\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)+\beta\left(\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x^2}\right)+....=\frac{1}{x+1}.$$

Differentiirt man beiderseits und entwickelt die Brüche von d Form $\frac{1}{(x+1)^n}$ nach dem binomischen Lehrsatz, so wird:

$$-\frac{1}{x(x+1)}+\alpha\left(\frac{-1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x^2}\right)+\beta\left(\frac{-2}{(x+1)^3}+\frac{2}{x^3}\right)+\ldots=-\frac{1}{(x+1)^2},$$

und

$$\left\{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^5}+\ldots.\right\},$$

$$+\alpha\left\{\frac{-2}{1.x^3}+\frac{2.3}{1.2.x^4}-\frac{2.3.4}{1.2.3x^5}+\frac{2.3.4.5}{1.2.3.4.x^6}-\ldots.\right\}$$

$$+2\beta\left\{\frac{-3}{1.x^4}+\frac{3.4}{1.2x^5}-\frac{3.4.5}{1.2.3x^6}+\frac{3.4.5.6}{1.2.3.4x^7}-\ldots.\right\}$$

$$+3\gamma\left\{\frac{-4}{1.x^5}+\frac{4.5}{1.2.x^6}-\frac{4.5.6}{1.2.3x^7}+\frac{4.5.6.7}{1.2.3.4x^8}-\ldots.\right\}$$

$$+\ldots\ldots\ldots$$

$$=\frac{1}{x^2}-\frac{1.2}{1.x^3}+\frac{1.2.3}{1.2.x^4}-\frac{1.2.3.4}{1.2.3.x^5}+\ldots..$$

Durch Gleichsetzung der beiderseits gleichen Potenzen erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{2}{1}\alpha=\frac{2}{1},\\
&\frac{2.3}{1.2}\alpha-\frac{3}{1}\cdot 2\beta=\frac{2.3}{1.2},\\
&\frac{2.3.4}{1.2.3}\alpha-\frac{3.4}{1.2}2\beta+\frac{4}{1}\cdot 3\gamma-\frac{2.3.4}{1.2.3},\\
&\frac{2.3.4.5}{1.2.3.4}\alpha-\frac{3.4.5}{1.2.3}2\beta+\frac{4.5}{1.2}3\gamma-\frac{5}{1}\cdot 4\delta=\frac{2.3.4.5}{1.2.3.4},\\
&\qquad\text{u. s. w.}
\end{aligned}\right\}\quad\text{(XVII)}$$

Dieses Schema stimmt mit dem Bildungsschema der Bernulli'schen Zahlen überein, so dass man hat:

$$\alpha=\frac{1}{2},$$

$$\beta=-\frac{1}{2}B_1=-\frac{1}{12},$$

$$\gamma=B_2=0$$

$$\delta=\frac{1}{4}B_3=+\frac{1}{120},$$

$$\varepsilon=B_4=0,$$

$$(\zeta)=-\frac{1}{6}B_5=-\frac{1}{252},\text{ u. s. w.}^*)$$

*) Zum Unterschied von dem sonst häufig in dieser Abhandlung vorkommenden ζ ist dieses ζ in Parenthesen eingeschlossen worden. G.

Man kann daher, wenn man mit B_1, B_3, B_5.... die Bernoulli'schen Zahlen bezeichnet, Gleichung XI. auch so schreiben:

$$\overset{e}{\log}(mP\zeta)=\zeta\overset{e}{\log}m-\frac{\zeta^2}{2m}+\frac{1}{2}\overset{e}{\log}\frac{m}{m-\zeta}-\frac{1}{1.2}B_1\left(\frac{1}{m-\zeta}-\frac{1}{m}\right)$$
$$+\frac{1}{3.4}B_3\left(\frac{1}{(m-\zeta)^3}-\frac{1}{m^3}\right)-\frac{1}{5.6}B_5\left(\frac{1}{(m-\zeta)^5}-\frac{1}{m^5}\right)+\ldots \quad \text{(XVIII)}$$

4) Entwickelung von $\overset{e}{\log}(\zeta P\zeta)$

Der Werth von $(\zeta P\zeta)$ lässt sich nach Formel (VI) nicht direk berechnen, ebensowenig derjenige von $(0P\zeta)$, weil für $m=\zeta$ un für $m=0$ diese Formel divergent wird oder (für $m=0$) Gliede von unzulässiger Gestalt (0^ζ u. s. w.) erhält. Am leichteste kommt man zum Ziel, wenn man zuerst für $\overset{e}{\log}(\zeta P\zeta)$ einen Ausdruck sucht.

Wir bestimmen $\overset{e}{\log}(\zeta P\zeta)$ ebenfalls wieder als $\int\frac{\partial(\zeta P\zeta)}{(\zeta P\zeta)}$. Nun ist

$$\frac{\partial(\zeta P\zeta)}{\partial\zeta}=\frac{(\zeta+\partial\zeta P\zeta+\partial\zeta)-(\zeta P\zeta)}{\partial\zeta}.$$

Es ist aber weiter:

$$(\zeta+\partial\zeta P\zeta+\partial\zeta)=(\zeta+\partial\zeta P\zeta)(\partial\zeta P\partial\zeta) \quad (1)$$

und

$$(\zeta+\partial\zeta P\zeta)=(\zeta P\zeta)\{1+\frac{\zeta\partial\zeta}{1.1}+\frac{\zeta.\zeta-1}{1.2}\frac{\partial\zeta.\partial\zeta-1}{1.2}+\ldots.\}$$
$$=(\zeta P\zeta)\{1+\partial\zeta(\frac{\zeta}{1.1}+\frac{\zeta.1-\zeta}{1.2}.\frac{1}{2}+\frac{\zeta.1-\zeta.2-\zeta}{1.2.3}.\frac{1}{3}+\ldots.)\} \quad (2)$$

Setzt man in Gleichuug (XII) $m=\partial\zeta$, $n=0$, so wird daraus:

$$(\partial\zeta P\partial\zeta)=(0P\partial\zeta)\{1+\partial\zeta^2(\frac{1}{1.1}+\frac{1}{2.2}+\ldots.)\}=(0P\partial\zeta), \quad (3)$$

weil $\frac{\pi^2}{6}\partial\zeta^2$ gegen 1 verschwindet.

Nun ist nach (XII), wenn man dort $m=0$ setzt:

$$(0P\partial\zeta)=(nP\partial\zeta)\{1-\partial\zeta(\frac{n}{1.n+1}-\frac{n}{2.n+2}+\frac{n}{3.n+3}-\ldots.) \quad (4)$$

und nach Formel (XIV):

$$(nP\partial\zeta)=1+\partial\zeta(\overset{e}{\log}n+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n^2}+\frac{\gamma}{n^3}+....). \qquad (5)$$

Daher mit Benützung der Formeln (2), (3), (4), (5):

$$\zeta+\partial\zeta P\zeta+\partial\zeta)=(\zeta P\zeta)\{1+\partial\zeta(\frac{\zeta}{1.1}+\frac{\zeta.1-\zeta}{1.2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\zeta.1-\zeta.2-\zeta}{1.2.3}\cdot\frac{1}{3}+....)\}$$

$$\times\{1-\partial\zeta(\overset{e}{\log}n+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n^2}+...)\}\{1-\partial\zeta(\frac{n}{1.n+1}+\frac{1}{2}\frac{n}{n+2}+....)\}$$

$$=(\zeta P\zeta)+(\zeta P\zeta)\partial\zeta\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{1}\cdot\frac{\zeta}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\zeta.1-\zeta}{1.2}+\frac{1}{3}\frac{\zeta.1-\zeta.2-\zeta}{1.2.3}+....\\+\overset{e}{\log}n+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n^2}+\frac{\gamma}{n^3}+....\\-\frac{n}{1.n+1}-\frac{1}{2}\frac{n}{n+2}-\frac{1}{3}\frac{n}{n+3}+....\end{array}\right\} \qquad (6)$$

Daher

$$\frac{(\zeta+\partial\zeta P\zeta+\partial\zeta)-(\zeta P\zeta)}{\partial\zeta}$$

$$=\frac{\partial(\zeta P\zeta)}{\partial\zeta}=(\zeta P\zeta)\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{1}\cdot\frac{\zeta}{1}+\frac{1}{2}\frac{\zeta.1-\zeta}{1.2}+\frac{1}{3}\frac{\zeta.1-\zeta.2-\zeta}{1.2.3}+....\\+\overset{e}{\log}n+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n^2}+\frac{\gamma}{n^3}+....\\-\frac{n}{1.n+1}-\frac{1}{2}\frac{n}{n+2}-\frac{1}{3}\frac{n}{n+3}-....\end{array}\right\} \qquad (XIX)$$

d

$$\zeta(\zeta P\zeta)=\int\frac{\partial(\zeta P\zeta)}{(\zeta P\zeta)}=\int\{\frac{1}{1}\frac{\zeta}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\zeta.1-\zeta}{1.2}+\frac{1}{3}\frac{\zeta.1-\zeta.2-\zeta}{1.2.3}+....\}\partial\zeta$$

$$\int\{\overset{e}{\log}n+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n^2}+\frac{\gamma}{n^3}+...\}\partial\zeta-\int(\frac{n}{1.n+1}+\frac{1}{2}\frac{n}{n+2}+\frac{1}{3}\frac{n}{n+3}+...)\partial\zeta.$$

1) Zur Integration der Reihe

$$\int(\frac{1}{1}\frac{\zeta}{1}+\frac{1}{2}\frac{\zeta.1-\zeta}{1.2}+\frac{1}{3}\frac{\zeta.1-\zeta.2-\zeta}{1.2.3}+....)\partial\zeta$$

tzen wir in Gl. (XV) $m=0$ und $p=n$ und erhalten:

$$\frac{1}{1}\frac{n}{1}-\frac{1}{2}\frac{n.n-1}{1.2}+\frac{1}{3}\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}-\ldots.$$

$$=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{2}\frac{n.n+1}{n+1.n+2}+\frac{1}{3}\frac{n.n+1.n+2}{n+1.n+2.n+3}+\ldots. \quad (XX)$$

Wird hierin $n=\zeta$ gesetzt, so erhält man:

$$\frac{1}{1}\frac{\zeta}{1}-\frac{\zeta.\zeta-1}{2.1.2}+\frac{\zeta.\zeta-1.\zeta-2}{3.1.2.3}-\ldots.=\frac{\zeta}{1.\zeta+1}+\frac{\zeta}{2.\zeta+2}+\frac{\zeta}{3.\zeta+3}+\ldots.*$$

Daher

---

*) Die Reihe

$$\frac{1}{1.\zeta+1}+\frac{1}{2.\zeta+2}+\frac{1}{3.\zeta+3}+\ldots.=R$$

lässt sich auch als ein bestimmtes Integral ausdrücken. Nennt ma
nämlich:

$$S=\frac{x^{\zeta+1}}{1.\zeta+1}+\frac{x^{\zeta+2}}{2.\zeta+2}+\frac{x^{\zeta+3}}{3.\zeta+3}+\ldots.,$$

so ist:

$$\frac{\partial S}{\partial x}=\frac{x^{\zeta}}{1}+\frac{x^{\zeta+1}}{2}+\frac{x^{\zeta+2}}{3}+\ldots.=x^{\zeta-1}\{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots.\}$$

$$=-x^{\zeta-1}\log(1-x).$$

Denn

$$\frac{\partial(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots.)}{\partial x}=1+x+x^2+\ldots.=\frac{1}{1-x}$$

d. h.

$$1+x+x^2+x^3+\ldots.=\int\frac{\partial x}{1-x}=-\log(1-x).$$

Daher

$$S=-\int x^{\zeta-1}\log(1-x)\partial x,\quad R=-\int_{0\div 1} x^{\zeta-1}\log(1-x)\partial x,$$

wobei die Konstante so zu wählen ist, dass für $x=0$ das Integral glei
Null ist.

$$\int \partial\zeta\left(\frac{1}{1}\frac{\zeta}{1}+\frac{1}{2}\frac{\zeta.1-\zeta}{1.2}+\frac{1}{3}\frac{\zeta.1-\zeta.2-\zeta}{1.2.3}+\ldots.\right)$$

$$=\frac{1}{1}\int\frac{\zeta\partial\zeta}{\zeta+1}+\frac{1}{2}\int\frac{\zeta\partial\zeta}{\zeta+2}+\frac{1}{3}\int\frac{\zeta\partial\zeta}{\zeta+3}+\ldots. \quad (1)$$

Nun ist allgemein

$$\frac{1}{p+\zeta}=\frac{1}{p}-\frac{\zeta}{p^2}+\frac{\zeta^2}{p^3}-\ldots.$$

Daher

$$\frac{1}{1}\int\frac{\zeta\partial\zeta}{1+\zeta}=\frac{1}{1.1}\int\zeta\partial\zeta-\frac{1}{1.1^2}\int\zeta^2\partial\zeta+\frac{1}{1.1^3}\int\zeta^3\partial\zeta-\ldots.,$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{\zeta\partial\zeta}{2+\zeta}=\frac{1}{2.2}\int\zeta\partial\zeta-\frac{1}{2.2^2}\int\zeta^2\partial\zeta+\frac{1}{2.2^3}\int\zeta^3\partial\zeta-\ldots \text{ u. s. w.}$$

d. h.

$$\int \partial\zeta\left(\frac{\zeta}{1.1}-\frac{1}{2}\frac{\zeta.\zeta-1}{1.2}+\frac{1}{3}\frac{\zeta.\zeta-1.\zeta-2}{1.2.3}+\ldots.\right)$$

$$\left.\begin{aligned}
&=\left\{\frac{1}{1.1}+\frac{1}{2.2}+\frac{1}{3.3}+\ldots.\right\}\int\zeta\partial\zeta\\
&-\left\{\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots.\right\}\int\zeta^2\partial\zeta\\
&+\left\{\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots.\right\}\int\zeta^3\partial\zeta\\
&-\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}=s_2\int\zeta\partial\zeta-s_3\int\zeta^2\partial\zeta+s_4\int\zeta^3\partial\zeta-\ldots. \quad \text{(XXI)}$$

insofern man die Summe $\frac{1}{1^n}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\ldots.$ mit s_n bezeichnet

2) Die Summen der Reihen

$$\overset{e}{\log} n+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n^2}+\frac{\gamma}{n^3}+\ldots.$$

und

$$\frac{n}{1.n+1}+\frac{1}{2}\frac{n}{n+2}+\frac{1}{3}\frac{n}{n+3}+\ldots.$$

und ebenfalls leicht zu bestimmen.

Da wir nämlich oben gefunden haben, dass

$$\alpha=\frac{1}{2},\ \beta=-\frac{1}{2}B_1,\ \delta=+\frac{1}{4}B_3,\ (\zeta)=-\frac{1}{6}B_5$$
$$\gamma=0,\qquad \varepsilon=0,\qquad \eta=0$$

u. s. w. sind, sofern B_1, B_3, B_5.... die Bernoulli'schen Zahlen vorstellen, so konvergirt die Reihe

$$\overset{e}{\log} n+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n^2}+\frac{\gamma}{n^3}+\ldots.=\overset{e}{\log} n+\frac{1}{2n}-\frac{B_1}{2n^2}+\frac{B_3}{4n^4}-\frac{B_5}{6n^6}+\ldots.^*)$$

jedenfalls bis zu einem gewissen Gliede, wenn man n hinlänglich gross annimmt.

Die Summe der Reihe

$$\frac{n}{1.n+1}+\frac{1}{2}\frac{n}{n+2}+\frac{1}{3}\frac{n}{n+3}+\ldots.$$

endlich erhält man für n positiv ganz nach Gl. (XX), indem der dieser Reihe identische Ausdruck

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{n}{1}-\frac{1}{2}\frac{n.n-1}{1.2}+\frac{1}{3}\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}-\ldots.$$

für n positiv ganz sich in eine geschlossene Gliederzahl verwandelt.

Die Differenz der beiden Reihen:

$$(\overset{e}{\log} n+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n^2}+\frac{\gamma}{n^3}+\ldots.)-(\frac{n}{1.n+1}+\frac{n}{2.n+2}+\frac{n}{3.n+3}+\ldots.)$$

ist eine konstante von n selbst unabhängige Grösse. Bezeichnet man dieselbe mit $-s_1$, so erigbt sich

$$\int\frac{\partial(\zeta P\zeta)}{(\zeta P\zeta)}=-s_1\int\partial\zeta+s_2\int\zeta\partial\zeta-s_3\int\zeta^2\partial\zeta+s_4\int\zeta^3\partial\zeta-\ldots.$$

d. h.

$$\overset{e}{\log}(\zeta P\zeta)=-s_1\zeta+\frac{s_2}{2}\zeta^2-\frac{s_3}{3}\zeta^3+\frac{s_4}{4}\zeta^4-\ldots+\text{const};$$

---

*) Diese Reihe gehört zu der Klasse der halbconvergenten, weil d Bernoulli'schen Zahlen B_1, B_3, B_5. .... über eine gewisse Gränze hinau so stark wachsen, dass sich die $(2m-1)$te zur $(2m+1)$ten für $m\infty$ w $1:pm^2$ verhält. So lange daher n eine endliche Zahl ist, divergirt d Reihe jedenfalls von einem gewissen Glied an, ist aber bis zu diese Glied konvergent.

$=0$ ist $(\zeta P\zeta)=1$, daher const. $=0$, also:

$$\overset{e}{\log}(\zeta P\zeta)=-s_1\zeta+\frac{s_2}{2}\zeta^2-\frac{s_3}{3}\zeta^3+\frac{s_4}{4}\zeta^4-\ldots. \quad \text{(XXII)}\ ^*)$$

---

*) Die Werthe s_2, s_3, s_4,.... lassen sich leicht bestimmen, indem

$$s_m=\frac{1}{1^m}+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\ldots.$$

gerade sich als Funktion von π ausdrücken und für m ungerade durch stark konvergirende Reihen geben lässt, in welche alls die Bernoulli'schen Zahlen eingehen. Ebenso kann man

$$s_1=-(\overset{e}{\log}n+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n^2}+\ldots.)+n\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2.n+2}+\ldots.\right)$$

ermittelst der Gleichung (XXII) bestimmen, indem für $\zeta=1:(\zeta P\zeta)=1$ $\overset{e}{\log}(\zeta P\zeta)=0$ ist, so dass man erhält:

$$s_1=\frac{s_2}{2}-\frac{s_3}{3}+\frac{s_4}{4}-\frac{s_5}{5}+\ldots.$$

der Gleichung:

$$(\zeta+\mathfrak{a}P\zeta)=\left(\frac{\zeta}{1}+1\right)\left(\frac{\zeta}{2}+1\right)\ldots.\left(\frac{\zeta}{\mathfrak{a}}+1\right)(\zeta P\zeta),$$

ζ beliebig, $\mathfrak{a}$ positiv ganz ist, hat man auch:

$$(\zeta+\mathfrak{a}P\zeta)=\overset{e}{\log}\left(\frac{\zeta}{1}+1\right)+\overset{e}{\log}\left(\frac{\zeta}{2}+1\right)+\ldots.+\overset{e}{\log}\left(\frac{\zeta}{\mathfrak{a}}+1\right)+\overset{e}{\log}(\zeta P\zeta),$$

wenn man Alles rechterhand in Reihen entwickelt und das Zusamhörige vereinigt:

$$\begin{aligned}\overset{e}{\log}(\zeta+\mathfrak{a}P\zeta)=&\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots.+\frac{1}{\mathfrak{a}}-s_1\right)\zeta\\&+\left(s_2-\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-\ldots.-\frac{1}{\mathfrak{a}^2}\right)\frac{\zeta^2}{2}\\&-\left(s_3-\frac{1}{1^3}-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}-\ldots.-\frac{1}{\mathfrak{a}^3}\right)\frac{\zeta^3}{3}\end{aligned}$$

$=1$ ist:

$$+\mathfrak{a})=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots.+\frac{1}{\mathfrak{a}}-s_1\right)+\frac{1}{2}\left(s_2-\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-\ldots.-\frac{1}{\mathfrak{a}^2}\right)-.$$

er

$$s_2=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots., \quad s_3=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\ldots., \text{ u. s. w.}$$

Diese Reihe konvergirt für Werthe von $\zeta<1$ und >-1, der Quotient des $(n+1)$ten und $n$ten Gliedes derselben für

ergibt.

5) Entwickelung von $\overset{e}{\log}(0P\zeta)$, sowie von $(\zeta P\zeta)$ und (0

Da nach Gleichung (VIII)

$$(0P\zeta)(-\zeta P-\zeta)=(0P\zeta-\zeta)=1, \text{ d. h. } (0P\zeta)=\frac{1}{(-\zeta P-\zeta)}$$

ist, so hat man sogleich:

$$\overset{e}{\log}(0P\zeta)+\log(-\zeta P-\zeta)=0.$$

Hieraus folgt, dass die Entwickelung von $\overset{e}{\log}(0P\zeta)$ ganz dies

Coefficienten wie die Entwickelung von $\overset{e}{\log}(\zeta P\zeta)$ besitzt und die Coefficienten der geraden Potenzen von ζ das entgegenges

Zeichen haben, d. h.

$$\overset{e}{\log}(0P\zeta)=-s_1\zeta-\frac{s_2}{2}\zeta^2-\frac{s_3}{3}\zeta^3-\ldots. \qquad (XX$$

Diese Reihe konvergirt ebenfalls für Werthe von $\zeta<1$ und

Mittelst der Methode der unbestimmten Coefficienten l

sich nun leicht noch die folgenden beiden Entwickelungen fü

$$(\zeta P\zeta)=1-s_1\zeta+\frac{1}{2}(s_2+s_1a_1)\zeta^2-\frac{1}{3}(s_3+s_2a_1+s_1a_2)\zeta^3+\ldots. \qquad (X$$

wobei $a_1=s_1$, $a_2=s_2+s_1a_1$, $a_3=s_3+s_2a_1+s_1a_2$, u. s. w.

$$(0P\zeta)=1-s_1\zeta-\frac{1}{2}(s_2-s_1n_1)\zeta^2-\frac{1}{3}(s_3-s_2n_1-s_1n_2)\zeta^3-\ldots, \qquad (2$$

---

ist, so lässt sich auch setzen:

$$\overset{e}{\log}(1+\mathfrak{a})=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots.+\frac{1}{\mathfrak{a}}-s_1$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(\mathfrak{a}+1)^2}+\frac{1}{(\mathfrak{a}+2)^2}+\ldots.\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(\mathfrak{a}+1)^3}+\frac{1}{(\mathfrak{a}+2)^3}+\ldots.\right)$$

oder da für $\mathfrak{a}\infty$ rechts nur die erste Klammer übrig bleibt:

$$s_1=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots.+\frac{1}{\mathfrak{a}}-\overset{e}{\log}(1+\mathfrak{a})$$

für $\mathfrak{a}\infty$ und ganz, also ein neuer Werth für die Konstante s_1.

$n_1 = s_1$, $n_2 = s_2 - s_1 n_1$, $n_3 = s_3 - s_2 n_1 - s_1 n_2$, u. s. w. ist, wäh-
s_1, s_2, s_3.... dieselbe Bedeutung wie in Gleichung (XXII)
Gleichung (XXXIII) haben.

6) Wirkliche Auswerthung der Funktionen $y = (mP\zeta)$ und $y = (\zeta P\zeta)$.

ür die wirkliche Auswerthung der Funktion $y = (mP\zeta)$ ist
ormel (VI) die bequemste. Nach ihr ist:

$$(mP\zeta) = m^{\zeta} - \frac{\zeta.\zeta-1}{2} m^{\zeta-1} + \frac{\zeta.\zeta-1.\zeta-2}{2.4}(\zeta - \frac{1}{3}) m^{\zeta-2} - \ldots$$

Reihe ist brauchbar, wenn m gross, ζ ein kleiner Bruch
Für $\zeta = \frac{1}{2}$ findet man:

$$)= m^{\frac{1}{2}}\{1 + \frac{1}{2^3 m} + \frac{1}{2^7 m^2} - \frac{5}{2^{10}.m^3} - \frac{21}{2^{15} m^4} + \frac{399}{2^{18} m^5} + \frac{869}{2^{22}.m^6} - \frac{39325}{2^{25}.m^7} - \frac{334477}{2^{31} m^8}\}.$$

ies ist eine halbkonvergente Reihe, und zwar beginnt ihre
genz um so früher, je kleiner man m nimmt. Für $m=1$
ihre Konvergenz nur bis etwa zum 5ten Gliede. Nimmt
lagegen $m=10$, so wird:

$$)= \sqrt{10} \left\{ \begin{array}{l} 1{,}000\ 000\ 000 + 0{,}012\ 500\ 000 + 0{,}000\ 078\ 125 \\ -0{,}000\ 004\ 882 - 0{,}000\ 000\ 064 + 0{,}000\ 000\ 015 \\ +0{,}000\ 000\ 001 - 0{,}000\ 000\ 000 \end{array} \right\}$$

$=3{,}202\ 037\ 59.$

s dem Werth von $(mP\frac{1}{2})$ lässt sich leicht der Werth von $(m+nP\frac{1}{2})$
on $(mPn + \frac{1}{2})$ finden. Man hat nämlich:

$$-nP\zeta) = \frac{(m+nPn)}{(m+n-\zeta Pn)}(mP\zeta), \quad (mPn+\zeta) = (mP\zeta)(m-\zeta Pn);$$

e Formeln sehr bequem sind, wenn man $(mP\zeta)$ vermittelst
iung (VI) berechnet hat und successiv:

$$\begin{array}{cccc} (m+1P\zeta) & (m-1P\zeta) & (mP\zeta+1) & (mP\zeta-1) \\ (m+2P\zeta) & (m-2P\zeta) & (mP\zeta+2) & (mP\zeta-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

will.

o z. B. findet man aus: $(10P\frac{1}{2}) = 3{,}202\ 037\ 59$:

$$(12P\tfrac{1}{2}) = \frac{24}{23}(11P\tfrac{1}{2}) = 3{,}500\ 364\ 07$$

$$\vdots$$

$$(8P\tfrac{1}{2}) = \frac{17}{18}(9P\tfrac{1}{2}) = 2{,}872\ 938\ 28$$

$$(7P\tfrac{1}{2}) = \frac{15}{16}(8P\tfrac{1}{2}) = 2{,}693\ 380\ 57$$

$$(6P\tfrac{1}{2}) = \frac{13}{14}(7P\tfrac{1}{2}) = 2{,}500\ 996\ 24$$

$$(5P\tfrac{1}{2}) = \frac{11}{12}(6P\tfrac{1}{2}) = 2{,}292\ 579\ 89$$

$$(4P\tfrac{1}{2}) = \frac{9}{10}(5P\tfrac{1}{2}) = 2{,}063\ 321\ 90$$

$$(3P\tfrac{1}{2}) = \frac{7}{8}(4P\tfrac{1}{2}) = 1{,}805\ 406\ 66$$

$$(2P\tfrac{1}{2}) = \frac{5}{6}(3P\tfrac{1}{2}) = 1{,}504\ 505\ 55$$

$$(1P\tfrac{1}{2}) = \frac{3}{4}(2P\tfrac{1}{2}) = 1{,}128\ 379\ 16$$

30,419 3571

$$(10P\tfrac{5}{2}) = \frac{17}{2}(10P\tfrac{3}{2}) =$$

258,564 535

$$\vdots$$

0,304 955 96

$$(10P-\tfrac{3}{2}) = \frac{2}{23}(10P-\tfrac{1}{2}) =$$

0,026 517 91

$$\vdots$$

r haben also so: $(1P\frac{1}{2})=1{,}128\ 379\ 16$ gefunden. Die fünf Glieder der Formel für $mP\frac{1}{2}$ (s. oben) geben direkt:

$$(1P\tfrac{1}{2})=1{,}12729....$$

äherungswerth.

in $(mP\zeta)$ m ein ächter Bruch, z. B. $m=\frac{1}{2}$, so hilft man nz in ähnlicher Weise, um die für diesen Fall mangelnde enz der Reihe (VI) zu umgehen. Es ist nämlich:

$$P\zeta)=\frac{(\frac{1}{2}-\zeta+1)(\frac{1}{2}-\zeta+2)(\frac{1}{2}-\zeta+3)....(\frac{1}{2}-\zeta+n)}{(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)(\frac{1}{2}+3)....(\frac{1}{2}+n)}(\tfrac{1}{2}+nP\zeta).$$

z. B. $\zeta=\frac{1}{2}$ und wählt man $n=10$, so findet man mit direk-utzung von Gleichung (VI):

$$)=\sqrt{\frac{21}{2}}\{1{,}000\ 000\ 00+0{,}011\ 904\ 76+0{,}000\ 070\ 86$$
$$-0{,}000\ 004\ 21-0{,}000\ 000\ 05+....\}$$
$$=3{,}240\ 370\ 349\,.\,1{,}011\ 971\ 36=3{,}279\ 161\ 98$$

aus

$$,\tfrac{1}{2}\Big)=\frac{2.4.6.8.10.12.14.16.18.20}{3.5.7.9.11.13.15.17.19.21}\cdot\Big(\frac{21}{2}P\frac{1}{2}\Big)=0{,}886\ 226\ 91.$$

kann auch die Formel $(m+nP\zeta)=\frac{(m+nPn)}{(m+n-\zeta Pn)}(mP\zeta)$, wie hung (VII) geschehen ist, so umgestalten, dass man den $\frac{(m+nPn)}{m+n-\zeta Pn)}$ in eine Reihe verwandelt.

se Umwandlung ist dann von Nutzen, wenn m eine grosse $nP\zeta)$ bereits bekannt ist und ζ und n kleine Brüche sind, so Reihe:

$$\frac{+nPn)}{+\zeta-nPn)}=1+\frac{\zeta.n}{1.m-\zeta+1}+\frac{\zeta.\zeta-1.n.n-1}{1.2.m-\zeta+1.m-\zeta+2}+....$$

ch convergent wird.

z. B. hat man

$$\zeta)=\frac{1-10\zeta.11-10\zeta.21-10\zeta....91-10\zeta.101-10\zeta}{1\ .\ 11\ .\ 21\ ....\ 91\ .\ 101}\Big(\frac{101}{10}P\zeta\Big).$$

Nach Gleichung (VII) ist aber:

$$\left(\frac{101}{1}P\zeta\right)=(10P\zeta)\{1+\frac{\zeta\cdot\frac{1}{10}}{11-\zeta}+\frac{\zeta.1-\zeta}{1.2}\cdot\frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{-9}{10}}{11-\zeta.12-\zeta}$$

$$+\frac{\zeta.1-\zeta.2-\zeta}{1.2.3}\cdot\frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{-9}{10}\cdot\frac{-19}{10}}{11-\zeta.12-\zeta.13-\zeta}+$$

Für $\zeta=\frac{1}{2}$ ist

$$\left(\frac{101}{10}P\frac{1}{2}\right)=(10P\frac{1}{2})\{1+0{,}004\,761\,904-0{,}000\,093\,167+0{,}000\,007\,08$$
$$-0{,}000\,000\,950+0{,}000\,000\,179-\ldots.$$
$$=3{,}202\,037\,59\,.\,1{,}004\,863\,28=3{,}217\,609.$$

Daher

$$\left(-\frac{9}{10}P\frac{1}{2}\right)=\frac{96.86.76\ldots.16.6.-4}{101.91.81\ldots.21.11.1}\left(101P\frac{1}{2}\right)=-2{,}855\,346$$

---

*) Das $n$te Glied der Klammerreihe entsteht, vom 3ten Glie aus dem $(n-1)$ten durch Multiplikation mit dem Faktor:

$$-\frac{(2n-5)(10n-21)}{10(n-1)(2n+17)},$$

welcher für $n\infty=\frac{-20n^2}{20n^2}=-1$ ist. Die Reihe ist daher, da die Glieder sichtlich konvergiren, ebenfalls wieder eine halbkonverge

**) Ist $(mP-\zeta)$ zu finden, so ist nach Gleichung (VIII)

$$(mP-\zeta)=\frac{1}{(m+\zeta P\zeta)}.$$

Setzt man hierin ζ successiv $=1, 2, \ldots.$, so ist

$$(mP-1)=\frac{1}{m+1}\quad(mP-2)=\frac{1}{(m+2)(m+1)}\quad\text{u. s. w.}$$

Ganz dieselben Resultate erhält man, wenn man in Gleichun $\zeta=-1, -2, \ldots.$ setzt. Man erhält nämlich in:

$$(mP-1)=m^{-1}+f'(-1)m^{-2}+f''(-1)m^{-3}+\ldots.,$$
$$f'(-1)=\frac{1}{2}.-1.-2=+1;$$

ebenso weiter:

$$f''(-1)=-1,\quad f'''(-1)=+1,\quad f^{IV}(-1)=-1,\text{ u. s. w}$$

Daher

lit Anwendung dieser Hülfsgleichungen lässt sich nun auch leicht und $(0P\zeta)$ aus $(mP\zeta)$ bestimmen, wenn man nur m passend

So z. B. haben wir oben $\left(\frac{1}{2}P\frac{1}{2}\right)$ bestimmt. Für $(0P\frac{1}{2})$ man:

$$(0P\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{2}(1P\tfrac{1}{2})=0{,}564\,189\,58.$$

7) Diskussion der Funktion $y=(mP\zeta)$.

lan muss hierbei vorerst unterscheiden, ob m positiv, oder oder ob es negativ ist.

$$(mP{-}1)=m^{-1}-m^{-2}+m^{-3}-\ldots=\frac{1}{m+1}.$$

man in Gleichung (VI) $\zeta=-2$, so wird:

$$mP{-}2)=m^{-2}-3m^{-3}+7m^{-4}-15m^{-5}+\ldots\pm(2^{n-1}-1)m^{-n}$$
$$=\frac{1}{m^2}-\frac{3}{m^3}+\frac{7}{m^4}-\frac{15}{m^5}+\ldots.$$

n wir je 2 Glieder, ein positives und ein negatives, zusammen, halten wir:

stes Glied: $\frac{m-3}{m^3}$, 2tes Glied: $\frac{7m-15}{m^5}$, 3tes Glied: $\frac{31m-63}{m^7}$,

....$n$tes Glied: $\frac{(2^{n-1}-1)-(2^{2n-1})}{m^{2n+1}}$.

ɴte Glied besteht sonach aus den 4 Werthen:

$$\frac{2^{2n-1}}{m^{2n}}-\frac{1}{m^{2n}}-\frac{2^{2n}}{m^{2n+1}}+\frac{1}{m^{2n+1}}.$$

erhalten daher für die 4 entsprechenden geometrischen Reihen die mmtsumme:

$$=\frac{2}{m^2-4}-\frac{1}{m^2-1}-\frac{4}{m(m^2-4)}+\frac{1}{m(m^2-1)}=\frac{m^3-3m^2+2m}{m(m^2-1)(m^2-4)}$$
$$=\frac{m.m-1.m-2}{m(m^2-1)(m^2-4)}=\frac{1}{m+1.m+2},$$

ebenfalls $(mP{-}2)=\frac{1}{m+1.m+2}$.

Ganz auf ähnliche Weise lassen sich auch die Ausdrücke für $(mP{-}3)$, $-4)$.... aus der Formel (VI) entwickeln.

Ist m positiv, so hat es keinen wesentlichen Einfluss
die Gestalt der Kurve, ob es ganz oder gebrochen ist.

Ist m negativ ganz, so verwandelt sich die Kurve $y=(m$
in ein System von isolirten Punkten.

Ist m negativ gebrochen, so muss man einen Unterscl
machen, ob es zwischen 0 und -1, -2 und -3, -4 und
u. s. w. oder zwischen -1 und -2, -3 und -4 u. s. w. lie
Sowohl wenn m zwischen $-2n$ und $-(2n+1)$ (n positiv g
oder Null), als auch wenn es zwischen $-(2n+1)$ und $-(2n+$
liegt, nähert sich die Kurve auf der negativen Seite der ζ
ζ-Axe als Asymptote, im erstern Fall aber von oben, im zw
ten von unten her.

1) Ist m positiv ganz, so erhält man für die Kurve $y=(m$
vorerst feste Punkte, wenn man ζ successiv $=0, 1, 2, 3\ldots$
$\zeta=-1, -2, -3\ldots$ setzt. Es ist nämlich:

$$(mP0)=1,$$
$$(mP1)=m,$$
$$(mP2)=m.m-1,$$
$$\vdots$$
$$(mPm-1)=m.m-1.m-2\ldots.3.2,$$
$$(mPm)=m.m-1.m-2\ldots.3.2.1.$$

Wir sehen, dass von $\zeta=0$ bis $\zeta=m-1$ die Ordinat
zunehmen. Für $\zeta=m$ erhält man wieder dieselbe Ordinate
für $\zeta=m-1$. Es findet also zwischen $\zeta=m-1$ und $\zeta=$
ein Maximum der Ordinaten Statt.

Für $\zeta=m+1$ wird $(mPm+1)=0$; denn es ist allemal $(mP\zeta$
$=(m-\zeta)(mP\zeta)$, daher $(mPm+1)=(m-m)(mPm)=0$. Ebenso
für $\zeta=m+2$:

$$(mPm+2)=(m.m+1)(mPm+1)=0 \text{ u. s. w.}$$

Es nehmen also die Ordinaten $\zeta=m$ und $\zeta=m$
stetig ab und werden für $\zeta=m+1$ Null. Von da an schn
det die Kurve die ζ-Axe in unzählig vielen Punkt
die alle im Abstand Eins von einander stehen.

Für ganze Werthe von ζ, die kleiner als Null sind, erha
wir um so kleinere Brüche $((mP-1)=\frac{1}{m+1}$, $(mP-2)=\frac{1}{m+1.m+}$
je grösser der absolute Werth der negativen Abscisse ist.
$\zeta=-\infty$ wird $y=0$. Es ist also auf der negativen Se
der ζ die ζ-Axe Asymptote der Kurve.

Die Kurve $y=(mP\zeta)$ hat hiernach für m z. B. $=4$ die in Taf. III. Fig. 1. dargestellte Form:

$(4P0) = 1$

$(4P\frac{1}{2}) = 2{,}063\ 321\ 90$

$(4P1) = 4{,}000\ 000\ 00$

$(4P\frac{3}{2}) = 7{,}221\ 626\ 66 \{= \frac{7}{2}(4P\frac{1}{2})\}$

$(4P2) = 12{,}000\ 000\ 00$

$(4P\frac{5}{2}) = 18{,}054\ 066\ 6 \{= \frac{5}{2}(4P\frac{3}{2})\}$

$(4P3) = 24{,}000\ 000\ 00$

$(4P\frac{7}{2}) = 27{,}081\ 099\ 9 \{= \frac{3}{2}(4P\frac{5}{2})\}$

$(4P4) = 24{,}000\ 000\ 00$

$(4P\frac{9}{2}) = 13{,}540\ 549\ 9 \{= \frac{1}{2}(4P\frac{7}{2})\}$

$(4P5) = 0{,}000\ 000\ 00$

$(4P\frac{11}{2}) = -6{,}770\ 274\ 99 \{= -\frac{1}{2}(4P\frac{9}{2})\}$

$(4P6) = 0{,}000\ 000\ 00$

$(4P\frac{13}{2}) = +10{,}155\ 412\ 4 \{= -\frac{3}{2}(4P\frac{11}{2})\}$

$(4P7) = 0{,}000\ 000\ 00$

$(4P\frac{15}{2}) = -25{,}388\ 531\ 2 \{= -\frac{5}{2}(4P\frac{13}{2})\}$ u. s. w.

$(4P-\frac{1}{2}) = \frac{2}{9}(4P\frac{1}{2}) = 0{,}458\ 515\ 97$

$(4P-1) = \frac{1}{4+1} = 0{,}200\ 000\ 00$

$(4P-\frac{3}{2}) = \frac{2}{11}(4P-\frac{1}{2}) = 0{,}083\ 366\ 54$

$(4P-2) = \frac{1}{5.6} = 0{,}033\ 333\ 33$

$(4P-\frac{5}{2}) = \frac{2}{13}(4P-\frac{3}{2}) = 0{,}012\ 825\ 62$

u. s. w.

Kurve $y=(4P\zeta)$ siehe Taf. III. Fig. 1.

Je grösser m ist, um so mehr entfernen sich die Maxima und Minima auf der positiven Seite der ζ von der ζ-Axe, während auf der negativen Seite der ζ die asymptotische Annäherung der Kurve an die ζ-Axe um so stärker ist.

2) Ist $m=0$, so erhält man:

$$(0P\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}(1P\tfrac{1}{2}) = 0{,}564\ 189\ 58$$

$$(0P1) = 0{,}000\ 000\ 00$$

$$(0P\tfrac{3}{2}) = \frac{5.3.1.-1}{8.6.4.2}(4P\tfrac{3}{2}) = -0{,}282\ 094\ 79 \{= -\tfrac{1}{2}(0P\tfrac{1}{2})\}$$

$$(0P2) = 0{,}000\ 000\ 00$$

$$(0P\tfrac{5}{2}) = \frac{3.1.-1.-3}{8.6.4.2}(4P\tfrac{5}{2}) = 0{,}423\ 142\ 18 \{= -\tfrac{3}{2}(0P\tfrac{3}{2})\}$$

$$(0P3) = 0{,}000\ 000\ 00$$

u. s. w.

$(0P0) = 1$

$$(0P-\tfrac{1}{2}) = \frac{9.7.5.3}{8.6.4.2}(4P-\tfrac{1}{2}) = 1{,}128\ 379\ 16$$

$$(0P-1) = \frac{1}{0+1} = 1{,}000\ 000\ 00$$

$$(0P-\tfrac{3}{2}) = \frac{11.9.7.5}{8.6.4.2}(4P-\tfrac{3}{2}) = 0{,}752\ 252\ 77$$

$$(0P-2) = \frac{1}{1.2} = 0{,}500\ 000\ 00$$

$$(0P-\tfrac{5}{2}) = \frac{13.11.9.7}{8.6.4.2}(4P-\tfrac{5}{2}) = 0{,}300\ 901\ 10$$

u. s. w.

Kurve $y=(0P\zeta)$ s. Taf. III. Fig. 2.

Es beginnt also, wie Taf. III. Fig. 2. zeigt, bei der Kurve $y=(0P\zeta)$ das Hauptmaximum, welches für m ganz auf der positiven Seite der ζ liegt und beim Abnehmen von m stets kleiner

wird, auf die negative Seite zu rücken. Je mehr m sich dem Werthe -1 nähert, um so mehr erhebt sich wieder dieses Hauptmaximum auf der negativen Seite der ξ über die ξ-Axe, bei weiterem Verlaufe sich derselben asymptotisch nähernd, so dass immer zwischen diesem Hauptmaximum und dem negativ Unendlichen ein Wendungspunkt der Kurve liegt.

So erhält man für $y=(-\frac{9}{10}P\xi)$:

$$(-\tfrac{9}{10}P0)=1$$

$$(-\tfrac{9}{10}P\tfrac{1}{10})= 0{,}000\ 000$$

$$(-\tfrac{9}{10}P\tfrac{1}{2}) = -2{,}555\ 346$$

$$(-\tfrac{9}{10}P1) = -0{,}900\ 000$$

$$(-\tfrac{9}{10}P\tfrac{11}{10})= 0{,}000\ 000$$

$$(-\tfrac{9}{10}P\tfrac{3}{2}) = +3{,}577\ 485 \left\{=-\frac{14}{10}(-\tfrac{9}{10}P\tfrac{1}{2})\right\}$$

$$(-\tfrac{9}{10}P2) = +1{,}710\ 000 \left\{=-\frac{9}{10}\cdot\left(\frac{-9}{10}-1\right)\right\}$$

$$(-\tfrac{9}{10}P\tfrac{21}{10})= 0{,}000\ 000$$

$$(-\tfrac{9}{10}P\tfrac{5}{2}) = -8{,}585\ 965 \left\{=-\frac{24}{10}(-\tfrac{9}{10}P\tfrac{3}{2})\right\}$$

u. s. w.

$$(-\tfrac{9}{10}P-\tfrac{1}{2})= 6{,}388\ 367 \left\{=-\frac{10}{4}(-\tfrac{9}{10}P\tfrac{1}{2})\right\}$$

$$(-\tfrac{9}{10}P-1) = 10{,}000\ 000 \left\{=\frac{1}{1-\frac{9}{10}}\right\}$$

$$(-\tfrac{9}{10}P-\tfrac{3}{2})= 10{,}647\ 27 \left\{=\frac{10}{6}(-\tfrac{9}{10}P-\tfrac{1}{2})\right\}$$

$$(-\tfrac{9}{10}P-2)= 9{,}090\ 909 \left\{=\frac{1}{1-\frac{9}{10}}\cdot\frac{1}{2-\frac{9}{10}}\right\}$$

$$(-\tfrac{9}{10}P-\tfrac{5}{2})= 6{,}654\ 548 \left\{=\frac{10}{16}(-\tfrac{9}{10}P-\tfrac{3}{2})\right\}$$

$$(-\tfrac{9}{10}P-3)= 4{,}329\ 004 \left\{=\frac{1}{1-\frac{9}{10}}\cdot\frac{1}{2-\frac{9}{10}}\cdot\frac{1}{3-\frac{9}{10}}\right\}$$

u. s. w.

Kurve $y=(-\frac{9}{10}P\xi)$ s. Taf. III. Fig. 3.

3) Je mehr sich m dem Werthe -1 nähert, um so weiter entfernt sich das Hauptmaximum links von der ξ-Axe. Für $m=-1$ existirt dasselbe nicht mehr, sondern die Kurve $y=(-1P\xi)$ repräsentirt nur ein System isolirter Punkte, die abwechselnd auf der positiven und auf der negativen Seite der y liegen. Man hat nämlich:

$(-1P0)=1$ $\qquad$ $(-1P-1)=\frac{(-1P0)}{-1+1}=\frac{1}{0}=\infty$

$(-1P1)=-1$

$(-1P2)=-1.-2=1.2$ $\qquad$ $(-1P-2)=\frac{(-1P-1)}{-1+2}=\infty$

$(-1P3)=-1.-2.-3=-1.2.3$ $\qquad$ u. s. w.

u. s. w.

Gibt man in $y=(-1P\xi)$ dem ξ einen gebrochenen Werth, so erhält man stets imaginäre Ordinaten. Denn bezeichnen n und ξ' Zahlen, die prim zu einander sind, so ist $\left(0P\frac{n}{x'}\right)$ stets ein reeller endlicher Werth. Nun ist aber

$$(-1P\tfrac{n}{\xi'})=\frac{-\frac{n}{\xi'}}{-1+1}(0P\tfrac{n}{\xi'})=\frac{1}{0}(0P\tfrac{n}{\xi'})=\infty.$$

Die Kurve $y=(-1P\xi)$ hat also nur reelle Ordinaten für $\xi=0$, 1, 2, 3.... u. s. w. Siehe Taf. III. Fig. 4.

4) Welche Gestalt die Kurve $y=(mP\xi)$ für Werthe von m zwischen -1 und -2 annimmt, ergibt sich aus der graphischen Darstellung Taf. III. Fig. 5., 6. und 7. der folgenden drei Schemata, die Ordinaten der Kurven $y=(-\frac{11}{10}P\xi)$, $y=(-\frac{3}{2}P\xi)$ und $y=(-\frac{19}{10}P\xi)$ repräsentirend:

$$\left(\frac{-11}{10}P0\right)=1$$

$$\left(-\frac{11}{10}P\frac{9}{10}\right)=0{,}000\ 000$$

$$\left(-\frac{11}{10}P1\right)=-1{,}100\ 000$$

$$\left(-\frac{11}{10}P\frac{19}{10}\right)=0{,}000\ 000$$

$$\left(-\frac{11}{10}P2\right)=2{,}310\ 000\left(=\frac{-11.-21)}{10.10}\right)$$

$$\left(-\frac{11}{10}P\frac{29}{10}\right)=0{,}000\ 000$$

u. s. w.

$$\left(-\frac{11}{10}P-\frac{1}{10}\right)=0{,}000\ 000$$

$$\left(-\frac{11}{10}P-1\right)=-10{,}000\ 000\left\{=\frac{1}{1-\frac{11}{10}}\right\}$$

$$\left(-\frac{11}{10}P-2\right)=-11{,}111\ 111\left\{=\left(-\frac{11}{10}P-1\right).\frac{1}{2-\frac{11}{10}}\right\}$$

$$\left(-\frac{11}{10}P-3\right)=-5{,}847\ 953\left\{=\left(-\frac{11}{10}P-2\right).\frac{1}{3-\frac{11}{10}}\right\}$$

u. s. w.

S. Taf. III. Fig. 5.

$$\left(-\frac{3}{2}P0\right)=1$$

$$\left(-\frac{3}{2}P\frac{1}{2}\right)=0{,}000\ 000$$

$$\left(-\frac{3}{2}P1\right)=-1{,}500\,000$$

$$\left(-\frac{3}{2}P\frac{3}{2}\right)=0{,}000\ 000$$

$$\left(-\frac{3}{2}P2\right)=3{,}750\ 000\ \left\{=\frac{3.5}{2.2}\right\}$$

$$\left(-\frac{3}{2}P\frac{5}{2}\right)=0{,}000\,000$$

u. s. w.

$$\left(-\frac{3}{2}P-\frac{1}{2}\right)=\ 0{,}000\ 000$$

$$\left(-\frac{3}{2}P-1\right)=-2{,}000\ 000\ \left\{=\frac{1}{-\frac{3}{2}+1}\right\}$$

$$\left(-\frac{3}{2}P-\frac{3}{2}\right)=-3{,}544\ 907\ \left\{=\frac{1}{-\frac{3}{2}+1}\left(-\frac{1}{2}P-\frac{3}{2}\right)\right\}$$

$$\left(-\frac{3}{2}P-2\right)=-4{,}000\ 000\ \left\{=\frac{1}{-\frac{3}{2}+1}\cdot\frac{1}{-\frac{3}{2}+2}\right\}$$

$$\left(-\frac{3}{2}P-\frac{5}{2}\right)=-3{,}544\ 907\ \left\{=\left(-\frac{3}{2}P-\frac{3}{2}\right)\right\}$$

u. s. w.

S. Taf. III. Fig. 6.

$$\left(-\frac{19}{10}P1\right) = -1{,}9 \qquad \left(-\frac{19}{10}P0\right) = 1$$

$$\left(-\frac{19}{10}P2\right) = 5{,}51 \left\{= \frac{-19.-29}{10.10}\right\} \qquad \left(-\frac{19}{10}P-1\right) = -1{,}111\ 111 \left\{= -\frac{10}{9}\right\}$$

$$\left(-\frac{19}{10}P3\right) = -21{,}489 \left\{= \frac{-19.-29.-39}{10.10.10}\right\} \qquad \left(-\frac{19}{10}P-2\right) = -11{,}111\ 111 \left\{= \frac{-10.10}{9.1}\right\}$$

u. s. w. u. s. w.

S. Taf. III. Fig. 7.

Es liegt also, wenn m zwischen -1 und -2 liegt, das Hauptmaximum der Ordinaten auf der negativen Seite der y. Je mehr sich m in $y = (mP\zeta)$ den Gränzwerthen $m = -1$ und $m = -2$ nähert, um so mehr entfernt sich dieses Maximum von der ζ-Axe. Zwischen diesen Gränzwerthen erreicht dasselbe einmal einen kleinsten Werth. Der ζ-Axe nähert sich die Kurve von der negativen Seite der y asymptotisch.

5) Ist $m = -2$, so erhält man wieder, wie für $m = -1$, ein System von isolirten Punkten, die abwechselnd auf der negativen und positiven Seite der ζ-Axe liegen. Diese Punkte finden statt für

$$\zeta = -1;\ 0;\ +1;\ +2....$$ (Taf. III. Fig. 8.)

Für $\zeta=-2$ erhält man keine reelle Ordinate mehr, ebensowenig als für alle andere ganze negative und beliebige gebrochene Werthe von ζ.

6) Liegt m zwischen -2 und -3, so ergeben sich die Kurvenformen Taf. IV. Fig. 9., 10. und 11., den Kurven $y=(-\frac{21}{10}P\zeta)$, $y=(-\frac{5}{2}P\zeta)$, $y=(-\frac{29}{10}P\zeta)$ entsprechend.

Für $m=-3$ erhält man wieder ein System von isolirten Punkten u. s. w. Verallgemeinern wir den letzten Theil dieser Diskussion, so ergibt sich Folgendes:

1) Bezeichnet $\frac{m'}{m''}$ einen beliebigen positiven echten Bruchwerth und n eine positive ganze Zahl, so schneidet die Kurve: $y=(\frac{m'}{m''}-nP\zeta)$ die ζ-Axe ausser den Punkten auf der positiven ζ-Seite auf der Minusseite in $n-1$ Punkten, deren ζ successiv:

$$\frac{m'}{m''}-n+1,\ \frac{m'}{m''}-n+2,\ \ldots.\ \frac{m'}{m''}-n+(n-1)$$

sind. Aus dem Werthe:

$$\left(\frac{m'}{m''}-nP-n\right)=\frac{1}{\left(\frac{m'}{m''}-n+1\right)\left(\frac{m'}{m''}-n+2\right)\ldots\left(\frac{m'}{m''}-1\right)\frac{m'}{m''}},$$

resp. aus der Beschaffenheit der beiden letzten Faktoren des Nenners folgt, dass für ein bestimmtes n das Hauptmaximum der Ordinaten 2mal sich dem Unendlichen nähert, einmal wenn $\frac{m'}{m''}$ nahezu $=$ Eins und dann, wenn es nahe $=$ Null ist. Für zwischen 0 und 1 liegende Werthe von $\frac{m'}{m''}$ liegt das Hauptmaximum im Endlichen, für $\frac{m'}{m''}=0$ und $=1$ im Unendlichen, d. h. im letztern Fall hat die Kurve $y=\left(\frac{m'}{m''}-nP\zeta\right)$ für $\zeta=-n$ keine reellen Ordinaten mehr.

Gibt man im Ausdruck $y=\left(\frac{m'}{m''}-nP-\zeta\right)$ dem ζ einen ganzen positiven Zahlwerth $>n$ z. B. $\zeta=n+p$, wobei p eine ganze positive Zahl ist, so entsteht:

$$\left(\frac{m'}{m''}-nP-(n+p)\right)$$

$$\frac{1}{\left(\frac{m'}{m''}-n+1\right)\left(\frac{m'}{m''}-n+2\right)\ldots\ldots\frac{m'}{m''}\left(\frac{m'}{m''}+1\right)\left(\frac{m'}{m''}+2\right)\ldots\ldots\left(\frac{m'}{m''}+p\right)}.$$

Der Nenner dieses Ausdrucks besteht aus zwei Theilen, nämlich:

1) aus dem Produkt $\left(\frac{m'}{m''}-n+1\right)\ldots\ldots\frac{m'}{m''}$, welches für ungerade erthe von n, die >1 sind, positiv, für gerade Werthe von n, e >2 sind, negativ ausfällt; und

2) aus den Faktoren $\left(\frac{m'}{m''}+1\right)\ldots\ldots\left(\frac{m'}{m''}+p\right)$. Je grösser hierin ist, um so kleiner wird der Werth von $\left(\frac{m'}{m''}-nP-(n+p)\right)$.

Hieraus geht hervor, dass die ζ-Axe stets Asymptote r Kurve $y=\left(\frac{m'}{m''}-nP\zeta\right)$ ist, und dass für n ungerade d >1 die Kurve sich von der positiven Seite, für n rade und >2 von der negativen Seite derselben hert.

2) Ist in $y=(mP\zeta)$ m negativ ganz, so erhält man:

$$(-mP0)=1$$

d, nach der Formel $(mP\zeta)=(m-\zeta+1)(mP\zeta-1)$:

$$(-mP1)=(-m-1+1)(-mP0)=-m,$$
$$(-mP2)=(-m-2+1)(-mP1)=+m.m+1,$$
$$(-mP3)=-m.m+1.m+2, \text{ u. s. w.}$$

Die Kurve $y=(-mP\zeta)$ hat also reelle Punkte in Abständen von je Eins von $\zeta=0$ an bis ins Unendliche.

Auf der negativen Seite der ζ erhält man:

$$(-mP-1)=\frac{-(mP0)}{-m+1}=\frac{-1}{m-1},\quad (-mP-2)=\frac{(-mP-1)}{-m+2}$$
$$=\frac{+1}{m-1.m-2}\ldots.$$

rd endlich, indem man ζ successiv den ganzen Zahlen von -1 $-m$ gleich setzt, $\zeta=-(m-1)$, so ergibt sich:

$$(-mP-(m-1))=\frac{\pm 1}{m-1.m-2.m-3....(m-(m-1))}.$$

(Das positive Zeichen gilt für m ungerade, das negative für m gerade.)

Dagegen wird für $\zeta=-m$:

$$(-mP-m)=\frac{(-mP-(m-1))}{m-m}=\frac{\pm 1}{m-1.m-2....2.1.0}=\frac{\pm 1}{0},$$

erhält also einen unzulässigen Werth, so wie auch:

$$(-mP-(m+1))=\frac{\pm 1}{0},\ (-mP-(m+2))=\frac{\pm 1}{0},\ \text{u. s. w.}$$

Für ganze negative Werthe von ζ von $\zeta=-1$ an bi
$\zeta=-(m-1)$ hat also die Kurve $y=(-mP\zeta)$ ebenfalls reell
Ordinaten, darüber hinaus aber nicht mehr. Hiermi
ist aber die Anzahl der reellen Ordinaten dieser Kurve erschöpf
Denn für einen gebrochenen Werth von ζ, gleichviel o
positiv oder negativ, erhalten alle Ordinaten die Form $\frac{1}{0}$

Bezeichnen nämlich n und ζ' Zahlen, die prim zu einande
sind, so ist $(0P\frac{n}{x'})$ stets ein reeller endlicher Werth. Nun ist abe

$$(-1P\frac{n}{\zeta'})=\frac{-\frac{n}{\zeta'}}{-1+1}(0P\frac{n}{\zeta'})=\frac{1}{0}(0P\frac{n}{\zeta'})=\infty,$$

$$(-2P\frac{n}{\zeta'})=\frac{-1-\frac{n}{\zeta'}}{-2+1}\{-1P\frac{n}{\zeta'}\}=\infty,\ \text{u. s. w.}$$

Ebenso

$$(-1P-\frac{n}{\zeta'})=\frac{+\frac{n}{\zeta'}}{-1+1}(0P\frac{n}{\zeta'})=\frac{1}{0}(0P\frac{n}{\zeta'})=\infty,$$

$$(-2P\frac{n}{\zeta'})=\frac{-1+\frac{n}{\zeta'}}{-2+1}(-1P-\frac{n}{\zeta'})=\infty,\ \text{u. s. w.}$$

Ist also $-m$ eine negative ganze Zahl, so reduc
sich die Kurve $y=(-mP\zeta)$ auf ein System von isolirt
Punkten, von welchen auf der positiven Seite de
unendlich viele, auf der negativen Seite $(m-1)$ a
wechselnd auf der positiven und negativen Seite d
Ordinaten liegen.

Es bleibt uns nun noch zu diskutiren übrig die Funktion:

$$y = (\zeta P \zeta).\ ^*)$$

Dieselbe lässt sich zurückführen auf die schon oben betrachtete: $y = (0P\zeta)$, indem man hat:

$$(\zeta P \zeta) = \frac{1}{(0P-\zeta)}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass $(\zeta P\zeta)$ die Form $\frac{1}{0} = \pm\infty$ erhält ir $\zeta = -1, -2, -3, \ldots$. Das Zeichen des Werthes $\pm\infty$ hängt avon ab, von welcher Seite man sich den Abscissen $\zeta = -1$, $-2, -3 \ldots$ nähert.

Die Kurve $y = (\zeta P\zeta)$ hat daher von $\zeta = -1$ an nach der egativen Seite der ζ hin unzählig viele je im Abstand ins befindliche auf der ζ-Axe senkrecht stehende symptoten, an die sich die Aeste der Kurve abechselnd auf der positiven und negativen Seite der Axe anschliessen.

Da weiter die Kurve $y = (0P-\zeta)$ zwischen $\zeta = -1$ und $\zeta = -2$, vischen $\zeta = -3$ und $\zeta = -4$ u. s. w. negative, dagegen zwischen $= 0$ und $\zeta = -1$, zwischen $\zeta = -2$ und $\zeta = -3$ u. s. w. positive rdinatenmaxima besitzt, so folgt, dass die Kurve $y = (\zeta P\zeta)$ den betreffenden Fällen negative oder positive Minima der rdinaten besitzt.

Da endlich die beiderseitigen Maxima sich bei der Kurve $= (0P-\zeta)$ mit dem Grösserwerden des negativen ζ sich immer eiter von der ζ-Axe entfernen, so nähern sich die Minima er Kurve $y = (\zeta P\zeta)$ um so mehr der ζ-Axe, einen je rösseren negativen Werth ζ erhält.

Bei der Berechnung der Werthe von $(\zeta P\zeta)$ bedient man sich it Vortheil der auf dem Wege der Induktion unmittelbar sich gebenden Gleichung:

$$(\zeta+1\, P\, \zeta+1) = (\zeta+1)(\zeta P\zeta),$$

ie das folgende Schema zeigt:

---

*) Es bedarf keiner Erinnerung, dass die Funktion $(\zeta P\zeta)$ dieselbe ist, e man gewöhnlich mit $\zeta!$ (Ohm) oder $1^{\zeta|1}$ oder $\zeta^{\zeta|-1}$ bezeichnet.

$$(0P0) = 1{,}000\ 000\ 00$$

$$\left(\tfrac{1}{2}P\tfrac{1}{2}\right) = 0{,}886\ 226\ 91 \qquad \left(-\tfrac{1}{2}P-\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\left(\tfrac{1}{2}P\tfrac{1}{2}\right)}{1-\tfrac{1}{2}} = 1{,}772\ 453\ 82$$

$$(1P1) = 1{,}000\ 000\ 00$$

$$\left(\tfrac{3}{2}P\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{1}{2}P\tfrac{1}{2}\right) = 1{,}329\ 340\ 36 \qquad (-1P-1) = \frac{(0P0)}{1-1} = \pm\infty$$

$$(2P2) = 2.(1P1) = 2{,}000\ 000\ 00 \qquad \left(-\tfrac{3}{2}P-\tfrac{3}{2}\right) = \frac{\left(-\tfrac{1}{2}P-\tfrac{1}{2}\right)}{1-\tfrac{3}{2}} = -3{,}544\ 907\ 64$$

$$\left(\tfrac{5}{2}P\tfrac{5}{2}\right) = \tfrac{5}{2}\left(\tfrac{3}{2}P\tfrac{3}{2}\right) = 3{,}323\ 350\ 91$$

$$(3P3) = 3.(2P2) = 6{,}000\ 000\ 00 \qquad (-2P-2) = \frac{(-1P-1)}{-1} = \mp\infty$$

u. s. w. u. s. w.

Kurve $y = (\zeta P\zeta)$ s. Taf. IV. Fig. 12.

8) Anwendung der Ausdrücke $(mP\zeta)$, $(0P\zeta)$ und $(\zeta P\zeta)$ be Differentiiren und Integriren.

Wir haben bereits zu Anfang dieser Untersuchung nachgew sen, dass der Koefficient von $x^{m-\zeta}$ in dem Ausdruck des ζt Differentialquotienten von x^m, so lange ζ ganz, positiv oder gativ ist, mit der Funktion $(mP\zeta)$ übereinstimmt.

Es unterliegt nun keinem Zweifel, dass sich die ganzen (p sitiven oder negativen) Differentialquotienten von x^m auf unzäh viele Arten mit einander verbinden, d. h. Funktionen angeben l sen, die für $\zeta = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ die successiven Wer

$$\ldots, \frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)}, \frac{x^{m+1}}{m+1}, x^m, mx^{m-1}, m.m-1.x^{m-2},$$
$$m.m-1.m-2.x^{m-3}, \ldots.$$

nehmen; jedenfalls ist aber die Funktion $(mP\zeta)$ die einfachste, rch welche diese Interpolation vermittelt werden kann.

Diese Idee liegt der Verallgemeinerung zu Grunde, welche ch in der Formel (V):

$$\frac{\partial^\zeta f(x)}{\partial x^\zeta} = \frac{(0P\zeta)}{x^\zeta}\{f(x) + \frac{\zeta}{1}\frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{x}{1-\zeta} + \frac{\zeta.\zeta-1}{1.2}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \ldots.\}$$

sspricht, wenn man unter ζ nicht nur eine ganze (positive er negative), sondern eine beliebige ganze oder gebrochene hl versteht.

Da uns nun nach dem Vorhergehenden die Funktionen $(mP\zeta)$, $P\zeta)$, $(\zeta P\zeta)$ in ihren Eigenschaften vollständig bekannt sind und die Fälle nachgewiesen haben, in welchen man für diese nktionen Ausdrücke von der Form $\frac{1}{0} = \pm\infty$ erhält, so sind da- ch zugleich die Gränzen festgestellt, innerhalb deren man sich der Anwendung der Formel $\frac{\partial^\zeta(x^m)}{\partial x^\zeta} = (mP\zeta)x^{m-\zeta}$ zu bewegen hat.

Es ist hieraus klar, dass die Formel $\frac{\partial^\zeta(x^m)}{\partial x^\zeta} = (mP\zeta)\,x^{m-\zeta}$ ht zum Ziele führt in dem Fall:

$$\frac{\partial^{-1}(x^{-1})}{\partial x^{-1}} = (-1P-1)x^0 = \pm\infty \text{ und allgemein}$$

$$\frac{\partial^{-\zeta}(x^{-\zeta})}{\partial x^{-\zeta}} = (-\zeta P-\zeta)\,x^0 = \pm\infty.$$

lererseits wissen wir aber auch direkt, dass sich die Ent- kelung:

$$\frac{\partial^{-1}(x^{-1})}{\partial x^{-1}} = \int\frac{\partial x}{x} = \overset{e}{\log} x$$

t mehr in Einer Potenz von x zusammenfassen lässt. Ganz selbe gilt für:

$$\overset{e}{\log} x\,\partial x = \int\left(\int\frac{\partial x}{x}\right)\partial x = \frac{\partial^{-2}(x^{-1})}{\partial x^{-2}}\,[=(-1P-2)x^1 = \pm\infty];$$

iso:

$$\int(\int \log x \partial x).\partial x = \int\left(\int\left(\int \frac{\partial x}{x}\right)\partial x\right)\partial x$$

$$= \frac{\partial^{-3}(x^{-1})}{\partial x^{-3}} \; [=(-1P-3)x^2 = \pm\infty] \text{ u. s. w.}$$

Es findet also die Formel $\frac{\partial^\zeta(x^m)}{\partial x^\zeta} = (mP\zeta)x^{m-\zeta}$ überal
dann ihre Anwendung, wenn $(mP\zeta)$ nicht die Form $\frac{1}{0}$
erhält, oder wenn man durch Differentiation oder Inte
gration eines Ausdrucks von der Form $y=x^m$ nich
auf solche Funktionen geführt wird, die sich nich
mehr in Einer Potenz von x zusammenfassen lasse
Ist dagegen im letzteren Falle die Entwickelung der neuen Funk
tion nach Potenzen von x bekannt, so lässt sich deren allg
meiner Differentialquotient sofort angeben. Ist nämlich die g
gebene Funktion:

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots,$$

so ist der ζte Differentialquotient derselben:

$$\frac{\partial^\zeta y}{\partial x^\zeta} = a(0P\zeta)x^{0-\zeta} + b(1P\zeta)x^{1-\zeta} + c(2P\zeta)x^{2-\zeta} + d(3P\zeta)x^{3-\zeta} + \ldots,$$

oder da:

$$(1P\zeta) = \frac{(0P\zeta).1}{1-\zeta}, \quad (2P\zeta) = \frac{(0P\zeta)1.2}{1-\zeta.2-\zeta}, \quad (3P\zeta) = \frac{(0P\zeta)1.2.3}{1-\zeta.2-\zeta.3-\zeta} \text{ u. s.}$$

ist:

$$\frac{\partial^\zeta(y)}{\partial x^\zeta} = \frac{(0P\zeta)}{x^\zeta}\left\{a + \frac{1.b.x}{1-\zeta} + \frac{1.2.c.x^2}{1-\zeta.2-\zeta} + \frac{1.2.3.d.x^3}{1-\zeta.2-\zeta.3-\zeta} + \ldots\right\} \quad (XX$$

Diese Gleichung steht zu der bereits oben entwickelten Formel (

$$\frac{\partial^\zeta f(x)}{\partial x^\zeta} = \frac{(0P\zeta)}{x^\zeta}\left\{f(x) + \frac{\zeta}{1}\frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{x}{1-\zeta} + \frac{\zeta.\zeta-1}{1.2}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\frac{x^2}{1-\zeta.2-\zeta} + \right.$$

in einer ähnlichen Beziehung wie der Maklaurin'sche zum T
lor'schen Satz, was sich sogleich ergibt, wenn man statt a, b,
ihre Werthe

$$f(0x), \quad \frac{\partial f(0x)}{1.\partial x}, \quad \frac{1}{1.2}\frac{\partial^2 f(0x)}{\partial x^2}, \ldots$$

setzt. Man erhält nach diesen beiden Sätzen die folgenden
gemeinen Differentialformeln:-

$$\frac{\partial^\zeta(e^x)}{\partial x^\zeta}=\frac{(0P\zeta)}{x^\zeta}\left(1+\frac{x}{1-\zeta}+\frac{x^2}{1-\zeta,2-\zeta}+\ldots.\right)$$

$$=\frac{e^x(0P\zeta)}{x^\zeta}\left\{1+\frac{\zeta.x}{1-\zeta}-\frac{\zeta.x^2}{1.2.2-\zeta}+\frac{\zeta.x^3}{1.2.3.3-\zeta}-\ldots.\right\} \quad \text{(XXVII)}$$

$$\frac{\partial^\zeta(a^x)}{\partial x^\zeta}=\frac{(0P\zeta)}{x^\zeta}\left(1+\frac{x\overset{e}{\log}a}{1-\zeta}+\frac{x^2\overset{e}{\log}^2a}{1-\zeta.2-\zeta}+\ldots.\right)$$

$$=\frac{a^x(0P\zeta)}{x^\zeta}\left\{1+\zeta\frac{x\overset{e}{\log}a}{1-\zeta}-\frac{\zeta.x^2\overset{e}{\log}^2a}{1-\zeta.2-\zeta}+\frac{\zeta.x^3.\overset{e}{\log}^3a}{1-\zeta.2-\zeta.3-\zeta}-\ldots.\right\} \quad \text{(XXVIII)}$$

(XXIX)

$$\frac{\partial^\zeta(\sin x)}{\partial x^\zeta}=\frac{(0P\zeta)}{x^\zeta}\left(\frac{x}{1-\zeta}-\frac{x^3}{1-\zeta.2-\zeta.3-\zeta}+\frac{x^5}{1-\zeta.2-\zeta.3-\zeta.4-\zeta.5-\zeta}-\ldots\right)$$

$$=\frac{(0P\zeta)}{x^\zeta}\left\{\begin{array}{l}\sin x\left(1+\dfrac{\zeta.x^2}{1.2.2-\zeta}-\dfrac{\zeta.x^4}{1.2.3.4.4-\zeta}+\dfrac{\zeta.x^6}{1....6.6-\zeta}-\ldots.\right)\\ +\cos x\left(\dfrac{\zeta.x}{1-\zeta}-\dfrac{\zeta.x^3}{1.2.3.3-\zeta}+\dfrac{\zeta.x^5}{1....5.5-\zeta}-\ldots.\right)\end{array}\right\}$$

$$\frac{\partial^\zeta(\cos x)}{\partial x^\zeta}=\frac{(0P\zeta)}{x^\zeta}\left(1-\frac{x^2}{1-\zeta.2-\zeta}+\frac{x^4}{1-\zeta.2-\zeta.3-\zeta.4-\zeta}-\ldots.\right)$$

$$=\frac{(0P\zeta)}{x^\zeta}\left\{\begin{array}{l}\cos x\left(1+\dfrac{\zeta.x^2}{1.2.2-\zeta}-\dfrac{\zeta.x^4}{1....4.4-\zeta}+\ldots.\right)\\ -\sin x\left(\dfrac{\zeta.x}{1.1-\zeta}-\dfrac{\zeta.x^3}{1.2.3.3-\zeta}+\dfrac{\zeta.x^5}{1.2.3.4.5.5-\zeta}-\ldots\right)\end{array}\right\} \quad \text{(XXX)}$$

$$\frac{\partial^\zeta\overset{e}{\log}(x+1)}{\partial x^\zeta}=\frac{(0P\zeta)}{x^\zeta}\left\{\frac{x}{1-\zeta}-\frac{1.x^2}{1-\zeta.2-\zeta}+\frac{1.2.x^3}{1-\zeta.2-\zeta.3-\zeta}-\ldots.\right\}$$

$$=\frac{(0P\zeta)}{x^\zeta}\left\{\overset{e}{\log}(x+1)+\frac{\zeta}{1}\frac{1}{x+1}\cdot\frac{x}{1-\zeta}-\frac{\zeta.\zeta-1}{1.2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}\frac{x^2}{1-\zeta.2-\zeta}+\ldots.\right\}$$

der, wenn man nicht $\frac{\partial^\zeta(\overset{e}{\log}(x+1))}{\partial x^\zeta}$, sondern $\frac{\partial^\zeta(\overset{e}{\log}x)}{\partial x^\zeta}$ nach Formel (V) direkt entwickelt:

$$\frac{\partial^\zeta\overset{e}{(\log}x)}{\partial x^\zeta}=\frac{(0P\zeta)}{x^\zeta}\overset{e}{(\log}x+\zeta\left\{\frac{1}{1-\zeta}+\frac{1}{2.2-\zeta}+\frac{1}{3.3-\zeta}+\ldots.\right\}). \quad \text{(XXXI)}\ ^*)$$

*) Diese Gleichung drückt eine höchst merkwürdige Eigenschaft des natürlichen Logarithmus aus.

Ebenso:

$$\frac{\partial^{\zeta}\overset{a}{(\log x)}}{\partial x^{\zeta}}=\frac{(0P\zeta)}{x^{\zeta}}\left(\overset{a}{\log x}+\zeta\left\{\frac{1}{1-\zeta.\overset{e}{\log a}}+\frac{1}{2.2-\zeta.\overset{e}{\log^2 a}}+\ldots.\right\}\right).$$

(XXXII) *)

Für ganze negative Werthe von ζ kann man sich leicht durch unmittelbare Probe von der Richtigkeit derselben überzeugen. Es ist nämlich nach ihr:

$$\frac{\partial^{-1}\overset{e}{(\log x)}}{\partial x^{-1}}=x\left(\overset{e}{\log x}-\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots.\right)\right).$$

Es ist aber nach Gleichung (XX), wenn man dort $n=1$ setzt:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots.=1,$$

daher

$$\frac{\partial^{-1}\overset{e}{(\log x)}}{\partial x^{-1}}=x\left(\overset{e}{\log x}-1\right)=\int\overset{e}{\log x}\partial x.$$

Durch Differentiation hiervon erhält man wieder:

$$\frac{\partial\overset{e}{(x\log x-x)}}{\partial x}=\overset{e}{\log x}.$$

Ebenso nach Formel (XXX):

$$\frac{\partial^{-2}\overset{e}{(\log x)}}{\partial x^{-2}}=\frac{x^2}{1.2}\left(\overset{e}{\log x}-\left(\frac{2}{1.3}+\frac{2}{2.4}+\frac{2}{3.5}+\ldots.\right)\right).$$

Nach (XX) ergibt sich aber für $n=2$:

$$\frac{2}{1.3}+\frac{2}{2.4}+\frac{2}{3.5}+\ldots.=2-\frac{2}{2.1.2}=\frac{6}{4}.$$

Daher

$$\frac{\partial^{-2}\overset{e}{(\log x)}}{\partial x^{-2}}=\frac{x^2}{1.2}\left(\overset{e}{\log x}-\frac{6}{4}\right)=\int\left(\int\overset{e}{\log x}\partial x\right)\partial x.$$

Durch zweimaliges Differentiiren erhält man wirklich wieder:

$$\frac{\partial^2\left(\frac{x^2\log x}{2}-\frac{3}{4}x^2\right)}{\partial x^2}=\overset{e}{\log x}\text{ u. s. w.}$$

*) Bei diesen sämmtlichen Formeln gilt hinsichtlich des Werth von ζ nur die Beschränkung, dass er nie auf Ausdrücke von der Fo $\frac{1}{0}$ führen darf (s. oben).

Zu diesen Gleichungen, welche sich nach Anleitung der Formel (V) leicht beliebig vermehren lassen, kommen noch die bereits öfter angeführten Grundformeln:

$$1)\ \frac{\partial^\zeta(x^m)}{\partial x^\zeta} = (mP\zeta)x^{m-\zeta};\quad 2)\ \frac{\partial^\zeta(x^0)}{\partial x^\zeta} = \frac{\partial^\zeta(1)}{\partial x^\zeta} = (0P\zeta)x^{0-\zeta};$$

$$3)\ \frac{\partial^\zeta(x^\zeta)}{\partial x^\zeta} = (\zeta P\zeta).$$

Die zweite derselben drückt aus, dass von einer Konstanten nur die ganzen positiven Differentialquotienten = Null sind, alle übrigen aber nicht.

Die Gleichung 3) drückt für ganze positive Werthe von ζ eine aus den ersten Elementen des Differentiirens sich ergebende Wahrheit aus; hier aber wird sie auch auf gebrochene Werthe von ζ ausgedehnt. (Für ζ negativ ganz führt sie auf die Form $\pm\frac{1}{0}$, ist also für diesen Fall unzulässig.)

Zum Schluss der gegenwärtigen Arbeit bestimmen wir noch den allgemeinen Differentialkoefficienten des Trinoms $(A+Bx+Cx^2)^p$ in einer eleganteren Form, als ihn Gleichung (V) unmittelbar gibt. Nennen wir $A+Bx+Cx^2=y$, so ist $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ mit den darauf folgenden ganzen Differentialkoefficienten = Null und die durch ζmaliges Differentiiren von y^p entstehende Gleichung hat die Form:

Zuweilen ist jedoch die Form $\frac{1}{0}$ nur scheinbar. So werden in der Gleichung (V):

$$\frac{\partial^\zeta(f(x))}{\partial x^\zeta} = \frac{(0P\zeta)}{x^\zeta}\left(f(x)+\frac{\zeta}{1}\frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{x}{1-\zeta}+\frac{\zeta.\zeta-1}{1.2}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\frac{x^2}{1-\zeta.2-\zeta}+\ldots.\right),$$

wenn ζ positiv ganz $=n$ ist, die n ersten Werthe der Klammer wegen:

$$(0P\zeta) = 1-\zeta.2-\zeta.3-\zeta\ldots.(n-\zeta)\,(0P\zeta-n)$$

alle $=0$ und der $(n+1)$te Theilsatz erhält nicht die Form $\frac{1}{0}$, weil sich das Produkt $1-\zeta\ldots.n-\zeta$ im Zähler und Nenner streicht. Die folgenden Glieder vom $(n+2)$ten an werden Null, so dass übrig bleibt:

$$\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} = \frac{n\ldots.1}{1\ldots.n}\frac{x^n}{x^n}\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n},$$

wie sich schon von selbst versteht.

$$1)\quad \frac{\partial^\zeta (y^p)}{\partial x^\zeta} = (pP\zeta) y^{p-\zeta} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^\zeta$$

$$+ (a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2)\,(pP\zeta - 1)\, y^{p-\zeta+1} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\zeta-2} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^1$$

$$+ (b_0 + b_1\zeta + b_2\zeta^2 + b_3\zeta^3 + b_4\zeta^4)\,(pP\zeta - 2)\, y^{p-\zeta+2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\zeta-4} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 + \ldots$$

Differentiirt man y^p unmittelbar $(\zeta+1)$mal, so wird ebenso:

$$2)\quad \frac{\partial^{\zeta+1}(y^p)}{\partial x^{\zeta+1}} = (pP\zeta + 1) y^{p-\zeta+1} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\zeta+1}$$

$$+ (a_0 + a_1(\zeta+1) + a_2(\zeta+1)^2)\,(pP\zeta) y^{p-\zeta} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\zeta-1} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$+ (b_0 + b_1(\zeta+1) + b_2(\zeta+1)^2 + b_3(\zeta+1)^3 + b_4(\zeta+1)^4)\,(pP\zeta - 1) y^{p-\zeta+1} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\zeta-3} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 + \ldots$$

Dasselbe muss man erhalten, wenn man die Gleichung 1) einmal differentiirt, nämlich:

$$3)\quad \frac{\partial^{\zeta+1}(y^p)}{\partial x^{\zeta+1}} = (pP\zeta + 1) y^{p-\zeta-1} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\zeta+1} + \left\{ \begin{array}{l} (pP\zeta) y^{p-\zeta} . \zeta \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\zeta-1} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\ (pP\zeta) y^{p-\zeta} (a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2) \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\zeta-1} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \end{array} \right\}$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} (\zeta-2)\,(pP\zeta - 1) y^{p-\zeta+1} (a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2) \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\zeta-3} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 \\ + (b_0 + b_1\zeta + b_2\zeta^2 + b_3\zeta^3 + b_4\zeta^4)\,(pP\zeta - 1) y^{p-\zeta+1} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\zeta-3} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 \end{array} \right\} + \ldots,$$

wobei wieder wegen $y = A + Bx + Cx^2$ die höheren Differentialquotienten von dem 3ten an = Null gesetzt werden.

Daher erhält man mit Gleichsetzung der in 2) und 3) mit ei
ander korrespondirenden Werthe:

$$a_0+a_1(\zeta+1)+a_2(\zeta+1)^2=\zeta+a_0+a_1\zeta+a_2\zeta^2,$$

$$b_0+b_1(\zeta+1)+b_2(\zeta+1)^2+b_3(\zeta+1)^3+b_4(\zeta+1)^4=(\zeta-2)(a_0+a_1\zeta+a_2\zeta^2)$$
$$+b_0+b_1\zeta+b_2\zeta^2+b_3\zeta^3+b_4\zeta^4,$$

$$c_0+c_1(\zeta+1)+c_2(\zeta+1)^2+c_3(\zeta+1)^3+c_4(\zeta+1)^4+c_5(\zeta+1)^5+c_6(\zeta+1)^6$$
$$=(\zeta-4)(b_0+b_1\zeta+b_2\zeta^2+b_3\zeta^3+b_4\zeta^4)$$
$$+c_0+c_1\zeta+c_2\zeta^2+c_3\zeta^3+c_4\zeta^4+c_5\zeta^5+c_6\zeta^6,$$

u. s. w.

woraus folgt:

$$a_1=-\frac{1}{2},\ a_2=+\frac{1}{2};$$

$$b_1=-\frac{3}{4},\ b_2=\frac{11}{8},\ b_3=-\frac{3}{4},\ b_4=+\frac{1}{8};$$

$$c_1=-\frac{5}{2},\ c_2=\frac{137}{24},\ c_3=-\frac{225}{48},\ c_4=\frac{85}{48},\ c_5=-\frac{5}{16},\ c_6=\frac{1}{48};\ \text{u.s.w.}$$

Es lässt sich weiter folgern, dass $a_0=b_0=c_0=\ldots=0$ sein müssen. Man hat demnach:

$$4)\ \frac{\partial^\zeta(y^p)}{\partial x^\zeta}=(pP\zeta)y^{p-\zeta}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^\zeta+(-\frac{1}{2}\zeta+\frac{1}{2}\zeta^2)(pP\zeta-1)y^{p-\zeta+1}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\zeta-2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$
$$+(-\frac{3}{4}\zeta+\frac{11}{8}\zeta^2-\frac{3}{4}\zeta^3+\frac{1}{8}\zeta^4)(pP\zeta-2)y^{p-\zeta+2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\zeta-4}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2$$
$$+(-\frac{5}{2}\zeta+\frac{137}{24}\zeta^2-\frac{225}{48}\zeta^3+\frac{85}{48}\zeta^4$$
$$-\frac{5}{16}\zeta^5+\frac{1}{48}\zeta^6)(pP\zeta-3)y^{p-\zeta+3}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\zeta-6}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^3+\ldots.$$

Es lässt sich nun durch Schlüsse, die denen ähnlich sind, die zu dem Bildungsgesetz der Koefficienten in Formel (I) geführt haben, nachweisen, dass die successiven Klammerausdrücke:

$$(-\frac{1}{2}\zeta+\frac{1}{2}\zeta^2),\ (-\frac{3}{4}\zeta+\frac{11}{8}\zeta^2-\frac{3}{4}\zeta^3+\frac{1}{8}\zeta^4),\ldots$$

successiv die Werthe 0 und 1; 0, 1, 2 und 3; u. s. w. zu Wurzeln haben müssen, wodurch die Gleichung 4) folgende Gestalt annimmt:

$$\frac{\partial^\zeta (A+Bx+Cx^2)^p}{\partial x^\zeta} = (pP^\zeta)\left\{\begin{array}{l}(A+Bx+Cx^2)^{p-\zeta}(B+2Cx)^\zeta + \frac{1}{2}\frac{\zeta.\zeta-1}{p-\zeta+1}(A+Bx+Cx^2)^{p-\zeta+1}(B+2Cx)^{\zeta-2}.2C \\ + \frac{1}{2.4}\frac{\zeta.\zeta-1.\zeta-2.\zeta-3}{p-\zeta+1.p-\zeta+2}(A+Bx+Cx^2)^{p-\zeta+2}(B+2Cx)^{\zeta-4}(2C)^2 \\ + \frac{1}{2.4.6}\frac{\zeta.\zeta-1.\zeta-2.\zeta-3.\zeta-4.\zeta-5}{p-\zeta+1.p-\zeta+2.p-\zeta+3}(A+Bx+Cx^2)^{p-\zeta+3}(B+2Cx)^{\zeta-6}(2C)^3+....\end{array}\right\}. \quad \text{(XXXIII) *)}$$

*) Ist ζ positiv ganz, so besteht der Klammerausdruck in Gleich. (XXXIII) stets aus einer endlichen Gliederanzahl. Für alle gebrochenen Werthe von ζ erhält man für $\frac{\partial^\zeta (A+Bx+Cx^2)^p}{\partial x^\zeta}$ unendliche Reihen. Ist p negativ ganz, z. B. $=-\mathfrak{a}$, und ζ negativ ganz und $< p$, z. B. $=-(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$, so wird dann die Reihe (XXXIII) wegen des unzulässigen Faktors $\{-\mathfrak{a}P-(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\}$ nicht mehr anwendbar.

Die Reihe (XXXIII) ist übrigens, sofern sie nicht schon an einem gewissen Gliede abbricht, konvergent, wenn der Werth $(A+Bx+Cx^2)(B+2Cx)^2(2C)$, der den halben Quotienten des $(n+1)$ten und $n$ten Gliedes für $n\infty$ ausdrückt, $<\frac{1}{2}$ und $>-\frac{1}{2}$ ist.

Ist p negativ ganz und ζ ebenfalls und $<p$, so gibt man der Formel (XXXIII) eine andere Form, die sich ergibt, wenn man in Gleichung (V):

$$f(x)=y^p=(A+Bx+Cx^2)^p,\quad \frac{\partial y}{\partial x}=B+2Cx,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=2C$$

setzt. Man erhält so:

$$\frac{\partial^\zeta (y^p)}{\partial x^\zeta}=\frac{(0P\zeta)}{x^\zeta}\{y^p+\frac{\zeta}{1}\frac{\partial (y^p)}{\partial x}\frac{x}{1-\zeta}+\frac{\zeta.\zeta-1}{1.2}\frac{\partial^2(y^p)}{\partial x^2}\frac{x^2}{1-\zeta.2-\zeta}+\ldots\}.$$

Diese successiven Differentialkoefficienten von y^p gibt aber Gleichung (XXXIII), so dass diese Gleichung folgende Gestalt annimmt:

$$\frac{\partial^\zeta (A+Bx+Cx^2)^p}{\partial x^\zeta}$$

$$=\frac{(0P\zeta)}{x^\zeta}\left\{\begin{array}{l}(A+Bx+Cx^2)^p+\frac{\zeta}{1}[(pP1)(A+Bx+Cx^2)^{p-1}(B+2Cx)]\frac{x}{1-\zeta}\\ +\frac{\zeta.\zeta-1}{1.2}[(pP2)(A+Bx+Cx^2)^{p-2}(B+2Cx)^2+\frac{1}{2}2.1(pP1)(A+Bx+Cx^2)^{p-1}2C]\frac{x^2}{1-\zeta.2-\zeta}\\ +\frac{\zeta.\zeta-1.\zeta-2}{1.2.3}[(pP3)(A+Bx+Cx^2)^{p-3}(B+2Cx)^3+\frac{1}{2}3.2(pP2)(A+Bx+Cx^2)^{p-2}(B+2Cx)2C]\frac{x^3}{1-\zeta.2-\zeta.3-\zeta}\\ +\frac{\zeta.\zeta-1.\zeta-2.\zeta-3}{1.2.3.4}\Big[(pP4)(A+Bx+Cx^2)^{p-4}(B+2Cx)^4+\frac{1}{2}.4.3(pP3)(A+Bx+Cx^2)^{p-3}(B+2Cx)2C\\ +\frac{1}{2.4}.4.3.2.1(pP2)(A+Bx+Cx^2)^{p-2}(2C)^2\Big]\frac{x^4}{1-\zeta.2-\zeta.3-\zeta.4-\zeta}\end{array}\right\}\quad\text{(XXXIV)}$$

Diese Reihe ist dann anwendbar, wenn ζ negativ ganz ist; nur giebt sie dann stets unendliche Reihen.

Ist ζ positiv ganz, z. B. $=\alpha$, so ist

$$(0P\alpha) = \frac{1-\alpha}{1} \cdot \frac{2-\alpha}{2} \cdots \frac{\alpha-\alpha}{\alpha} (\alpha P\alpha),$$

und es streicht sich $(1-\alpha) \ldots (\alpha-\alpha)$ gegen dasselbe Produkt im Nenner des $(\alpha+1)$ten Gliedes der Klammer, so dass übrig bleibt

$$\frac{\partial^\alpha (A+Bx+Cx^2)^p}{\partial x^\alpha}$$

$$= \frac{\alpha.\alpha-1 \ldots (\alpha-\alpha+1)}{1 \ldots \alpha} (pP\alpha)[(A+Bx+Cx^2)^{p-\alpha}(B+2Cx)^\alpha + \frac{1}{2}\frac{\alpha.\alpha-1}{p-\alpha+1} \cdots$$

was Gleichung (XXXIII) unmittelbar gibt.

Ist p positiv ganz, so bricht Gleichung (XXXIV) an einem bestimmten Gliede ab.

Auch eine dem Taylor'schen Satze analoge allgemeine Differentiirformel kann man bei unmittelbarer Anwendung der Formel (V) auf denselben entwickeln.

Die Ausführung dieser Entwickelung würde die Gränzen dieses Aufsatzes überschreiten, weshalb hier nur das Resultat derselben folgt:

$$\frac{\partial^\zeta f(x+h)}{\partial x^\zeta} = \frac{(0P\zeta)}{x^\zeta} \left\{ \begin{array}{l} f(x)\left[1-\frac{\zeta}{x}h+\frac{\zeta.\zeta+1}{x^2}\frac{h^2}{1.2}-\frac{\zeta.\zeta+1.\zeta+2}{x^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\ldots.\right] \\ +\frac{\partial f(x)}{\partial x}\left[\frac{\zeta}{1}\frac{x}{1-\zeta}+\frac{\zeta+1}{1}h-\frac{\zeta+2}{1}\frac{\zeta}{x}\frac{h^2}{1.2}+\frac{\zeta+3}{1}\frac{\zeta.\zeta+1}{x^2}\frac{h^3}{1.2.3}-\ldots.\right] \\ +\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\left[\frac{\zeta.\zeta-1}{1.2}\frac{x^2}{1-\zeta.2-\zeta}+\frac{\zeta+1.\zeta}{1.2}.\frac{x}{1-\zeta}h+\frac{\zeta+2.\zeta+1}{1.2}\frac{h^2}{1.2}-\frac{\zeta+3.\zeta+2}{1.2}\frac{\zeta}{x}\frac{h^3}{1.2.3}+\ldots.\right] \\ +\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3}\left[\frac{\zeta.\zeta-1.\zeta-2}{1.2.3}\frac{x^3}{1-\zeta.2-\zeta.3-\zeta}+\frac{\zeta+1.\zeta.\zeta-1}{1.2.3}\frac{x^2}{1-\zeta.2-\zeta}h+\frac{\zeta+2.\zeta+1.\zeta}{1.2.3}\frac{x}{1-\zeta}\frac{h^2}{1.2}\right. \\ \qquad\left.+\frac{\zeta+3.\zeta+2.\zeta+1}{1.2.3}.\frac{h^3}{1.2.3}-\frac{\zeta+4.\zeta+3.\zeta+2}{1.2.3}\frac{\zeta}{x}\frac{h^4}{1.2.3.4}+\ldots.\right] \\ +\frac{\partial^4 f(x)}{\partial x^4}[\ldots.]+\ldots. \end{array} \right\} \text{(XXXV)}$$

Für $\zeta=0$ verwandelt sich diese Formel wieder in die Taylor'sche, für $\zeta=-1$ und $h=0$ in die Bernoulli'sche.

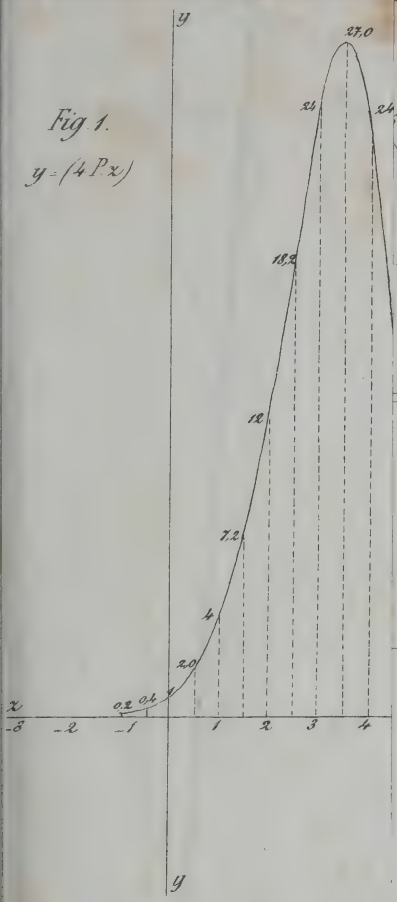


Fig. 1.
y = (4 Px)
y
x
27,0
24
24
18,2
12
7,2
4
2,0
0,2
0,4
-3
-2
-1
1
2
3
4

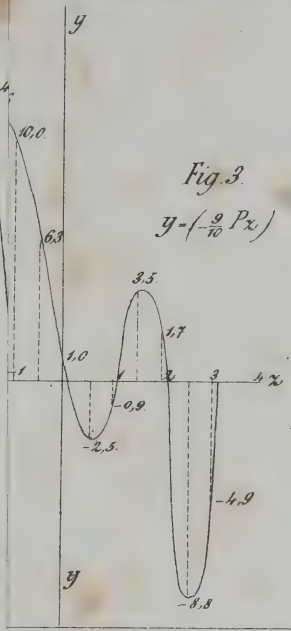


Fig. 3.
y = (-9/10 Px)
y
10,0
6,3
3,5
1,7
1,0
-0,9
-2,5
-4,9
-8,8
1
2
3
4 x

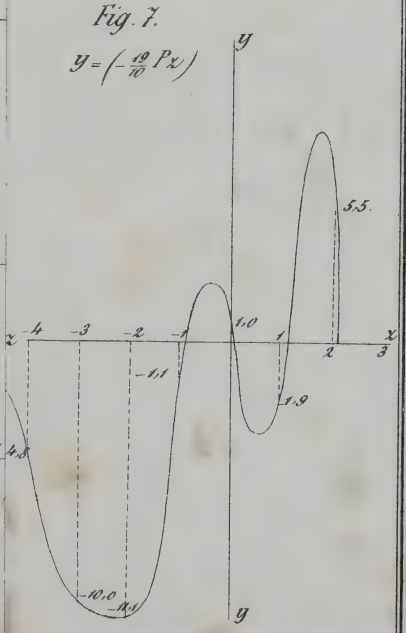


Fig. 7.
y = (-19/10 Px)
y
5,5
1,0
-1,1
-1,9
-4,3
-10,0
-13,1
-4
-3
-2
-1
1
2
3
x

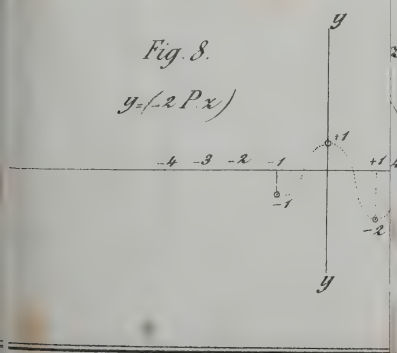


Fig. 8.
y = (-2 Px)
y
+1
-4
-3
-2
-1
+1
-1
-2

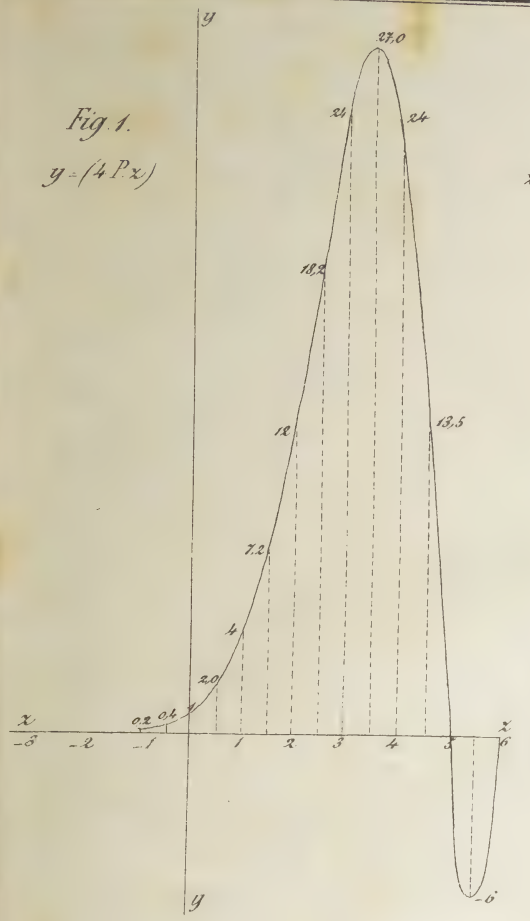


Fig. 1.
y = (4 Px)
27,0
24
24
18,2
13,5
12
7,2
4
2,0
0,2
0,4
-6

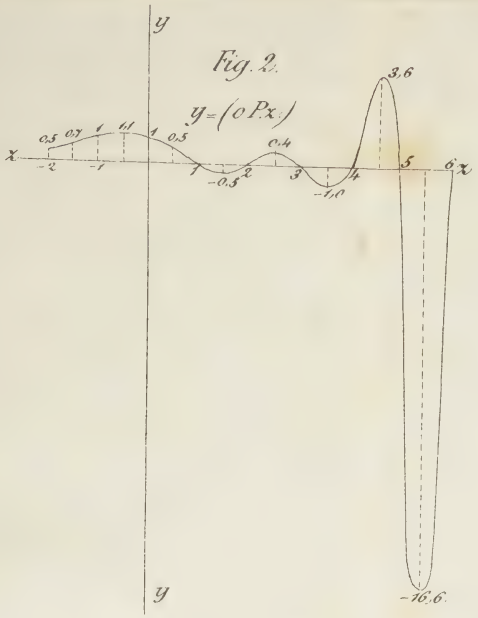


Fig. 2.
y = (0 Px)
3,6
0,5
0,7
1
1,1
0,5
0,4
-0,5
-1,0
-16,6

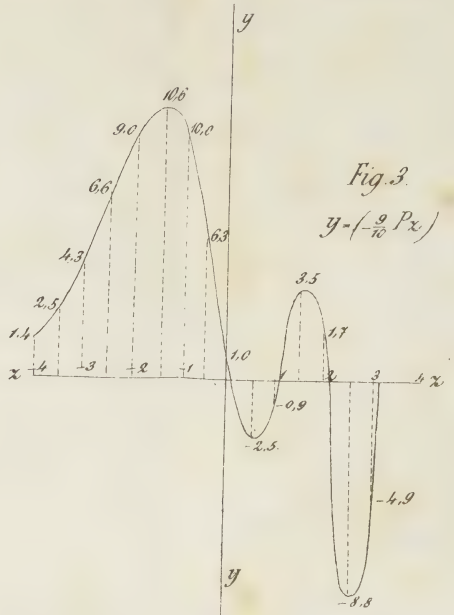


Fig. 3.
y = (-2/10 Px)
10,6
9,0
10,0
6,6
6,3
4,3
3,5
2,5
1,7
1,4
1,0
-0,9
-2,5
-4,9
-3,8

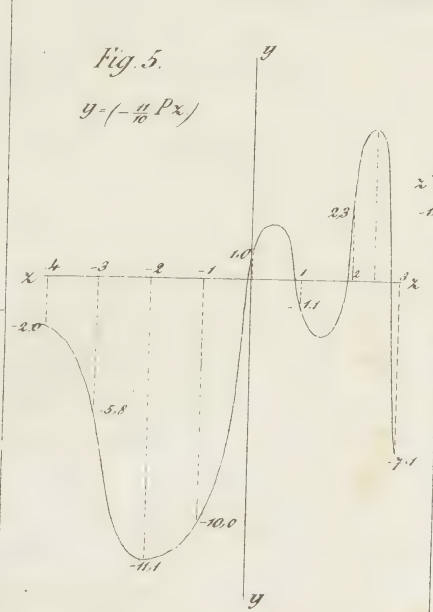


Fig. 5.
y = (-11/10 Px)
2,3
1,0
-1,1
-2,0
-5,8
-10,0
-11,1
-7,1

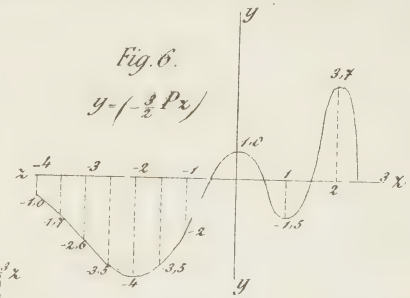


Fig. 6.
y = (-3/2 Px)
3,7
1,0
-1,0
-1,7
-2,6
-3,3
-4
-3,5
-1,5

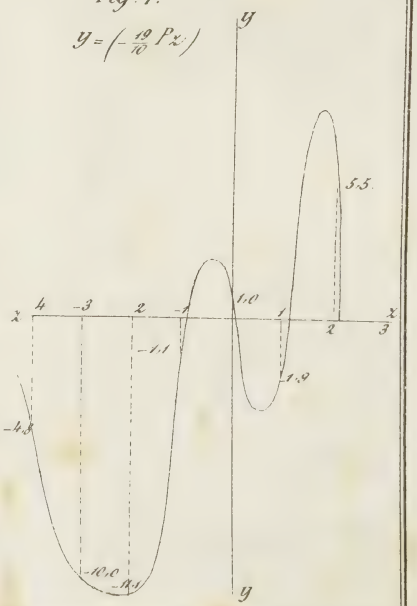


Fig. 7.
y = (-12/10 Px)
5,5
1,0
-1,1
1,9
-4,3
-10,0
-8,1

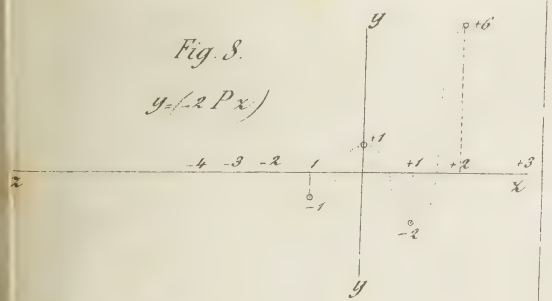


Fig. 8.
y = (-2 Px)
+6
+1
-1
-2

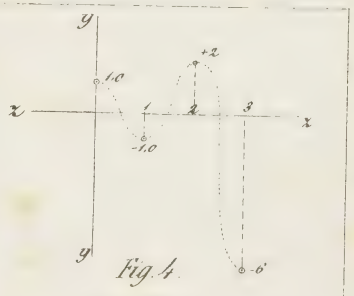


Fig. 4.
y = (1 Px)
+2
1,0
-1,0
-6

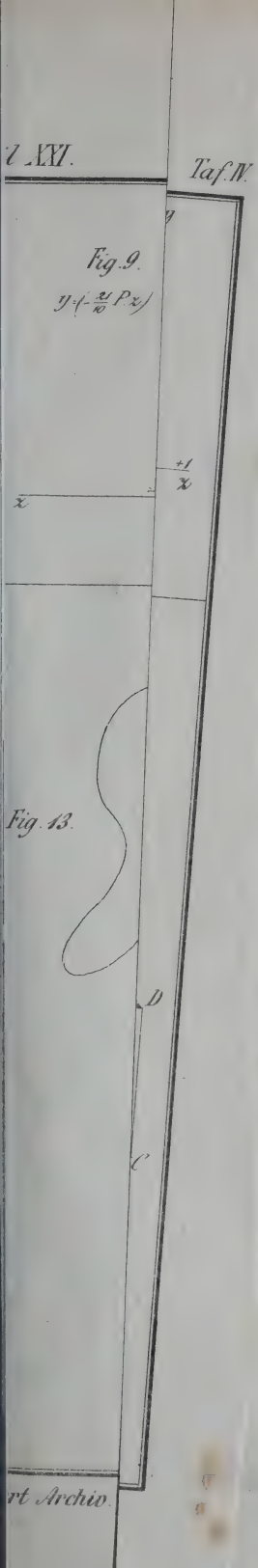

l XXI.
Taf. IV.
Fig. 9.
y=(-21/10 P.z)
+1
z
z
Fig. 13.
D
C
rt Archiv.

Fig. 9.

$y = (-\frac{21}{10} P z)$

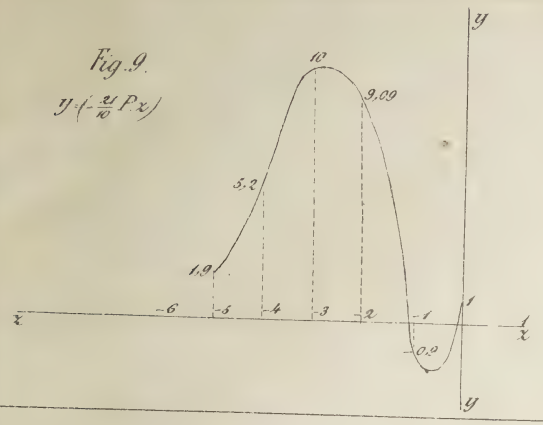


Fig. 10.

$y = (-\frac{3}{x} P x)$

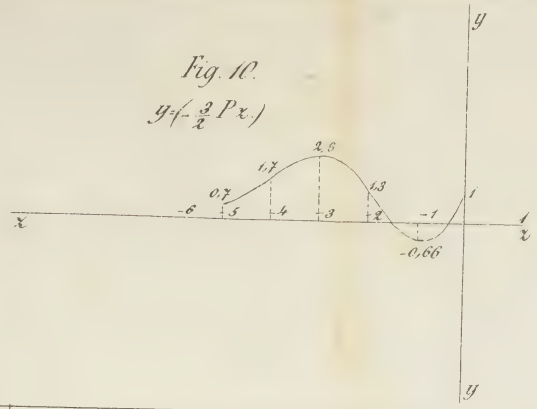


Fig. 11.

$y = (-\frac{29}{10} P z)$

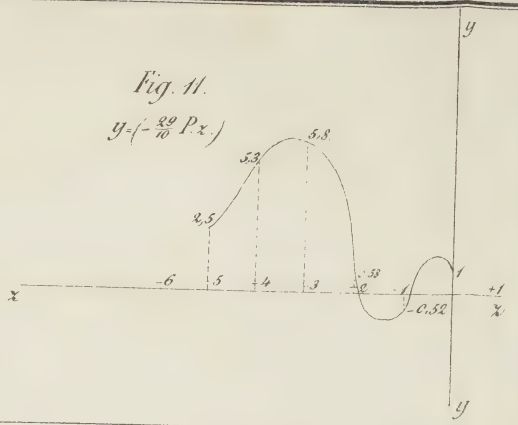
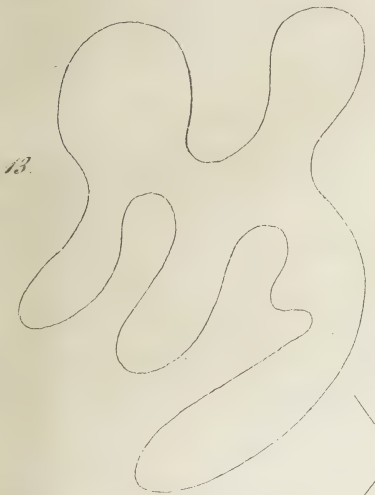


Fig. 13.



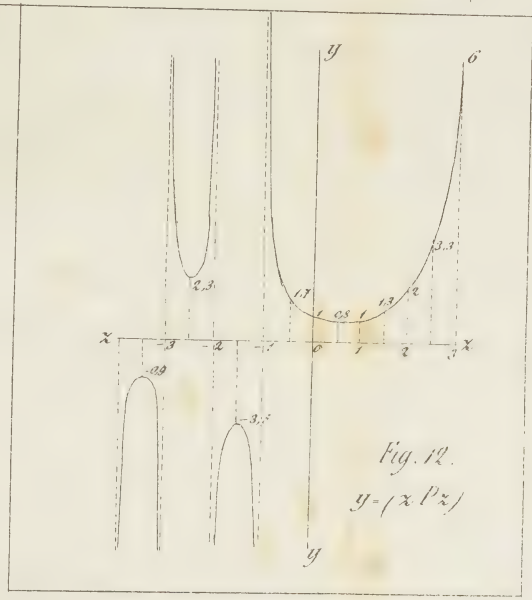


Fig. 12.

$y = (x P z)$

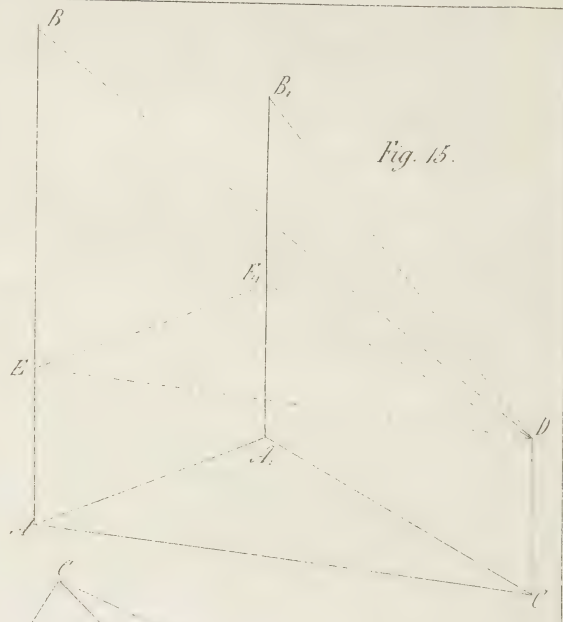


Fig. 15.

Fig. 14.

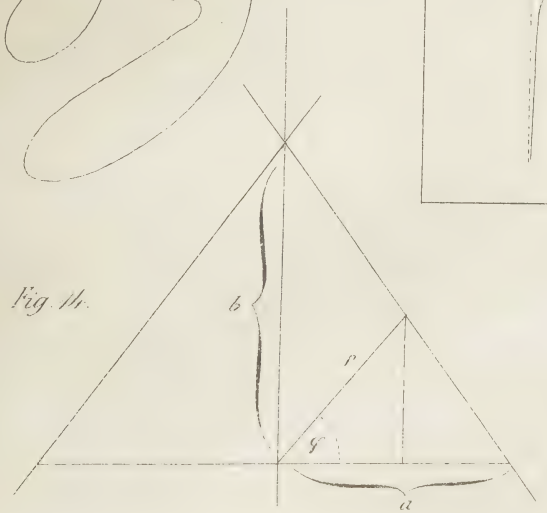
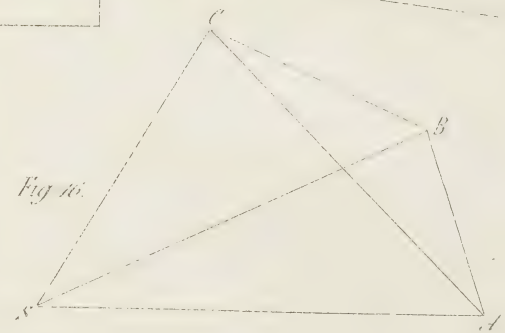


Fig. 16.



Über die Permutationszahlen (Faktoriellen mit der Differenz Eins) und ihre Anwendung aufs Differentiiren und Integriren.

von

Dr. Wilhelm Langsdorff.

---

1. Allgemeiner Begriff des Differentiirens.

Der z^{te} Differentialquotient einer beliebigen Funktion wird repräsentirt durch eine Curve, deren Gleichung ist:

$$y = \frac{\partial^z f(x)}{\partial x^z}.$$

Diese Curve hat ihre Schnittpunkte mit der x-Axe da, wo die dem $(z-1)^{ten}$ Differentialquotienten entsprechende Curve

$$y = \frac{\partial^{z-1} f(x)}{\partial x^{z-1}}$$

ihre Maxima oder Minima besitzt. Ganz dieselbe Beziehung findet zwischen je zwei beliebigen successiven Differentialquotienten = Curven statt.

Gewöhnlich versteht man unter dem Index z des Differentialquotienten $\frac{\partial^z f(x)}{\partial x^z}$ nur eine positive ganze Zahl. Fasst man aber den Begriff desselben allgemeiner auf, so ergibt sich sofort die Berechtigung folgender Bezeichnungen:

$$\frac{\partial^{-1} f(x)}{\partial x^{-1}} = \int f(x)\,\partial x$$

$$\frac{\partial^{-2} f(x)}{\partial x^{-2}} = \int\left(\int f(x)\,\partial x\right)\partial x, \text{ u. s. w.}$$

so dass man also das z^{te} Integral als das $-z^{te}$ Differential betrachtet.

Der Uebergang vom z^{ten} zum $(z+1)^{ten}$ und $(z-1)^{ten}$ Differentialquotienten geschieht nicht plötzlich, sondern stetig durch Vermittlung von Functionen, welche als gebrochene Differentialquotienten derselben sind. Diese können nun ebenfalls positiv oder negativ sein. Im letzteren Falle haben wir es mit einer Function zu thun, die das Mittelglied zwischen zwei auf einander folgenden ganzen Integralen bildet.

Dadurch dass man in $y = \frac{\partial^z f(x)}{\partial x^z}$ z ganz allgemein wählt, positiv oder negativ, ganz oder gebrochen nimmt, ist man in Stand gesetzt, Differentiiren und Integriren unter dem selben Gesichtspunkte aufzufassen, so dass man in den auf diesem Princip aufgestellten Differentialformeln blos $z = -1$ zu setzen braucht, um das Integral der betreffenden Function zu erhalten.

Da die Potenz x^m für alle anderen Functionen den Uebergangspunkt bildet, kann man alle Functionen sich beliebig differentiiren lassen, wenn man das allgemeine, z. B. z^{te}, Diffe-

rential

zunächst von x^m kennt, so wollen wir diesen zunächst bestimmen.

Der z^{te} Differentialquotient von x^m:

$$\frac{\partial^z (x^m)}{\partial x^z} = m.\,m-1 \ldots\ldots m-z+1.\, x^{m-z} \qquad (\mathrm{I})$$

besteht außer der Potenz x^{m-z}, welche für jeden beliebigen reellen Werth von z zulässig ist, noch aus dem Produkt:

$$m.\,m-1 \ldots\ldots m-z+1,$$

welches die Anzahl der Permutationen von m Elementen zu je z ausdrückt, und das wir daher mit $(m\,P\,z)$ (m Größen permutirt zu je z) bezeichnen wollen.

Ist z positiv ganz, so ist das Produkt $(m\,P\,z)$ gegeben, nicht aber, wenn z beliebig positiv oder negativ ist, d. h. das Produkt

$$m.\,m-1 \ldots\ldots m-z+1$$

ist ein specieller Fall einer Funktion, welche für $z = 1, 2, 3 \ldots$ die respektiven Werthe:

$$m,\ m.\,m-1,\ m.\,m-1.\,m-2,\ \text{u. s. w.}$$

annimmt.

Die Eigenschaften dieser Funktion lassen sich leicht a priori angeben.

Da wir nämlich das Produkt

$$m.\,m-1 \ldots m-z+1 = (m\,P\,z)$$

auch schreiben können:

$$(m.\,m-1 \ldots m-z+2)(m-z+1) = (m\,P\,z-1)(m-z+1)$$

so ergibt sich sofort:

$$(m\,P\,z) = (m-z+1)(m\,P\,z-1). \qquad (\mathrm{II})$$

ebenso ist:

$$m.\,m-1 \ldots m-z+1 = m(m-1 \ldots m-z+1)$$

d. h.

$$(m\,P\,z) = m(m-1\,P\,z-1)$$

oder, da (auf (II))

$$(m\,P\,z) = (m-z+1)(m\,P\,z-1)$$

ist,

$$(m\,P\,z-1) = \frac{m}{m-z+1}(m-1\,P\,z-1). \qquad (\mathrm{III})$$

Die Formel (II) gibt für $z = 1, 0, -1, -2, \ldots$:

$$(m\,P_1) = m,\ (m\,P_0) = 1,\ (m\,P-1) = \frac{1}{m+1},$$

$$(m\,P-2) = \frac{1}{(m+1)(m+2)},\ \text{u. s. w.},$$

Aus Formel (III) folgen wir für $m = 1$:

$$(0\,P\,z-1) = \frac{2-z}{1}(1\,P\,z-1)$$

oder:

$$(0\,P\,z = \frac{1-z}{1}(1\,P\,z) = \frac{1-z.\,2-z}{1.\,2}(2\,P\,z) = \text{u. s. w.},$$

Mit Anwendung dieser eigenschaften der Funktion $(m\,P\,z)$ auf Gleichung (I) erhält man nun folgend, wenn nun einerseits $z = 1, 2, 3 \ldots$, andrerseits $z = 0, -1, -2, \ldots$ setzt:

$$\frac{\partial (x^m)}{\partial x} = m\,x^{m-1},\ \frac{\partial^2 (x^m}{\partial x^2} = m.\,m-1.\,x^{m-2},$$

$$\frac{\partial^3 (x^m)}{\partial x^3} = m.\,m-1.\,m-2\,x^{m-3} \ldots,\ \frac{\partial^0 (x^m)}{\partial x^0} = (m\,P_0)\,x^{m-0} = x^m,$$

$$\frac{\partial^{-1}(x^m)}{\partial x^{-1}} = \int x^m \partial x = (mP-1)x^{m+1} = \frac{1}{m+1}x^{m+1},$$
$$\frac{\partial^{-2}(x^m)}{\partial x^{-2}} = \int(\int x^m \partial x)\partial x = (mP-2)x^{m+2} = -\frac{1}{m+1.m+2}x^{m+2}$$
u. s. w.

Wir wollen nun eine Maßformel angeben, wie man einen beliebigen Differentialquotienten (ganz oder gebrochen, positiv oder negativ) einer beliebigen Funktion einer Reihe entwickeln kann, sofern man nur die ganzen positiven Differentialquotienten derselben kennt. Man erhält nämlich durch successive Differentiation des Productes $y = f(x)\cdot\varphi(x)$:

$$\frac{\partial(f(x)\varphi(x))}{\partial x} = f'(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} + \varphi(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x},$$
$$\frac{\partial^2(f(x)\varphi(x))}{\partial x^2} = f'(x)\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} + \varphi(x)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2},$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial^z(f(x)\varphi(x))}{\partial x^z} = f'(x)\frac{\partial^z\varphi(x)}{\partial x^z} + \frac{z}{1}\frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{\partial^{z-1}\varphi(x)}{\partial x^{z-1}} + \frac{z.z-1}{1.2}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\frac{\partial^{z-2}\varphi(x)}{\partial x^{z-2}} + \cdots \quad \text{(IV)}$$

Für $f(x) = y$, $\varphi(x) = A$ giebt dies:

$$\frac{\partial^z(yA)}{\partial x^z} = y\frac{\partial^z(A)}{\partial x^z} + \frac{z}{1}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^{z-1}(A)}{\partial x^{z-1}} + \frac{z.z-1}{1.2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^{z-2}(A)}{\partial x^{z-2}} + \cdots,$$

oder da

$$\frac{\partial^z(A)}{\partial x^z} = \frac{\partial^z(A.x^0)}{\partial x^z} = A\frac{\partial^z(x^0)}{\partial x^z} = A(oPz)x^{0-z},$$
$$\frac{\partial^{z-1}(A)}{\partial x^{z-1}} = A(oPz-1)x^{1-z} \text{ u. s. w.}$$

und

$$(oPz-1) = \frac{(oPz)}{1-z}, \quad (oPz-2) = \frac{(oPz)}{1-z.2-z}, \text{ u. s. w.}$$

ist:

$$\frac{\partial^z(y.A)}{\partial x^z} = \frac{A(oPz)}{x^z}\left\{y + \frac{z}{1}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{x}{1-z} + \frac{z.z-1}{1.2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{x^2}{1-z.2-z} + \cdots\right\}$$

oder

$$\frac{\partial^z f(x)}{\partial x^z} = \frac{(oPz)}{x^z}\left\{f(x) + \frac{z}{1}\frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{x}{1-z} + \frac{z.z-1}{1.2}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\frac{x^2}{1-z.2-z} + \cdots\right\}. \quad \text{(V)}$$

Aus dieser Reihe ist die Bernoulli'sche Reihe:

$$\int f(x)\partial x = f'(x).x - \frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{x^2}{1.2} + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\frac{x^3}{1.2.3} - \cdots,$$

derjenige specielle Fall, in welchem sie für $z = -1$ übergeht.
Man erhält nämlich aus (V) für $z = -1$:

$$\frac{\partial^{-1}f(x)}{\partial x^{-1}} = \int f(x)\partial x$$
$$= \frac{(oP-1)}{x^{-1}}\left(f(x) - \frac{1}{1}\frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{x}{1.2} + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\frac{x^3}{1.2.3} - \cdots,\right.$$
$$= xf(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{x^2}{1.2} + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\frac{x^3}{1.2.3} - \cdots$$

Setzt man in den Ausdruck des z^{ten} Differentialquotienten von x^m

$$\frac{\partial^z(x^m)}{\partial x^z} = (mPz)x^{m-z}$$

$m = 0$

$m = 0$, so wird daraus, wie sich schon oben ergab:

$$\frac{\partial^z (1)}{\partial x^z} = (0 P z) x^{-z},$$

während für $m = z$

$$\frac{\partial^z (x^z)}{\partial x^z} = (z P z) x^{z-z} = (z P z)$$

hervorgeht.
Die Funktionen $(0 P z)$ und $(z P z)$ erscheinen daher als spezielle Fälle von $(m P z)$ und müssen sich aus derselben entwickeln lassen.

2. Die Faktorielle $(m P z)$

Das Produkt $(m P z) = m \cdot m-1 \ldots m-z+1$ besteht aus z einfachen Faktoren in Bezug auf m, läßt sich also als eine Gleichung vom z^{ten} Grad in Bezug auf m betrachten, deren Wurzeln $0, 1, 2 \ldots (z-1)$ sind. Ordnet man diese Gleichung nach Potenzen von m, so entsteht ein Ausdruck von der Form:

$$(m P z) = m^z + f'(z) m^{z-1} + f''(z) m^{z-2} + f'''(z) m^{z-3} + \ldots$$

Es ist somit die Entwicklung für $(m P z)$ gefunden, sobald die successiven Funktionen $f'(z), f''(z) \ldots$ sich angeben lassen.
Setzt man die Reihe der Funktionen $f'(z), f''(z) \ldots$ als successive Coefficienten einer Gleichung, deren Wurzeln $0, 1, 2 \ldots z-1$ sind, näher ins Auge, so ergibt sich:

$$f'(z) = a_1 z + a_2 z^2,$$
$$f''(z) = b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + b_4 z^4, \text{ u. s. w.}$$

wobei nur noch a_1, a_2; b_1, b_2, b_3, b_4; $\ldots$ zu bestimmen sind, so daß man hat:

$$(m P z) = m^z + (a_1 z + a_2 z^2) m^{z-1} + (b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + b_4 z^4) m^{z-2} + \ldots \qquad (I)$$

Kommt es nun darauf an, die Coefficienten a_1, a_2; b_1, b_2, b_3, b_4; u. s. w. numerisch zu bestimmen, und will man nicht zuvörderst das Gesetz ihrer Zusammensetzung auffinden, so führt folgende Methode zum Ziel.
Setzt man in Gleichung (I) z successive $= 1, 2, 3 \ldots$, so kennt man einerseits direkt die Werthe $(m P 1), (m P 2) \ldots$, nämlich $(m P 1) = m, (m P 2) = m \cdot m-1$, u. s. w. und andrerseits erhält man die entsprechenden Werthe durch die Coefficienten a_1, a_2; b_1, b_2, b_3, b_4; $\ldots$ ausgedrückt.
Zur Harmonisirung dieser Operation kann man sich folgender Hülfsbetrachtungen bedienen. Setzt man nämlich in der Gleichung:

$$(m P z) = m^z + f'(z) m^{z-1} + f''(z) m^{z-2} + \ldots$$

$z = 1$, und bezeichnet die Werthe, die dann $f'(z), f''(z) \ldots$ annehmen, mit $f'(1), f''(1) \ldots$; so wird:

$$(m P 1) = m + f'(1) + \frac{1}{m} f''(1) + \frac{1}{m^2} f'''(1) + \ldots$$

Da nun nun und für sich $(m P 1) = m$ ist, so ist diese Gleichung nichts anders möglich, als wenn

$$f'(1) + \frac{1}{m} f''(1) + \frac{1}{m^2} f'''(1) + \ldots$$

für sich $=$ Null ist. Da aber m jede beliebige Zahl sein kann, so ist nicht nur $f'(1)$, sondern

auch $f''(1), f'''(1), \ldots$ jedes für sich gleich Null.

Setzt man weiter in (1) $z = 2$, so resultirt:

$$(m\,P\,2) = m^2 + f'(2)\,m + f''(2) + \frac{1}{m} f'''(2) + \ldots = m.m-1 = m^2 - m,$$

woraus ebenso

$$f''(2) = 0, f'''(2) = 0, \text{ u. s. w.}$$

folgt.

Man erhält so folgende Systeme von Gleichungen:

$$f'(1) = 0, f''(1) = 0, f'''(1) = 0, \ldots$$
$$f''(2) = 0 f'''(2) = 0 \ldots;$$
$$f'''(3) = 0 \ldots; \ldots$$

woraus folgt, dass

$f'(z)$: 0 und 1;
$f''(z)$: 0, 1 und 2;
$f'''(z)$: 0, 1, 2 und 3; u. s. w.

zu Wurzeln haben, also auch so geschrieben werden können:

$$f'(z) = z.z-1.q,$$
$$f''(z) = z.z-1.z-2.q'.\varphi'(z),$$
$$f'''(z) = z.z-1.z-2.z-3.q''.\varphi''(z). \text{ u. s. w.}$$

Die Constanten $q, q', q'' \ldots$, so wie die Functionen $\varphi'(z), \varphi''(z), \varphi'''(z) \ldots$, sind nun jetzt leicht mittelst der Gleichungen

$$(m\,P\,1) = m, (m\,P\,2) = m.m-1, (m\,P\,3) = m.m-1.m-2, \text{ u. s. w.}$$

zu finden, so dass nun erhält:

$$(m\,P\,z) = m^z - \frac{1}{2} z.z-1.m^{z-1} + \frac{1}{1.2.4} z.z-1.z-2\left\{z - \frac{1}{3}\right\} m^{z-2} - \frac{1}{2.4.6} z.z-1.z-2.z-3(z.z-1)m^{z-3}$$
$$+ \frac{1}{2.4.6.8} z.z-1.z-2.z-3.z-4\left\{z^3 - 2z^2 + \frac{1}{3} z + \frac{2}{15}\right\} m^{z-4}$$
$$- \frac{1}{2.4.6.8.10} z.z-1.z-2.z-3.z-4.z-5(z.z-1)\left\{z^2 - \frac{7}{3} z - \frac{2}{3}\right\} m^{z-5}$$
$$+ \frac{1}{2.4.6.8.10.12} z.z-1.z-2.z-3.z-4.z-5.z-6\left\{z^5 - 5z^4 + 5z^3 + \frac{13}{9} z^2 - \frac{2}{3} z - \frac{16}{63}\right\} m^{z-6}$$
$$- \frac{1}{2.4.6.8.10.12.14} z.z-1.z-2.z-3.z-4.z-5.z-6.z-7\{z.z-1\}\left\{z^4 - 6z^3 + \frac{17}{3} z^2 + \frac{58}{9} z + \frac{58}{9} z + \frac{1}{9}\right.$$
$$+ \text{etc.}$$

Um das Gesetz der Zusammensetzung der Coefficienten in den Functionen $f'(z), f''(z), f'''(z) \ldots$ besser übersehen zu können, bezeichnen wir mit $\psi(z, n)$ die Summe der Combinationen der z verschiedenen Größen $0, 1, 2 \ldots$ bis $z-1$ zu je n, so dass nun ist:

$$(m\,P\,z) = m^z - \psi(z,1) m^{z-1} + \psi(z,2) m^{z-2} - \psi(z,3) m^{z-3} + \ldots$$

Setzt nun statt z: $z+1$, so ist

$$(m\,P\,z+1) = m^{z+1} - \psi(z+1,1) m^z + \psi(z+1,2) m^{z-1} - \psi(z+1,3) m^{z-2} + \ldots$$

Nun ist aber auch

$$(m\,P\,z+1) = (m-z)(m\,P\,z),$$

d. h. wenn nun für $(m\,P\,z)$ auch (1) seinen Werth einsetzt:

$$(m\,P\,z+1) = m^{z+1} - (\psi(z,1) + z)\, m^z$$
$$+ (\psi(z,2) + z\,\psi(z,1)) m^{z-1} - (\psi(z,3) + z\,\psi(z,2)) m^{z-2} + \ldots$$

Hält nun (3) mit (2) zusammen, so folgt:

$\psi(z+1, n)$

$$\psi(z+1,n) = z\,\psi(z,n-1) + \psi(z,n). \qquad (4)$$

Die Vereinigung von Gleichung (1) und (4) führt uns direkt zur Bestimmung der Coefficienten des Ausdrucks für $(m\,P\,z)$ und ihres Bildungsgesetzes.

Das n^{te} Glied der Entwicklung für $(m\,P\,z)$ (s. (1)) hat nämlich die Form:

$$\psi(z,n-1)\,m^{z-n+1}.$$

Der Faktor $\psi(z,n-1)$ hat die Form:

$$\psi(z,n-1) = Az^{2n-2} + Bz^{2n-3} + Cz^{2n-4} + \dots \qquad (5)$$

Setzen wir nun diesen n^{te} Glied als bekannt voraus, so wissen wir, daß im $(n+1)^{ten}$ Glied der Coefficient von m^{z-n+2} die Form hat:

$$\psi(z,n) = \alpha z^{2n} + \beta z^{2n-1} + \gamma z^{2n-2} + \dots \qquad (6)$$

Nun ist uns der Taylor'sche Lehrsatz:

$$\psi(z+1,n) = \psi(z,n) + \frac{\partial\psi(z,n)}{1.\partial z} + \frac{\partial^2\psi(z,n)}{1.2.\partial z^2} + \frac{\partial^3\psi(z,n)}{1.2.3.\partial z^3} + \dots \qquad (7)$$

Aus Gleichung (4) wird daher:

$$\psi(z,n) + \frac{\partial\psi(z,n)}{1.\partial z} + \frac{\partial^2\psi(z,n)}{1.2.\partial z^2} + \dots$$
$$= z(Az^{2n-2} + Bz^{2n-3} + Cz^{2n-4} + \dots) + \psi(z,n),$$

wobei ist:

$$\frac{\partial\psi(z,n)}{\partial z} = 2n\alpha z^{2n-1} + (2n-1)\beta z^{2n-2} + \dots,$$
$$\frac{\partial^2\psi(z,n)}{\partial z^2} = 2n.2n-1.\alpha z^{2n-2} + 2n-1.2n-2.\beta z^{2n-3} + \dots \text{ u.s.w.}$$

ist:

$$2n\alpha z^{2n-1} + \frac{2n-1}{1}\beta z^{2n-2} + \frac{2n-2}{1}\gamma z^{2n-3} + \dots$$
$$= Az^{2n-1} + Bz^{2n-2} + Cz^{2n-3} + \dots$$
$$+ \frac{2n.2n-1}{1.2}\alpha z^{2n-2} + \frac{2n-1.2n-2}{1.2}\beta z^{2n-3} + \dots$$
$$+ \frac{2n.2n-1.2n-2}{1.2.3}\alpha z^{2n-3} + \dots$$

d.h.

$$2n\alpha = A, \alpha = \frac{A}{2n};$$

$$2n-1.\beta + \frac{2n.2n-1}{1.2}\alpha = B, \quad \beta = \frac{B - \frac{2n.2n-1}{1.2}\alpha}{2n-1};$$

$$2n-2.\gamma + \frac{2n-1.2n-2}{1.2}\beta + \frac{2n.2n-1.2n-2}{1.2.3}\alpha = C,$$

$$\gamma = \frac{C - \frac{2n.2n-1.2n-2}{1.2.3}\alpha - \frac{2n-1.2n-2}{1.2}\beta}{\text{u.s.w.}}$$

Wir kennen also nun das recurrente Bildungsgesetz*) der Reihe für $(m\,P\,z)$ und erhalten:

$$(m\,P\,z) = m^z - \frac{1}{2}(z^2 - z)m^{z-1} + \frac{1}{2.4}(z^4 - \frac{10}{3}z^3 + 3z^2 - \frac{2}{3}z)$$
$$- \frac{1}{2.4.6}(z^6 - 7z^5 + 17z^4 - 17z^3 + 6z^2)m^{z-3} + \dots,$$

also dieselbe Reihe wie oben (Formel (VI)).

---

*) Das Gesetz des Zusammenhangs dieser Coefficienten hat zuerst Kramp in seiner „Analyse des refractions astronomiques et terrestres" (Strassburg 1799) gegeben.

Die

Die Formel für $(m\,P\,z)$ (VI) hat eine gewisse Aehnlichkeit mit der Binomialformel unter folgender Form:

$$(m-1)^z = m^z - z m^{z-1} + \frac{z.z-1}{1.2} m^{z-2} - \ldots = (m-1)(m-1)\ldots(m-1),$$

$$(m\,P\,z) = m^z - \frac{z.z-1}{2} m^{z-1} + \frac{z.z-1.z-2}{2.4}\left(z-\frac{1}{3}\right) m^{z-2} - \ldots\ldots$$

$$= m(m-1)\ldots(m-z+1).$$

Beide sind Differenzialausdrücke eines Produkts von z Faktoren, welche bei der Exponentialfunktion m^z einander gleich, bei der Funktion $(m\,P\,z)$ nur in Eins verschieden sind.

Aus dieser Analogie läßt sich die Darstellung finden, die Differenzialform von $(m\,P\,z)$ auch auf den Fall auszudehnen, wo z negativ oder gebrochen ist.

Einige der wichtigsten Eigenschaften der Funktion $(m\,P\,z)$, namentlich aber ihre Kongruenz, verglichen mit der Exponentialfunktion ergeben sich, wenn das Produkt:

$$x^{m-n} x^n = x^m$$

nach Formel (IV) differentiirt, indem man

$$x^{m-n} = f(x),\ x^n = \varphi(x)$$

setzt. Man erhält so, da

$$\frac{\partial^z (x^m)}{\partial x^z} = (m\,P\,z) x^{m-z}$$

ist:

$$(m\,P\,z) x^{m-z} = \frac{\partial^z (x^{m-n} x^n)}{\partial x^z} = x^{m-n}\frac{\partial^z (x^n)}{\partial x^z} + \frac{z}{1}(m-n)x^{m-n-1}\frac{\partial^{z-1}(x^n)}{\partial x^{z-1}}$$
$$+\frac{z.z-1}{1.2}(m-n)(m-n-1)x^{m-n-2}\frac{\partial^{z-2}(x^n)}{\partial x^{z-2}} + \ldots,$$
$$= x^{m-n}(n\,P\,z)x^{n-z} + \frac{z}{1}(m-n)x^{m-n-1}(n\,P\,z-1)x^{n-z+1}$$
$$+\frac{z.z-1}{1.2}(m-n)(m-n-1)x^{m-n-2}(n\,P\,z-2)x^{n-z+2}+\ldots.$$
$$= x^{m-z}\left\{(n\,P\,z) + \frac{z}{1}(m-n\,P\,1)(n\,P\,z-1) + \right.$$
$$\left. + \frac{z.z-1}{1.2}(m-n\,P\,2)(n\,P\,z-2)+\ldots\right\}$$

wird sich wegen

$$(n\,P\,z-1) = \frac{(n\,P\,z)}{n-z+1}\ \text{(nach Formel (II))},$$

$$(n\,P\,z-2) = \frac{(n\,P\,z)}{(n-z+1)(n-z+2)}\ \text{u. s. w.}$$

noch so schreiben läßt:

$$(m\,P\,z) = (n\,P\,z)\left\{1 + \frac{z}{1}\frac{m-n}{n-z+1} + \frac{z.z-1}{1.2}\frac{m-n.m-n-1}{n-z+1.n-z+2}+\ldots\right\}^{*}),$$

oder, wenn man statt $m : m+n$ setzt:

(VII)

$$(m+n\,P\,z) = (n\,P\,z)\left\{1 + \frac{z}{1}\frac{m}{n-z+1} + \frac{z.z-1}{1.2}\frac{m.m-1}{n-z+1.n-z+2}+\ldots\right\},$$

Vermittelst dieser Gleichung lassen sich leicht für $(m\,P\,z)$ diejenigen Relationen entwickeln, die den folgenden:

---

*) Setzt man in dieser Gleichung $n = z$, so erhält man den folgenden Ausdruck

$$\frac{(m\,P\,z)}{(z\,P\,z)} = 1 + \frac{z}{1}\frac{m-z}{1} + \frac{z.z-1}{1.2}\frac{m-z.m-z-1}{1.2}+\ldots,$$

$\frac{(m\,P\,z)}{(z\,P\,z)}$ ist aber die Anzahl der Combinationen von m Größen zu je z.

Es drückt somit diese letztere Reihe den Interpolationssatz für die Newton'schen Binomialcoef. einfach aus.

$m^n m^z =$

$$m^n m^z = m^{n+z}, \ (m^z)^n = m^{nz}$$

der Exponentialfunktion entsprechen:
Da sich nämlich das Hauptprodukt:

$$(mPz) = m.m-1\ldots(m-z+1)$$

in eine beliebige Anzahl von Faktorengruppen zerlegen läßt, so hat man als allgemeinen Ausdruck des in Gleichung (**II**) enthaltenen Gesetzes:

$$(mPz'+z''+z'''+\ldots) = (mPz')(m-z'Pz'')(m-(z'+z'')Pz''')\ldots \qquad \textbf{(VIII)}$$

Hieraus folgt, da nach Gleichung (**VII**) ($n=m$, $m=-z'$, $z=z''$ gesetzt):

$$(m-z'Pz'')$$
$$=(mPz'')\left\{1-\frac{z''z'}{1.m-z''+1}+\frac{z''(z''-1)}{1.2}\frac{z'(z'+1)}{m-z''+1.m-z''+2}-\ldots\right\}$$
$$=(mPz'')\psi(z',z'',m),$$

ebenso:

$$(m-(z'+z'')Pz''')$$
$$=(mPz''')\left\{1-\frac{z'''(z'+z'')}{1.m-z'''+1}+\frac{z'''(z'''-1)}{1.2}\frac{(z'+z'')(z'+z''+1)}{m-z'''+1.m-z'''+2}-\ldots\right\}$$
$$=(mPz''')\psi(z'+z'',z''',m) \text{ u.s.w.}$$

ist:

$$(mPz'+z''+z'''+\ldots)$$
$$=(mPz')(mPz'')(mPz''')\ldots\psi(z',z'',m).\psi(z'+z'',z''',m)\ldots, \qquad \textbf{(IX)}$$

insofern man unter

$$\psi(a,b,m)$$

die Reihe:

$$1-\frac{ba}{1.m-b+1}+\frac{b.b-1}{1.2}\frac{a.a+1}{m-b+1.m-b+2}-\ldots$$

versteht.
Die der Gleichung (**IX**) analoge Potenzformel ist:

$$m^{z'+z''+z'''+\ldots} = m^{z'}m^{z''}m^{z'''}\ldots$$

Setzt man in Formel (**IX**)

$$z'=z''=z'''\ldots=z,$$

so erhält man:

$$(mPnz)=(mPz)^n\psi(z,z,m)\psi(2z,z,m)\psi(3z,z,m)\ldots$$
$$\ldots\psi((n-1)z,z,m), \qquad \textbf{(X)}$$

wobei n als ganze positive Zahl vorausgesetzt wird. Die Gleichung (**X**) ist der Potenzformel

$$m^{nz}=(m^z)^n$$

analog.

3. Entwickelung von $\overset{e}{\log}(mPz)$

Wenn es sich darum handelt, für (mPz) Tabellen zu berechnen, so reicht die Formel (**VI**), insofern man m und z geeignet (d.h. so, daß Gleichung (**VI**) nicht divergent wird) wählt, vollkommen aus. Der Anwendung wegen aber, die wir von der Faktorielle (mPz) beim Differentiieren machen, erscheint es zweckmäßig, auch für $\overset{e}{\log}(mPz)$ einen Ausdruck zu finden.
Wir bestimmen $\overset{e}{\log}(mPz)$ als $\int\frac{\partial(mPz)}{(mPz)}$, wobei es sich also zunächst darum handelt,

handelt, $\frac{\partial(m P z}{\partial z}$ zu finden.
Es ist also

$$\frac{\partial(m P z)}{\partial z} = \frac{(m P z+\partial z)-(m P z)}{\partial z}, \qquad (1)$$

und nach Gleichung (VIII)

$$(m P z+\partial z)=(m P z)(m-z P \partial z); \qquad (2)$$

weiter nach Formel (VI)

$$(m-z P \partial z)$$
$$=(m-z)^{\partial z}\left\{1+\left(\frac{\alpha}{m-z}+\frac{\beta}{(m-z)^2}+\frac{\gamma}{(m-z)^3}+\frac{\delta}{(m-z)^4}+\cdots\right)\partial z\right\}, \qquad (3)$$

wobei wir mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ die Constanten bezeichnen, welche zum Vorschein kommen, wenn man

$$(m-z P \partial z)=(m-z)^{\partial z}+f'(\partial z)\cdot(m-z)^{\partial z-1}+f''(\partial z)\cdot(m-z)^{\partial z-2}+\cdots$$
$$=(m-z)^{\partial z}\left\{1+\frac{f'(\partial z)}{m-z}+\frac{f''(\partial z)}{(m-z)^2}+\cdots\right\},$$

entwickelt und die höheren Potenzen von ∂z vernachlässigt.
Ferner ist:

$$(m-z)^{\partial z}=m^{\partial z}\left\{1-\frac{z}{m}\partial z+\cdots\right\}$$
$$=\left\{1+\partial z \log^e m+\cdots\right\}\left\{1-\frac{z}{m}\partial z+\cdots\right\}=1+\partial z\left\{\log^e m-\frac{z}{m}\right\}. \qquad (4)$$

Man findet daher durch Einsetzung der Werthe aus Gl. (3) und (4) in (2) und (1):

$$\frac{\partial(m P z)}{\partial z}=\frac{(m P z+\partial z)-(m P z)}{\partial z}=\frac{(m P z)\left\{1+\partial z\left(\log^e m-\frac{z}{m}\right)\right\}\left\{1+\left(\frac{\alpha}{m-z}+\frac{\beta}{(m-z)^2}+\frac{\gamma}{(m-z)^3}+\cdots\right)\partial z\right\}-(m P z)}{\partial z}$$
$$=(m P z)\left(\log^e m-\frac{z}{m}+\left\{\frac{\alpha}{m-z}+\frac{\beta}{(m-z)^2}+\frac{\gamma}{(m-z)^3}+\frac{\delta}{(m-z)^4}+\cdots\right\}\right). \qquad (5)$$

Daher

$$\log^e(m P z)=\int\frac{\partial(m P z)}{(m P z)}=z\log^e m-\frac{z^2}{2m}-\alpha\log^e(m-z)+\frac{\beta}{m-z}+\frac{\gamma}{2(m-z)^2}+\frac{\delta}{3(m-z)^3}+\cdots+\text{const}.$$

Die Constante bestimmen wir dadurch, dass für

$$z=0;\ \log^e(m P 0)=\log^e 1=0$$

ist. Wenn sei daher

$$\text{const}.=\alpha\log^e m-\left(\frac{\beta}{m}+\frac{\gamma}{2m^2}+\frac{\delta}{3m^3}+\cdots\right)$$

und

$$\log^e(m P z)=z\log^e m-\frac{z^2}{2m}+\alpha\log^e\frac{m}{m-z}+\frac{\beta}{1}\left(\frac{1}{m-z}-\frac{1}{m}\right)$$
$$+\frac{\gamma}{2}\left(\frac{1}{(m-z)^2}-\frac{1}{m^2}\right)+\frac{\delta}{3}\left(\frac{1}{(m-z)^3}-\frac{1}{m^3}\right)+\cdots. \qquad (XI)$$

Bestimmung der Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ in Gleichung (XI).

Um das vorkommende Bildungsgesetz der Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma \delta \ldots$ zu finden, betrachten wir zunächst die Ausdrücke $(m P \partial z)$ und $(n P \partial z)$, welche zugleich für die Entwickelung von $\log^e(z P z)$ die Grundlage bilden.

Fig 1

Setzt man in Gleichung (VII) statt $m+n:m$, statt $m:m-n$, statt $z:\partial z$ und vernachlässigt die höheren Potenzen von ∂z, so wird:

$$(mP\partial z)=(nP\partial z)\left\{1+\partial z\left(\frac{m-n}{1.n+1}-\frac{1}{1.2}\,\frac{m-n.m-n-1}{n+1.n+2}+\frac{1.2}{1.2.3}\,\frac{m-n.m-n-1.m-n-2}{n+1.n+2.n+3}-\ldots\right)\right\}, \quad \text{(XII)}$$

d.h.

$$\frac{(mP\partial z-(nP\partial z)}{(nP\partial z)\partial z}=\frac{m-n}{n+1}-\frac{1}{2}\,\frac{m-n.m-n-1}{n+1.n+2}+\frac{1}{3}\,\frac{m-n.m-n-1.m-n-2}{n+1.n+2.n+3}-\ldots \quad \text{(XIII)}$$

Nun ist auch:

$$(mP\partial z)=\frac{(m+p-\partial zPp)(m+pP\partial z)}{(m+pPp)}$$

und

$$(m+p-\partial zPp)=(m+pPp)\left\{1-\partial z\left(\frac{p}{1.m+1}-\frac{p.p-1}{2.m+1.m+2}+\frac{p.p-1.p-2}{3.m+1.m+2.m+3}-\ldots\right)\right\},$$

Weiter nach Gleichung (VI)

$$(m+pP\partial z)=(m+p)^{\partial z}\left\{1+\left(\frac{\alpha}{m+p}+\frac{\beta}{(m+p)^2}+\frac{\gamma}{(m+p)^3}+\ldots\right)\partial z\right\}=(1+\partial \overset{e}{\log}(m+p))\left\{1+\left(\frac{\alpha}{m-z}+\frac{\beta}{(m-z)^2}+\ldots\right)\partial z\right\}$$

$$=1+\partial z\left\{\overset{e}{\log}(m+p)+\frac{\alpha}{m+p}+\frac{\beta}{(m+p)^2}+\frac{\gamma}{(m+p)^3}+\frac{\delta}{(m+p)^4}+\ldots\right\} \quad \text{(XIV)}$$

Daher auch:

$$(mP\partial z)=\left\{1-\partial z\left(\frac{p}{1.m+1}-\frac{p.p-1}{2.m+1.m+2}+\ldots\right)\right\}$$

$$\times\left\{1+\partial z\left(\overset{e}{\log}\left(m+p+\frac{\alpha}{m+p}+\frac{\beta}{(m+p)^2}+\ldots\right)\right)\right\}$$

$$=1+\partial z\left[\overset{e}{\log}(m+p)+\frac{\alpha}{m+p}+\frac{\beta}{(m+p)^2}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots-\left(\frac{p}{1.m+1}-\frac{p.p-1}{2.m+1.m+2}+\frac{p.p-1.p-2}{3.m+1.m+2.m+3}-\ldots\right)\right],$$

und

$$\frac{(mP\partial z)-(nP\partial z)}{(nP\partial z)\partial z}=\overset{e}{\log}\left(\frac{m+p}{1}\right)+\alpha\left(\frac{1}{m+p}-\frac{1}{n}\right)+\beta\left(\frac{1}{(m+p)^2}-\frac{1}{n^2}\right)+\ldots$$

$$\ldots-\left\{\frac{p}{1.m+1}-\frac{p.p-1}{2.m+1.m+2}+\ldots\right\} \quad (2)$$

Setzt man (XIII) = (2), so wird:

$$\overset{e}{\log}\left(\frac{m+p}{n}\right)+\alpha\left(\frac{1}{m+p}-\frac{1}{n}\right)+\beta\left(\frac{1}{(m+p)^2}-\frac{1}{n^2}\right)+\ldots$$

$$\ldots-\left(\frac{p}{1.m+1}-\frac{p.p-1}{2.m+1.m+2}+\ldots\right)$$

$$=\frac{m-n}{n+1}-\frac{1}{2}\,\frac{m-n.m-n-1}{n+1.n+2}+\frac{1}{3}\,\frac{m-n.m-n-1.m-n-2}{n+1.n+2.n+3}-\ldots \quad \text{(XV)}$$

Wenn man in dieser Gleichung $n=m$ setzt, so verschwindet die Reihe rechts und man bekommt.

$$\overset{e}{\log}\frac{m+p}{m}+\alpha\left(\frac{1}{m+p}-\frac{1}{m}\right)+\beta\left(\frac{1}{(m+p)^2}-\frac{1}{m^2}\right)+\ldots$$

$$\ldots=\frac{p}{1.m+1}-\frac{p.p-1}{2.m+1.m+2}+\ldots, \quad \text{(XVI)}$$

welche

welche Gleichung sich zur Bestimmung von $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ vorzüglich eignet. Man braucht nämlich dann p nur einen bestimmten ganzen positiven Werth zu geben. Setzt man z. B. $p=1$ und stellt $m : x$, so wird,

$$\log^e\left(\frac{x+1}{x}\right)+\alpha\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)+\beta\left(\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x^2}\right)+\ldots=\frac{1}{x+1}\,.$$

Differentiirt man beiderseits und entwickelt die Brüche von der Form $\frac{1}{(x+1)^n}$ nach dem binomischen Lehrsatz, so wird:

$$-\frac{1}{x(x+1)}+\alpha\left(\frac{-1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x^2}\right)+\beta\left(\frac{-2}{(x+1)^3}+\frac{2}{x^3}\right)+\ldots=-\frac{1}{(x+1)^2},$$

und

$$\left\{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^5}+\ldots\right\},$$

$$+\alpha\left\{\frac{-2}{1.x^3}+\frac{2.3}{1.2.x^4}-\frac{2.3.4}{1.2.3x^5}+\frac{2.3.4.5}{1.2.3.4.x^6}-\ldots\right\}$$

$$+2\beta\left\{\frac{-3}{1.x^4}+\frac{3.4}{1.2x^5}-\frac{3.4.5}{1.2.3x^6}+\frac{3.4.5.6}{1.2.3.4x^7}-\ldots\right\}$$

$$+3\gamma\left\{\frac{-4}{1.x^5}+\frac{4.5}{1.2.x^6}-\frac{4.5.6}{1.2.3x^7}+\frac{4.5.6.7}{1.2.3.4x^8}-\ldots\right\}$$

$$+\ldots\ldots$$

$$=\frac{1}{x^2}-\frac{1.2}{1.x^3}+\frac{1.2.3}{1.2.x^4}-\frac{1.2.3.4}{1.2.3.x^5}+\ldots$$

Durch Gleichsetzung der beiderseits gleichen Potenzen erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
&1+\frac{2}{1}\alpha=\frac{2}{1},\\
&1+\frac{2.3}{1.2}\alpha-\frac{3}{1}.2\beta=\frac{2.3}{1.2},\\
&1+\frac{2.3.4}{1.2.3}\alpha-\frac{3.4}{1.2}2\beta+\frac{4}{1}.3\gamma-\frac{2.3.4}{1.2.3},\\
&1+\frac{2.3.4.5}{1.2.3.4}\alpha-\frac{3.4.5}{1.2.3}2\beta+\frac{4.5}{1.2}3\gamma-\frac{5}{1}.4\delta=\frac{2.3.4.5}{1.2.3.4},\\
&\text{u. s. w.}
\end{aligned}\right\}\qquad (\text{XVII})$$

Dieses Schema stimmt mit dem Bildungsschema der Bernoulli'schen Zahlen überein, so daß man hat:

$$\alpha=\frac{1}{2},$$
$$\beta=-\frac{1}{2!}B_1=-\frac{1}{12},$$
$$\gamma=B_2=0$$
$$\delta=\frac{1}{4}B_3=+\frac{1}{120},$$
$$\varepsilon=B_4=0,$$
$$\zeta=-\frac{1}{6}B_5=-\frac{1}{252},\ \text{u. s. w.}$$

Man kann daher, wenn nun mit $B_1, B_3, B_5 \ldots$ die Bernoulli'schen Zahlen bezeichnet, Gleichung **XI**. auch so schreiben:

$$\log^e(mPz)=z\log^e m-\frac{z^2}{2m}+\frac{1}{2}\log^e\frac{m}{m-z}-\frac{1}{1.2}B_1\left(\frac{1}{m-z}-\frac{1}{m}\right)$$
$$+\frac{1}{3.4}B_3\left(\frac{1}{(m-z)^3}-\frac{1}{m^3}\right)-\frac{1}{5.6}B_5\left(\frac{1}{(m-z)^5}-\frac{1}{m^5}\right)+\ldots\ldots \qquad (\text{XVIII})$$

4. Entwickelung von $\log^e(zPz)$

Der Werth von (zPz) läßt sich nach Formel (VI) nicht direkt berechnen; ebensowenig derjenige von $(0Pz)$, weil für $m=z$ und für $m=0$ diese Formel divergent wird oder (für $m=0$) Glieder von unzulässiger Gestalt (0^z u. s. w.) erhält. Am leichtesten kommt man zum Ziel, wenn man zuerst für $\log^e(zPz)$ einen Ausdruck sucht.

Wir bestimmen $\log^e(zPz)$ ebenfalls wieder als $\int\frac{\partial(zPz)}{(zPz)}$. Nun ist:

$$\frac{\partial(zPz)}{\partial z}=\frac{(z+\partial zPz+\partial z)-(zPz)}{\partial z}.$$

Es ist aber weiter:

$$(z+\partial zPz+\partial z)=(z+\partial zPz)(\partial zP\partial z) \tag{1}$$

und

$$\begin{aligned}(z+\partial zPz)&=(zPz)\left\{1+\frac{z\partial z}{1.1}+\frac{z.z-1}{1.2}\frac{\partial z.\partial z-1}{1.2}+\dots\right\}\\&=(zPz)\left\{1+\partial z\left(\frac{z}{1.1}+\frac{z.1-z}{1.2}.\frac{1}{2}+\frac{z.1-z.2-z}{1.2.3}.\frac{1}{3}+\dots\right)\right\}\end{aligned} \tag{2}$$

Setzt man in Gleichung (XII) $m=\partial z$, $n=0$, so wird daraus:

$$(\partial zP\partial z)=(0P\partial z)\left\{1+\partial z^2\left(\frac{1}{1.1}+\frac{1}{2.2}+\dots\right)\right\}=(0P\partial z), \tag{3}$$

weil $\frac{\pi^2}{6}\partial z^2$ gegen 1 verschwindet.

Nun ist nach (XII), wenn man dort $m=0$ setzt:

$$(0P\partial z)=(nP\partial z)\left\{1-\partial z\left(\frac{n}{1.n+1}-\frac{n}{2.n+2}+\frac{n}{3.n+3}-\dots\right)\right\} \tag{4}$$

und nach Formel (XIV):

$$(nP\partial z)=1+\partial z\left(\log^e n+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n^2}+\frac{\gamma}{n^3}+\dots\right). \tag{5}$$

Daher mit Benützung der Formeln (2), (3), (4), (5):

$$\begin{aligned}(z+\partial zPz+\partial z)&=(zPz)\left\{1+\partial z\left(\frac{z}{1.1}+\frac{z.1-z}{1.2}.\frac{1}{2}+\frac{z.1-z.2-z}{1.2.3}.\frac{1}{3}+\dots\right)\right\}\\&\quad\times\left\{1+\partial z\left(\log^e n+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n^2}+\dots\right)\right\}\left\{1-\partial z\left(\frac{n}{1.n+1}-\frac{1}{2}\frac{n}{n+2}+\dots\right)\right\}\end{aligned}$$

$$=(zPz)+(zPz)\partial z\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{1}.\frac{z}{1}+\frac{1}{2}.\frac{z.1-z}{1.2}+\frac{1}{3}\frac{1-z.2-z}{1.2.3}+\dots\\&+\log^e n+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n^2}+\frac{\gamma}{n^3}+\dots\\&-\frac{n}{1.n+1}-\frac{1}{2}\frac{n}{n+2}-\frac{1}{3}\frac{n}{n+3}+\dots\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Daher

$$\frac{(z+\partial zPz+\partial z)-(zPz)}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial(zPz)}{\partial z}=(zPz)\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{1}.\frac{z}{1}+\frac{1}{2}\frac{z.1-z}{1.2}+\frac{1}{3}\frac{z.1-z.2-z}{1.2.3}+\dots\\&+\log^e n+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n^2}+\frac{\gamma}{n^3}+\dots\\&-\frac{n}{1.n+1}-\frac{1}{2}\frac{n}{n+2}-\frac{1}{3}\frac{n}{n+3}-\dots\end{aligned}\right\} \tag{XIX}$$

und

$$\log^e(zPz)=\int\frac{\partial(zPz)}{(zPz)}=\int\left\{\frac{1}{1}\frac{z}{1}+\frac{1}{2}.\frac{z.1-z}{1.2}+\frac{1}{3}\frac{z.1-z.2-z}{1.2.3}+\dots\right\}\partial z.$$

$$+\int\left\{\log^e n+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n^2}+\frac{\gamma}{n^3}+\dots\right\}\partial z-\int\left(\frac{n}{1.n+1}+\frac{1}{2}\frac{n}{n+2}+\frac{1}{3}\frac{n}{n+3}+\dots\right)\partial z.$$

1) Zur Integration der Reihe

$$\int\left(\frac{1}{1}\frac{z}{1}+\frac{1}{2}\frac{z.1-z}{1.2}+\frac{1}{3}\frac{z.1-z.2-z}{1.2.3}+\dots\right)\partial z$$

setzen

Setzen wir in Gl. (XV) $m=0$ und $p=n$ und verfahren:

$$\frac{1}{1}\frac{n}{1}-\frac{1}{2}\frac{n.n-1}{1.2}+\frac{1}{3}\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}-\cdots.$$
$$=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{2}\frac{n.n+1}{n+1.n+2}+\frac{1}{3}\frac{n.n+1.n+2}{n+1.n+2.n+3}+\cdots. \qquad (XX)$$

Wird hierin $n=z$ gesetzt, so erhält man:

$$\frac{1}{1}\frac{z}{1}-\frac{z.z-1}{2.1.2}+\frac{z.z-1.z-2}{3.1.2.3}-\cdots=\frac{z}{1.z+1}+\frac{z}{2.z+2}+\frac{z}{3.z+3}+\cdots.^{*})$$

Daher:

$$\int\partial z\left(\frac{1}{1}\frac{z}{1}+\frac{1}{2}\frac{z.1-z}{1.2}+\frac{1}{3}\frac{z.1-z.2-z}{1.2.3}+\cdots.\right)$$
$$=\frac{1}{1}\int\frac{z\partial z}{z+1}+\frac{1}{2}\int\frac{z\partial z}{z+2}+\frac{1}{3}\int\frac{z\partial z}{z+3}+\cdots. \qquad (1)$$

Nun ist allgemein

$$\frac{1}{p+z}=\frac{1}{p}-\frac{z}{p^2}+\frac{z^2}{p^3}-\cdots.$$

Daher: $\frac{1}{1}\int\frac{z\partial z}{1+z}=\frac{1}{1.1}\int z\partial z-\frac{1}{1.1^2}\int z^2\partial z+\frac{1}{1.1^3}\int z^3\partial z-\cdots.$,

$\frac{1}{2}\int\frac{z\partial z}{2+z}=\frac{1}{2.2}\int z\partial z-\frac{1}{2.2^2}\int z^2\partial z+\frac{1}{2.2^3}\int z^3\partial z-\cdots.$, u. s. w.

u. s.
$$\int\partial z\left(\frac{z}{1.1}-\frac{1}{2}\frac{z.z-1}{1.2}+\frac{1}{3}\frac{z.z-1.z-2}{1.2.3}+\cdots.\right)$$
$$=\left\{\frac{1}{1.1}+\frac{1}{2.2}+\frac{1}{3.3}+\cdots\right\}\int z\partial z$$
$$-\left\{\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots.\right\}\int z^2\partial z$$
$$+\left\{\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots.\right\}\int z^3\partial z$$
$$-\cdots.\cdots.$$
$$=s_2\int z\partial z-s_3\int z^2\partial z+s_4\int z^3\partial z-\cdots. \qquad (XXI)$$

wobei man nun die Summe $\frac{1}{1^n}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots.$ mit s_n bezeichnet hat.

2) Die Summe der Reihen

$$\log n+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n^2}+\frac{\gamma}{n^3}+\cdots.$$

und

$$\frac{n}{1.n+1}+\frac{1}{2}\frac{n}{n+2}+\frac{n}{n+3}+\cdots.$$

sind ebenfalls leicht zu bestimmen.

---

*) Die Reihe

$$\frac{1}{1.z+1}+\frac{1}{2.z+2}+\frac{1}{3.z+3}+\cdots.=R$$

lässt sich nun als ein bestimmtes Integral ausdrücken. Setzt man nämlich:

$$S=\frac{x^{z+1}}{1.z+1}+\frac{x^{z+2}}{2.z+2}+\frac{x^{z+3}}{3.z+3}+\cdots.,$$

so ist:

$$\frac{\partial S}{\partial x}=\frac{x^z}{1}+\frac{x^{z+1}}{2}+\frac{x^{z+2}}{3}+\cdots.=x^{z-1}\left\{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots.\right\}$$
$$=-x^{z-1}\log(1-x).$$

Dann

$$\frac{\partial\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots.\right)}{\partial x}=1+x+x^2+\cdots.=\frac{1}{1-x}$$

u. s.

$$1+x+x^2+x^3+\cdots.=\int\frac{\partial x}{1-x}=-\log(1-x).$$

Daher

$$S=-\int x^{z-1}\log(1-x)\partial x,\quad R=-\int_{0\div 1}x^{z-1}\log(1-x)\partial x,$$

wobei die Constante so zu wählen ist, dass für $x=0$ das Integral gleich Null ist.

Da

Da wir nämlich oben gefunden haben, dass:

$$\alpha=\frac{1}{2},\ \beta=-\frac{1}{2}B_1,\ \delta=+\frac{1}{4}B_3,\ \zeta=-\frac{1}{6}B_5$$
$$\gamma=0 \qquad \varepsilon=0 \qquad \eta=0$$

u. s. w. sind, wenn $B_1, B_3, B_5 \ldots$ die Bernoulli'schen Zahlen vorstellen, so konvergirt die Reihe

$$\log^e \Gamma n+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n^2}+\frac{\gamma}{n^3}+\ldots=\log^e n+\frac{1}{2n}-\frac{B_1}{2n^2}+\frac{B_3}{4n^4}-\frac{B_5}{6n^6}+\ldots \quad *)$$

jedenfalls bis zu einem gewissen Gliede, wenn nun n fortwährend gross genommen.

Die Summe der Reihe

$$\frac{n}{1.n+1}+\frac{1}{2}\frac{n}{n+2}+\frac{1}{3}\frac{n}{n+3}+\ldots$$

endlich erhält man für n positiv ganz nach Gl. (XX), indem der dieser Reihe identische Ausdruck

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{n}{1}-\frac{1}{2}\frac{n.n-1}{1.2}+\frac{1}{3}\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}-\ldots$$

für n positiv ganz sich in eine geschlossene Gliederzahl verwandelt.

Die Differenz der beiden Reihen:

$$\left(\log^e n+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n^2}+\frac{\gamma}{n^3}+\ldots\right)-\left(\frac{n}{1.n+1}+\frac{n}{2.n+2}+\frac{n}{3.n+3}+\ldots\right)$$

ist eine Konstante wenn n selbst unbestimmt gross. Bezeichnet nun dieselbe mit $-s_1$, so ergiebt sich

$$\int\frac{\partial(z\,P\,z)}{(z\,P\,z)}=-s_1\int\partial z+s_2\int z\partial z-s_3\int z^2\partial z+s_4\int z^3\partial z-\ldots.$$

d. i.

$$\log^e(z\,P\,z)=-s_1 z+\frac{s_2}{2}z^2-\frac{s_3}{3}z^3+\frac{s_4}{4}z^4-\ldots.+\text{const.}$$

für $z=0$ ist $(z\,P\,z)=1$, daher const. $=0$, also:

$$\log^e(z\,P\,z)=-s_1 z+\frac{s_2}{2}z^2-\frac{s_3}{3}z^3+\frac{s_4}{4}z^4-\ldots. \qquad (\text{XXII})\ **)$$

---

*) Diese Reihe gehört zur Classe der halbconvergenten, weil die Bernoulli'schen Zahlen $B_1, B_3, B_5 \ldots$ über eine gewisse Grenze hinaus so stark wachsen, dass sich $\frac{1}{(2m-1)\pi}$ zu $\frac{1}{(2m+1)\pi}$ für $m=\infty$ wie $1:pm^2$ verhält. Bedeutet daher n eine endliche Zahl ist, divergirt die Reihe jedenfalls von einem gewissen Gliede an, ist aber bis zu diesem Gliede konvergent.

**) Die Werthe $s_2, s_3, s_4, \ldots$ lassen sich leicht bestimmen, indem

$$s_m=\frac{1}{1^m}+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\ldots$$

für m gerade sich als Funktion von π ausdrücken und für m ungerade sich durch stark konvergirende Reihen geben lässt, in welche ebenfalls die Bernoulli'schen Zahlen eingehen. Ebenso kann man

$$s_1=-\left(\log^e n+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n^2}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2.n+2}+\ldots\right)$$

auf vermittelst der Gleichung (XXII) bestimmen, indem für $z=1:(z\,P\,z)=1$ und $\log^e(z\,P\,z)=0$ ist, so dass man erhält:

$$s_1=\frac{s_2}{2}-\frac{s_3}{3}+\frac{s_4}{4}-\frac{s_5}{5}+\ldots.$$

Nach der Gleichung

$$(z+n\,P\,z)=\left(\frac{z}{1}+1\right)\left(\frac{z}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{z}{n}+1\right)(z\,P\,z),$$

worin z beliebig, n positiv ganz ist, hat man auch:

$$\log^e(z+n\,P\,z)=\log^e\left(\frac{z}{1}+1\right)+\log^e\left(\frac{z}{2}+1\right)+\ldots+\log^e\left(\frac{z}{n}+1\right)+\log^e(z\,P\,z),$$

d. i. wenn man Alles nach steigenden Reihen entwickelt und das Zusammengehörige vereinigt:

$$\log^e(z+n\,P\,z)=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-s_1\right)z$$
$$+\left(s_2-\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-\ldots-\frac{1}{n^2}\right)\frac{z^2}{2}$$
$$-\left(s_3-\frac{1}{1^3}-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}-\ldots-\frac{1}{n^3}\right)\frac{z^3}{3}$$

Diese

Diese Reihe konvergirt für Werthe von $z < 1$ und > -1, wie der Quotient des $(n+1)^{ten}$ und n^{ten} Gliedes derselben für n ∞ ergiebt.

5) Entwickelung von $\overset{e}{\log}(0Pz)$, sowie von (zPz) und $(0Pz)$.

Da nach Gleichung (VIII)

$$(0Pz)(-zP-z)=(0Pz-z)=1, \text{ d.h. } (0Pz)=\frac{1}{(-zP-z)}$$

ist, so hat man sogleich:

$$\overset{e}{\log}(0Pz)+\log(-zP-z)=0.$$

Hieraus folgt, daß die Entwickelung von $\overset{e}{\log}(0Pz)$ ganz dieselben Coefficienten wie die Entwickelung von $\overset{e}{\log}(zPz)$ besitzt und nur die Coefficienten der geraden Potenzen von z das entgegengesetzte Zeichen haben, d.h.

$$\overset{e}{\log}(0Pz)=-s_1 z-\frac{s_2}{2}z^2-\frac{s_3}{3}z^3-\dots \qquad \text{(XXIII)}$$

Diese Reihe konvergirt ebenfalls für Werthe von $z < 1$ und > -1.

Mittelst der Methode der unbestimmten Coefficienten lassen sich nun leicht noch die folgenden beiden Entwickelungen finden:

$$(zPz)=1-s_1 z+\frac{1}{2}(s_2+s_1 a_1)z^2-\frac{1}{3}(s_3+s_2 a_1+s_1 a_2)z^3+\dots \qquad \text{(XXIV)}$$

wobei $a_1=s_1$, $a_2=s_2+s_1 a_1$, $a_3=s_3+s_2 a_1+s_1 a_2$, u.s.w. ist;

$$(0Pz)=1-s_1 z-\frac{1}{2}(s_2-s_1 n_1)z^2-\frac{1}{3}(s_3-s_2 n_1-s_1 n_2)z^3-\dots \qquad \text{(XXV)}$$

wobei $n_1=s_1$, $n_2=s_2-s_1 n_1$, $n_3=s_3-s_2 n_1-s_1 n_2$, u.s.w. ist, während $s_1, s_2, s_3 \dots$ dieselbe Bedeutung wie in Gleichung (XXII) und Gleichung (XXXIII) haben.

6) Wirkliche Auswerthung der Funktionen $y=(mPz)$ und $y=(zPz)$.

Für die wirkliche Auswerthung der Funktion $y=(mPz)$ ist die Formel (VI) die bequemste. Nach ihr ist:

$$(mPz)=m^z-\frac{z.z-1}{2}m^{z-1}+\frac{z.z-1.z-2}{2.4}\left(z-\frac{1}{3}\right)m^{z-2}-\dots$$

Diese Reihe ist brauchbar, wenn m groß, z ein kleiner Bruch ist. Für $z=\frac{1}{2}$ findet man:

$$\left(mP\frac{1}{2}\right)=m^{\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{1}{2^3 m}+\frac{1}{2^7 m^2}-\frac{5}{2^{10}.m^3}-\frac{21}{2^{15}m^4}+\frac{399}{2^{18}m^5}+\frac{869}{2^{22}.m^6}-\frac{39325}{2^{25}.m^7}-\frac{334477}{2^{31}m^8}\right\}.$$

Dies ist eine halbkonvergente Reihe, und zwar beginnt ihre Divergenz um so früher, je kleiner man m nimmt. Für $m=1$ reicht ihre Konvergenz nur bis etwa zum 5ten Gliede. Nimmt man dagegen $m=10$, so wird:

$$\left(10P\frac{1}{2}\right)=\sqrt{10}\left\{\begin{array}{l}1{,}000\,000\,000+0{,}012\,500\,000+0{,}000078125\\ -0{,}000\,004882-0{,}000\,000\,064+0{,}000000015\\ +0{,}000000001-0{,}000000000\end{array}\right\}$$

$$=3{,}202\,037\,59$$

Für $z=1$ ist:

$$\overset{e}{\log}(1+a)=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{a}-s_1\right)+\frac{1}{2}\left(s_2-\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-\dots-\frac{1}{a^2}\right)-\dots$$

Da aber: $s_2=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots$, $s_3=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\dots$, u.s.w.

ist, so läßt sich auch setzen:

$$\overset{e}{\log}(1+a)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{a}-s_1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(a+2)^2}+\dots\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(a+1)^3}+\frac{1}{(a+2)^3}+\dots\right)+\dots$$

oder da für a ∞ rechts nur die erste Klammer übrig bleibt:

$$s_1=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{a}-\overset{e}{\log}(1+a)$$

für a ∞ und ganz, also ein neuer Werth für die Konstante s_1.

Aus

Aus dem Werth von $(mP\frac{1}{2})$ lässt sich leicht der Werth von $(m+nP\frac{1}{2})$ und von $(mPn+\frac{1}{2})$ finden.
Man hat nämlich:

$$(m+nPz)=\frac{(m+nPn)}{(m+n-zPn)}(mPz),\ (mPn+z)=(mPz)(m-zPn);$$

welche Formeln sehr bequem sind, wenn man (mPz) vermittelst Gleichung (VI) berechnet hat und successiv:

$$\begin{matrix}(m+1Pz) & (m-1Pz) & (mPz+1) & (mPz-1)\\ (m+2Pz) & (m-2Pz) & (mPz+2) & (mPz-2)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{matrix}$$

finden will.

Es z. B. findet man aus: $(10P\frac{1}{2})=3,202\,037\,59$:

$(11P\frac{1}{2})=\frac{22}{21}(10P\frac{1}{2})=3,354\,515\,57$
$(12P\frac{1}{2})=\frac{24}{23}(11P\frac{1}{2})=3,500\,364\,07$
$\vdots$

$(9P\frac{1}{2})=\frac{19}{20}(10P\frac{1}{2})=3,041\,935\,71$
$(8P\frac{1}{2})=\frac{17}{18}(9P\frac{1}{2})=2,872\,938\,28$
$(7P\frac{1}{2})=\frac{15}{16}(8P\frac{1}{2})=2,693\,380\,57$
$(6P\frac{1}{2})=\frac{13}{14}(7P\frac{1}{2})=2,500\,996\,24$
$(5P\frac{1}{2})=\frac{11}{12}(6P\frac{1}{2})=2,292\,579\,89$
$(4P\frac{1}{2})=\frac{9}{10}(5P\frac{1}{2})=2,063\,321\,90$
$(3P\frac{1}{2})=\frac{7}{8}(4P\frac{1}{2})=1,805\,406\,66$
$(2P\frac{1}{2})=\frac{5}{6}(3P\frac{1}{2})=1,504\,505\,55$
$(1P\frac{1}{2})=\frac{3}{4}(2P\frac{1}{2})=1,128\,379\,16$

$(10P\frac{3}{2})=\frac{19}{2}(10P\frac{1}{2})=30,419\,3571$
$(10P\frac{5}{2})=\frac{17}{2}(10P\frac{3}{2})=258,564\,535$
$\vdots$

$(10P-\frac{1}{2})=\frac{2}{21}(10P\frac{1}{2})=0,304\,955\,96$
$(10P-\frac{3}{2})=\frac{2}{23}(10P-\frac{1}{2})=0,026\,517\,91$
$\vdots$

Hier haben wir also so: $(1P\frac{1}{2})=1,128\,379\,16$ gefunden. Die fünf ersten Glieder der Formel für $mP\frac{1}{2}$ (1. oben) geben direkt:

$$(1P\frac{1}{2})=1,12729\ldots\ldots$$

als Annäherungswerth.

Ist in (mPz) m eine ächte Zahl, z. B. $m=\frac{1}{2}$, so stellt man sich ganz in ähnlicher Weise, um die für diesen Fall unzulässige Convergenz der Reihe (VI) zu umgehen. Es ist nämlich:

$$(\tfrac{1}{2}Pz)=\frac{(\frac{1}{2}-z+1)(\frac{1}{2}-z+2)(\frac{1}{2}-z+3)\cdots(\frac{1}{2}-z+n)}{(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)(\frac{1}{2}+3)\cdots(\frac{1}{2}+n)}(\tfrac{1}{2}+nPz).$$

Ist z. B. $z=\frac{1}{2}$ und wählt man $n=10$, so findet man mit Hülfe der Gleichung (VI):

$$\left(\tfrac{21}{2}P\tfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\tfrac{21}{2}}\{1,000\,000\,00+0,011\,904\,76+0,000\,070\,86-0,000\,004\,21-0,000\,000\,05+\ldots\}$$

$$=3,240\,370\,349\,.\,1,011\,971\,36=3,279\,161\,98$$

und hieraus

$$\left(\tfrac{1}{2}P\tfrac{1}{2}\right)=\frac{2.4.6.8.10.12.14.16.18.20}{3.5.7.9.11.13.15.17.19.21}\cdot\left(\tfrac{21}{2}P\tfrac{1}{2}\right)=0,886\,226\,91.$$

Man kann nun die Formel $(m+nPz)=\frac{(m+nPn)}{(m+n-zPn)}(mPz)$, wie in Gleichung (VII) geschehen ist, so umgestalten, dass man den Faktor $\frac{(m+nPn)}{(m+n-zPn)}$ in eine Reihe verwandelt.

Diese Umwandlung ist dann von Nutzen, wenn m eine grosse Zahl, (mPz) bereits bekannt ist und z und n kleine Zahlen sind, so dass die Reihe:

$$\frac{(m+nPn)}{(m+z-nPn)}=1+\frac{z.n}{1.m-z+1}+\frac{z.z-1.n.n-1}{1.2.m-z+1.m-z+2}+\ldots.$$

endlich convergent wird.

Es z. B. hat man:

$$\left(-\tfrac{9}{10}Pz\right)=\frac{1-10z.11-10z.21-10z\ldots.91-10z.101-10z}{1\ .\ 11\ .\ 21\ \ldots\ 91\ .\ 101}\left(\tfrac{101}{10}Pz\right).$$

Nach Gleichung (VII) ist aber:

$$\left(\tfrac{101}{1}Pz\right)=$$

$$\left(\frac{101}{10}Pz\right)=(10Pz)\left\{1+\frac{z\cdot\frac{1}{10}}{11-z}+\frac{z.1-z}{1.2}\cdot\frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{-9}{10}}{11-z.12-z}\right.$$

$$\left.+\frac{z.1-z.2-z}{1.2.3}\cdot\frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{-9}{10}\cdot\frac{-19}{10}}{11-z.12-z.13-z}+\ldots\right\}.$$

Für $z=\frac{1}{2}$ ist:

$$\left(\frac{101}{10}P\frac{1}{2}\right)=\left(10P\frac{1}{2}\right)\left\{\begin{matrix}1+0{,}004761904-0{,}000093167+0{,}000007080\\-0{,}000000950+0{,}000000179-\ldots\end{matrix}\right\}\ *)$$

$$=3{,}20203759\cdot 1{,}00486328=3{,}217609.$$

Daher $\left(-\frac{9}{10}P\frac{1}{2}\right)=\frac{96.86.76\ldots 16.6.-4}{101.91.81\ldots 21.11.1}\left(101P\frac{1}{2}\right)=-2{,}855346\ **)$.

Mit Anwendung dieser Hülfsgleichungen läßt sich nun auch leicht (zPz) und $(0Pz)$ aus (mPz) bestimmen, wenn man nur m passend wählt. So z. B. haben wir oben $\left(\frac{1}{2}P\frac{1}{2}\right)$ bestimmt. Für $\left(0P\frac{1}{2}\right)$ findet man:

$$\left(0P\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(1P\frac{1}{2}\right)=0{,}56418958.$$

7. Diskussion der Funktion $y=(mPz)$.

Man muß hierbei vorerst unterscheiden, ob m positiv, oder Null, oder ob es negativ ist.

Ist m positiv, so hat es keinen wesentlichen Einfluß auf die Gestalt der Kurve, ob es ganz oder gebrochen ist.

Ist m negativ ganz, so verwandelt sich die Kurve $y=(mPz)$ in ein System von isolirten Punkten.

Ist m negativ gebrochen, so muß man einen Unterschied machen, ob es zwischen 0 und -1, -2 und -3, -4 und -5 u. s. w. oder zwischen -1 und -2, -3 und -4 u. s. w. liegt.

Sowohl wenn m zwischen $-2n$ und $-(2n+1)$ (n positiv ganz oder Null), als auch wenn es zwischen $-(2n+1)$ und $-(2n+2)$ liegt, nähert sich die Kurve auf der negativen Seite der z der z-Axe als Assymptote, im

ersteren

---

*) Das n^{te} Glied der Klammerreihe entsteht, vom 3ten Gliede an, aus dem $(n-1)^{ten}$ durch Multiplikation mit dem Faktor:

$$-\frac{(2n-5)(10n-21)}{10(n-1)(2n+17)},$$

welcher für $n\infty=\frac{-20n^2}{20n^2}=-1$ ist. Die Reihe ist daher, da die ersten Glieder sichtlich konvergiren, ebenfalls wieder eine halb Konvergente.

**) Ist $(mP-z)$ zu finden, so ist nach Gleichung (VIII)

$$(mP-z)=\frac{1}{(m+zPz)}.$$

Setzt man hierin z successiv $=1, 2\ldots$, so ist:

$$(mP-1)=\frac{1}{m+1}(mP-2)=\frac{1}{(m+2)(m+1)}\ \text{u. s. w.}$$

Ganz dieselben Resultate erhält man, wenn man in Gleichung (VI) $z=-1,-2,\ldots$ setzt. Man erhält nämlich:

$$(mP-1)=m^{-1}+f'(-1)m^{-2}+f''(-1)m^{-3}+\ldots,$$

$$f'(-1)=\frac{1}{2}\cdot-1.-2=+1;$$

ebenso weiter: $f''(-1)=-1, f'''(-1)=+1, f^{IV}(-1)=-1$, u. s. w.

Daher: $(mP-1)=m^{-1}-m^{-2}+m^{-3}-\ldots=\frac{1}{m+1}$.

Setzt man in Gleichung (VI) $z=-2$, so wird:

$$(mP-2)=m^{-2}-3m^{-3}+7m^{-4}-15m^{-5}+\ldots\pm(2^{n-1}-1)m^{-n}$$

$$=\frac{1}{m^2}-\frac{3}{m^3}+\frac{7}{m^4}-\frac{15}{m^5}+\ldots$$

Fassen wir je 2 Glieder, ein positives und ein negatives, zusammen, so erhalten wir:

$$1^{tes}\text{ Glied: }\frac{m-3}{m^3},\ 2^{tes}\text{ Glied: }\frac{7m-15}{m^5},\ 3^{tes}\text{ Glied: }\frac{31m-63}{m^7},$$

$$\ldots n^{tes}\text{ Glied: }\frac{(2^{n-1}-1)-(2^{2n-1})}{m^{2n+1}}.$$

Das n^{te} Glied besteht sonach aus den 4 Werthen:

$$\frac{2^{2n-1}}{m^{2n}}-\frac{1}{m^{2n}}-\frac{2^{2n}}{m^{2n+1}}+\frac{1}{m^{2n+1}}.$$

Wir

ersten Fall aber von oben, im zweiten von unten her.

1) Ist m positiv ganz, so erhält man für die Kurve $y=(mPz)$ vorerst feste Punkte, wenn man z successiv $=0,1,2,3\ldots$ und $z=-1,-2,-3\ldots$ setzt. Es ist nämlich:

$$(mP0)=1,$$
$$(mP1)=m,$$
$$(mP2)=m.m-1,$$
$$\vdots$$
$$(mPm-1)=m.m-1.m-2\ldots3.2,$$
$$(mPm)=m.m-1.m-2\ldots3.2.1.$$

Wir sehen, daß von $z=0$ bis $z=m-1$ die Ordinaten zunehmen. Für $z=m$ erhält man wieder dieselbe Ordinate wie für $z=m-1$. Es findet also zwischen $z=m-1$ und $z=m$ ein Maximum der Ordinaten statt.

Für $z=m+1$ wird $(mPm+1)=0$; denn es ist allemal $(mPz+1)=(m-z)(mPz)$, daher $(mPm+1)=$ $=(m-m)(mPm)=0$. Ebenso ist für $z=m+2$:

$$(mPm+2)=(m.m+1)(mPm+1)=0 \text{ u.s.w.}$$

Es nehmen also die Ordinaten $z=m$ und $z=m+1$ stetig ab und werden für $z=m+1$ Null. Von da an schneidet die Kurve die z-Axe in unzählich vielen Punkten, die alle im Abstand Eins voneinander stehen. Für ganze Werthe von z, die kleiner als Null sind, erhalten wir um so kleinere Brüche $\left((mP-1)=\frac{1}{m+1},\right.$ $\left.(mP-2)=\frac{1}{m+1.m+2}\ldots\right)$, je größer der absolute Werth der negativen Abscisse ist. Für $z=-\infty$ wird $y=0$. Es ist also auf der negativen Seite der z die z-Axe Asymptote der Kurve.

Die Kurve $y=(mPz)$ hat hiernach für m z.B. $=4$ die in **Fig 1** dargestellte Form:

$$(4P0)=1.$$

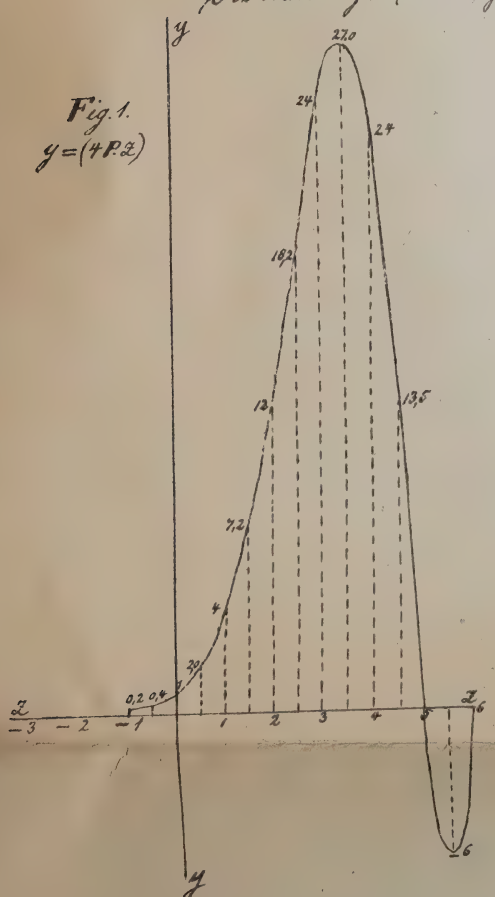


Fig. 1.
$y=(4P.z)$

$(4P\frac{1}{2})=2,06332190$

$(4P1)=4,00000000$

$(4P\frac{3}{2})=7,22162666\left\{=\frac{7}{2}(4P\frac{1}{2})\right\}$

$(4P2)=12,80000000$

$(4P\frac{5}{2})=18,0540666\left\{=\frac{5}{2}(4P\frac{3}{2})\right\}$

$(4P3)=24,00000000$

$(4P\frac{7}{2})=27,0810999\left\{=\frac{3}{2}(4P\frac{5}{2})\right\}$

$(4P4)=24,00000000$

$(4P\frac{9}{2})=13,5405499\left\{=\frac{1}{2}(4P\frac{7}{2})\right\}$

$(4P5)=0,00000000$

$(4P\frac{11}{2})=-6,77027499\left\{=-\frac{1}{2}(4P\frac{9}{2})\right\}$

$(4P6)=0,00000000$

$(4P\frac{13}{2})=+10,1554124\left\{=-\frac{3}{2}(4P\frac{11}{2})\right\}$

$(4P7)=0,00000000$

$(4P\frac{15}{2})=-25,3885312\left\{=-\frac{5}{2}(4P\frac{13}{2})\right\}$ u.s.w.

$(4P-\frac{1}{2})=\frac{2}{9}(4P\frac{1}{2})=0,45851597$

$(4P-1)=\frac{1}{4+1}=0,20000000$

$(4P-\frac{3}{2})=\frac{2}{11}(4P-\frac{1}{2})=0,08336654$

$(4P-2)=\frac{1}{5.6}=0,03333333$

$(4P-\frac{5}{2})=\frac{2}{13}(4P-\frac{3}{2})=0,01282562$

u.s.w.

Kurve $y=(4Pz)$ siehe **Fig 1**.

Wir erhalten daher für die 4 entsprechenden geometrischen Reihen die Gesammtsumme

$$S=\frac{2}{m^2-4}-\frac{1}{m^2-1}-\frac{4}{m(m^2-4)}+\frac{1}{m(m^2-1)}=\frac{m^3-3m^2+2m}{m(m^2-1)(m^2-4)}$$
$$=\frac{m.m-1.m-2}{m(m^2-1)(m^2-4)}=\frac{1}{m+1.m+2},$$

also ebenfalls $(mP-2)=\frac{1}{m+1.m+2}$.

Ganz auf ähnliche Weise lassen sich auch die Ausdrücke für $(mP-3),(mP-4)\ldots$ aus der Formel (VI) entwickeln.

Je größer m ist, um so mehr nähern sich die Maxima und Minima auf der positiven Seite der z von der z-Axe, während auf der negativen Seite der z die asymptotische Annäherung der Kurve an die z-Axe um so stärker ist.

2). Ist $m = 0$, so erhält man: $(0P_0) = 1$

$(0P_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}(1P_{\frac{1}{2}}) = 0{,}564\,189\,58$

$(0P_1) = 0{,}000\,000\,00$

$(0P_{\frac{3}{2}}) = \frac{5.3.1.-1}{8.6.4.2}(4P_{\frac{3}{2}}) = -0{,}282\,094\,79 \left\{= -\frac{1}{2}(0P_{\frac{1}{2}})\right\}$

$(0P_2) = 0{,}000\,000\,00$

$(0P_{\frac{5}{2}}) = \frac{3.1.-1.-3}{8.6.4.2}(4P_{\frac{5}{2}}) = 0{,}423\,142\,18 \left\{= -\frac{3}{2}(0P_{\frac{3}{2}})\right\}$

$(0P_3) = 0{,}000\,000\,00$

u. s. w.

$(0P_{-\frac{1}{2}}) = \frac{2.7.5.3}{8.6.4.2}(4P_{-\frac{1}{2}}) = 1{,}128\,379\,16$

$(0P_{-1}) = \frac{1}{0+1} = 1{,}000\,000\,00$

$(0P_{-\frac{3}{2}}) = \frac{11.9.7.5}{8.6.4.2}(4P_{-\frac{3}{2}}) = 0{,}752\,252\,77$

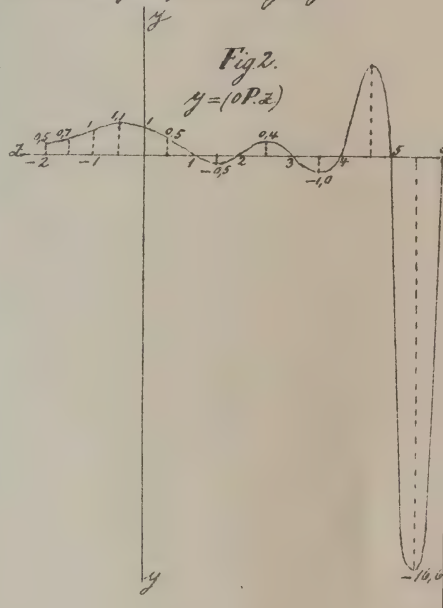
$(0P_{-2}) = \frac{1}{1.2} = 0{,}500\,000\,00$

$(0P_{-\frac{5}{2}}) = \frac{13.11.9.7}{8.6.4.2}(4P_{-\frac{5}{2}}) = 0{,}300\,901\,10$

u. s. w.

Kurve $y = (0Pz)$ siehe Fig 2.

Es beginnt also, wie Fig 2. zeigt, bei der Kurve $y = (0Pz)$ das Hauptmaximum, welches für m ganz auf der positiven Seite der z liegt und beim Abnehmen von m stets kleiner wird, auf die negative Seite zu rücken. Ist nun m für den Werth -1 null, so fällt dasselbe mit der y-Axe zusammen. Bei weiterer Abnahme von m entfernt sich dasselbe wieder von der y-Axe, bei weiterer Annäherung an -2 nähert es sich der Asymptote $z = -2$, so daß immer zwischen diesem Hauptmaximum und der asymptotischen Annäherung ein Wendepunkt der Kurve liegt.



Es ergibt nun für $y = (-\frac{9}{10} Pz)$:

$(-\frac{9}{10}P_0) = 1$

$(-\frac{9}{10}P_{\frac{1}{10}}) = 0{,}000\,000$

$(-\frac{9}{10}P_{\frac{1}{2}}) = -2{,}585\,346$

$(-\frac{9}{10}P_1) = 0{,}900\,000$

$(-\frac{9}{10}P_{\frac{11}{10}}) = 0{,}000\,000$

$(-\frac{9}{10}P_{\frac{3}{2}}) = +3{,}577\,485 \left\{= -\frac{14}{10}(-\frac{9}{10}P_{\frac{1}{2}})\right\}$

$(-\frac{9}{10}P_2) = +1{,}710\,000 \left\{= -\frac{9}{10}\cdot\left(\frac{-9}{10} - 1\right)\right\}$

$(-\frac{9}{10}P_{\frac{21}{10}}) = 0{,}000\,000$

$(-\frac{9}{10}P_{\frac{5}{2}}) = -8{,}585\,965 \left\{= -\frac{24}{10}(-\frac{9}{10}P_{\frac{3}{2}})\right\}$

u. s. w.

$(-\frac{9}{10}P_{-\frac{1}{2}}) = 6{,}388\,367 \left\{= -\frac{10}{4}(-\frac{9}{10}P_{\frac{1}{2}})\right\}$

$(-\frac{9}{10}P_{-1}) = 10{,}000\,000 \left\{= \frac{1}{1-\frac{9}{10}}\right\}$

$(-\frac{9}{10}P_{-\frac{3}{2}}) = 10{,}647\,27 \left\{= \frac{10}{6}(-\frac{9}{10}P_{-\frac{1}{2}})\right\}$

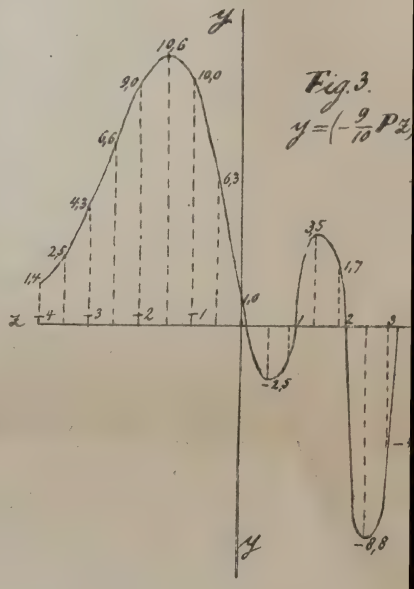
$(-\frac{9}{10}P_{-2}) = 9{,}090\,909 \left\{= \frac{1}{1-\frac{9}{10}}\cdot\frac{1}{2-\frac{9}{10}}\right\}$

$(-\frac{9}{10}P_{-\frac{5}{2}}) = 6{,}654\,548 \left\{= \frac{10}{16}(-\frac{9}{10}P_{-\frac{3}{2}})\right\}$

$(-\frac{9}{10}P_{-3}) = 4{,}329\,004 \left\{= \frac{1}{1-\frac{9}{10}}\cdot\frac{1}{2-\frac{9}{10}}\cdot\frac{1}{3-\frac{9}{10}}\right\}$

u. s. w.

Kurve $y = (-\frac{9}{10} Pz)$ siehe Fig. 3.



3). Ist m ein Werth -1 weniger, um so weiter entfernt sich das Hauptmaximum links von der z-Axe. Für $m = -1$ existirt dasselbe nicht mehr, sondern die Kurve $y = (-1Pz)$ repräsentirt nur eine Reihe isolirter Punkte, die abwechselnd auf der positiven und auf der negativen Seite der y liegen.

Wenn ist nun bis:

$(-1P_0) = 1$

$(-1P_{-1}) = \frac{(-1P_0)}{-1+1} = \frac{1}{0} = \infty$

$(-1P_1) = -1$

$(-1P_{-2}) = \frac{(-1P_{-1})}{-1+2} = \infty$

$(-1P_2) = -1.-2 = 1.2$

$(-1P_3) = -1.-2.-3 = -1.2.3$

u. s. w.

Fiala

Giebt man in $y=(-1Pz)$ dem z einen gebrochenen Werth, so erhält man stets imaginäre Ordinaten. Denn bezeichnen n und z' Zahlen, die prim zu einander sind, so ist $(0P\frac{n}{z'})$ stets ein reeller endlicher Werth. Nun ist aber:

$$(-1P\frac{n}{z'})=\frac{-\frac{n}{z'}}{-1+1}(0P\frac{n}{z'})=\frac{1}{0}(0P\frac{n}{z'})=\infty.$$

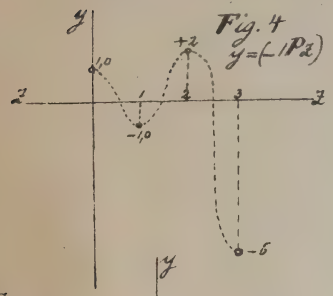


Fig. 4
$y=(-1Pz)$

Die Kurve $y=(-1Pz)$ hat also nur reelle Ordinaten für $z=0,1,2,3\ldots$ u. s. w. siehe Fig. 4.

4). Welche Gestalt die Kurve $y=(mPz)$ für Werthe von m zwischen -1 und -2 annimmt, ergiebt sich aus der graphischen Darstellung Fig. 5, 6, und 7 der folgenden drei Schemata, die Ordinaten der Kurven $y=(-\frac{11}{10}Pz)$, $y=(-\frac{3}{2}Pz)$ und $y=(-\frac{19}{10}Pz)$ repräsentirend:

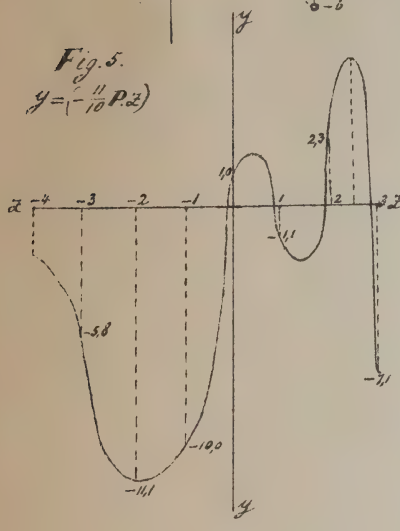


Fig. 5.
$y=(-\frac{11}{10}Pz)$

$$(\frac{-11}{10}P0)=1$$

$(-\frac{11}{10}P\frac{9}{10})=0{,}000\,000$
$(-\frac{11}{10}P1)=-1{,}100\,000$
$(-\frac{11}{10}P\frac{19}{10})=0{,}000\,000$
$(-\frac{11}{10}P2)=2{,}310\,000\ (=\frac{-11.-21}{10.10})$
$(-\frac{11}{10}P\frac{29}{10})=0{,}000\,000$
u. s. w.

$(-\frac{11}{10}P-\frac{1}{10})=0{,}000\,000$
$(-\frac{11}{10}P-1)=-10{,}000\,000\ \{=\frac{1}{1-\frac{11}{10}}\}$
$(-\frac{11}{10}P-2)=-11{,}111\,111\ \{=(-\frac{11}{10}P-1).\frac{1}{\frac{11}{10}}\}$
$(-\frac{11}{10}P-3)=-5{,}847\,953\ \{=(-\frac{11}{10}P-2).\frac{1}{3\frac{11}{10}}\}$
u. s. w.

siehe Fig. 5.

$$(-\frac{3}{2}P0)=1$$

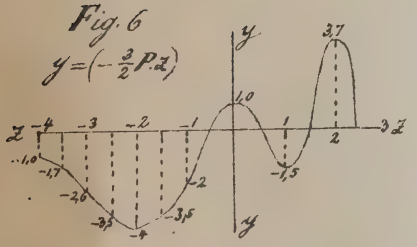


Fig. 6
$y=(-\frac{3}{2}Pz)$

$(-\frac{3}{2}P\frac{1}{2})=0{,}000\,000$
$(-\frac{3}{2}P1)=-1{,}500\,000$
$(-\frac{3}{2}P\frac{3}{2})=0{,}000\,000$
$(-\frac{3}{2}P2)=3{,}750\,000\ \{=\frac{3.5}{2.2}\}$
$(-\frac{3}{2}P\frac{5}{2})=0{,}000\,000$
u. s. w.

$(-\frac{3}{2}P-\frac{1}{2})=0{,}000\,000$
$(-\frac{3}{2}P-1)=-2{,}000\,000\ \{=\frac{1}{-\frac{3}{2}+1}\}$
$(-\frac{3}{2}P-\frac{3}{2})=-3{,}544\,907\ \{=\frac{1}{-\frac{3}{2}+1}(-\frac{1}{2}P-\frac{3}{2})\}$
$(-\frac{3}{2}P-2)=-4{,}000\,000\ \{=\frac{1}{-\frac{3}{2}+1}\cdot\frac{1}{-\frac{3}{2}+2}\}$
$(-\frac{3}{2}P-\frac{5}{2})=-3{,}544\,907\ \{=(-\frac{3}{2}P-\frac{3}{2})\}$
u. s. w.

siehe Fig. 6.

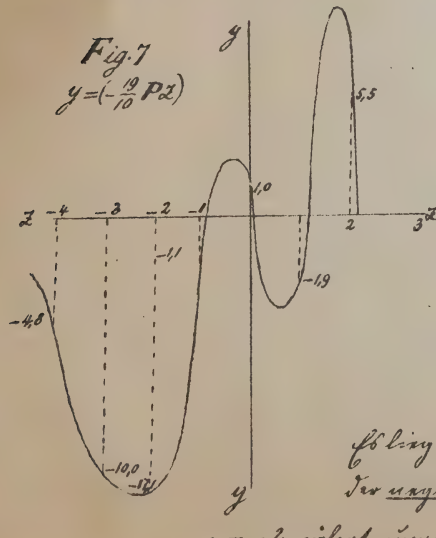


Fig. 7
$y=(-\frac{19}{10}Pz)$

$$(-\frac{19}{10}P0)=1$$

$(-\frac{19}{10}P1)=-1{,}9$
$(-\frac{19}{10}P2)=5{,}51\ \{=\frac{-19.-29}{10.10}\}$
$(-\frac{19}{10}P3)=-21{,}489\ \{=\frac{-19.-29.-39}{10.10.10}$
u. s. w.

$(-\frac{19}{10}P-1)=-1{,}111\,111\ \{=-\frac{10}{9}\}$
$(-\frac{19}{10}P-2)=-11{,}111\,111\ \{=\frac{-10.10}{9.1}\}$
u. s. w.

siehe Fig. 7.

Es liegt also, wenn m zwischen -1 und -2 liegt, das Hauptmaximum der Ordinaten auf der negativen Seite der y. Je mehr sich m in $y=(mPz)$ den Grenzwerthen $m=-1$ und $m=-2$ nähert, um so mehr entfernt sich dieses Maximum von der z-Axe.

Zwischen diesen Grenzwerthen erreicht dasselbe einmal einen kleinsten Werth. Der z-Axe nähert sich die Kurve von der negativen Seite der y assymptotisch.

5). Ist $m=-2$, so erhält man wieder, wie für $m=-1$, ein System von isolirten Punkten, die abwechselnd auf der negativen und positiven Seite der z-Axe liegen. Diese Punkte, in

den

…n statt für

$$z = -1; 0; +1; +2 \ldots \quad \text{siehe Fig. 8.}$$

…r $z = -2$ erhält man keine reelle Ordinate mehr, ebensowenig als für …n andere ganze negative und beliebige gebrochene Werthe von z.

6). Liegt m zwischen -2 und -3, so ergeben sich die Kurvenformen …ig. 9. 10. und 11., den Kurven $y = \left(-\frac{21}{10} P z\right)$, $y = \left(-\frac{5}{2} P z\right)$, $y = \left(-\frac{29}{10} P z\right)$ ent…echend.

…ür $m = -3$ erhält man wieder ein System von isolirten Punkten u. s. w.

…rallgemeinern wir den letzten Theil dieser Diskussion, so ergiebt sich …gendes:

1). Bezeichnet $\frac{m'}{m''}$ einen beliebigen positiven echten Bruchwerth und n eine po…ive ganze Zahl, so schneidet die Kurve: $y = \left(\frac{m'}{m''} - nPz\right)$ die z = Axe außer den …kten auf der positiven z = Seite auf der Minusseite in $n-1$ Punkten, deren …uccessiv:

$$\frac{m'}{m''} - n + 1, \frac{m'}{m''} - n + 2, \ldots \frac{m'}{m''} - n + (n-1)$$

…d. Aus dem Werthe:

$$\left(\frac{m'}{m''} - nP - n\right) = \frac{1}{\left(\frac{m'}{m''} - n + 1\right)\left(\frac{m'}{m''} - n + 2\right)\cdots\left(\frac{m'}{m''} - 1\right)\frac{m'}{m''}},$$

…aus der Beschaffenheit der beiden letzten Faktoren des Nenners folgt, daß für …bestimmtes n das Hauptmaximum der Ordinaten 2 mal sich dem Unendlichen …rt, einmal wenn $\frac{m'}{m''}$ nahezu = Eins und dann, wenn es nahe = Null ist.

…zwischen 0 und 1 liegende Werthe von $\frac{m'}{m''}$ liegt das Hauptmaximum im …lichen, für $\frac{m'}{m''} = 0$ und $= 1$ im Unendlichen, d. h. im letztern Fall hat die Kurve …$\left(\frac{m'}{m''} - nPz\right)$ für $z = -n$ keine reellen Ordinaten mehr.

…t man im Ausdruck $y = \left(\frac{m'}{m''} - nP - z\right)$ dem z einen ganzen positiven Zahl…th $> n$ z. B. $z = n + p$, wobei p eine ganze positive Zahl ist, so entsteht:

$$\left(\frac{m'}{m''} - nP - (n+p)\right)$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{m'}{m''} - n + 1\right)\left(\frac{m'}{m''} - n + 2\right)\cdots\frac{m'}{m''}\left(\frac{m'}{m''} + 1\right)\left(\frac{m'}{m''} + 2\right)\cdots\left(\frac{m'}{m''} + p\right)}.$$

…Nenner dieses Ausdrucks besteht aus zwei Theilen, nämlich:

1) aus dem Produkt $\left(\frac{m'}{m''} - n + 1\right)\cdots\frac{m'}{m''}$, welches für ungerade Werthe von n, …die > 1 sind, positiv, für gerade Werthe von n, die > 2 sind, negativ ausfällt; und

2) aus den Faktoren $\left(\frac{m'}{m''} + 1\right)\cdots\left(\frac{m'}{m''} + p\right)$. Je größer hierin p ist, um so kleiner …der Werth von $\left(\frac{m'}{m''} - nP - (n+p)\right)$.

…aus geht hervor, daß die z = Axe stets Assymptote der Kurve $y = \left(\frac{m'}{m''} - nPz\right)$ …und daß für n ungerade und > 1 die Kurve sich von der positiven Seite, für n …de und > 2 von der negativen Seite derselben nähert.

…Ist in $y = (mPz)$ m negativ ganz, so erhält man:

$$(-mP0) = 1$$

…ach Formel $(mPz) = (m - z + 1)(mPz - 1)$:

$$(-mP1) = (-m - 1 + 1)(-mP0) = -m,$$
$$(-mP2) = (-m - 2 + 1)(-mP1) = +m.m + 1,$$
$$(-mP3) = -m.m + 1.m + 2, \text{ u. s. w.}$$

Fig. 8.

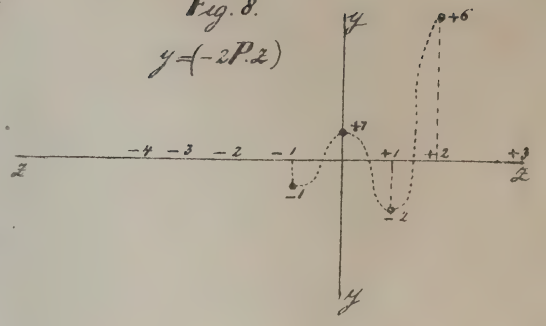


Fig. 9.

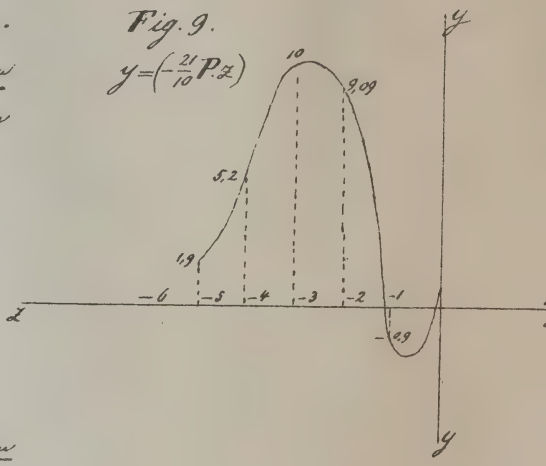


Fig. 10.

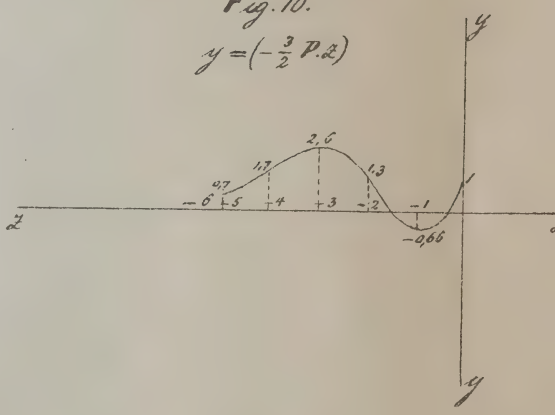
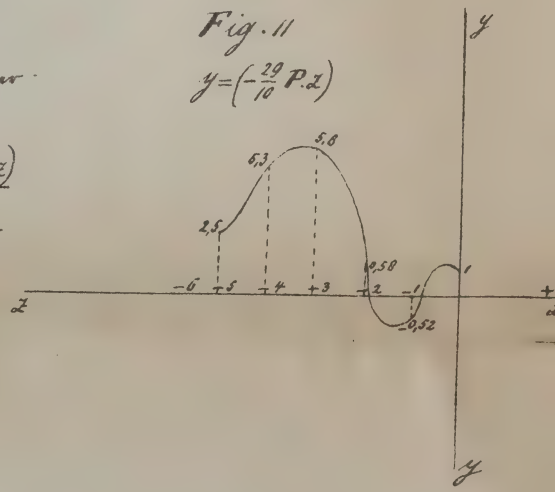


Fig. 11



Die

Die Kurve $y=(-mPz)$ hat also reelle Punkte in Abständen von je Eins von $z=0$ an bis ins Unendliche

Auf der negativen Seite der z erhält man:

$$(-mP-1)=\frac{-(mP0)}{-m+1}=\frac{-1}{m-1},\ (-mP-2)=\frac{(-mP-1)}{-m+2}$$
$$=\frac{+1}{m-1.m-2}\cdots$$

Wird endlich, indem man z successiv den ganzen Zahlen von -1 bis $-m$ gleich setzt, $z=-(m-1)$, so ergibt sich:

$$(-mP-(m-1))=\frac{\pm 1}{m-1.m-2.m-3\cdots(m-(m-1))}.$$

(Das positive Zeichen gilt für m ungerade, das negative für m gerade.) Dagegen wird für $z=-m$:

$$(-mP-m)=\frac{(-mP-(m-1))}{m-m}=\frac{\pm 1}{m-1.m-2\cdots 2.1.0}=\frac{\pm 1}{0},$$

erhält also einen unzulässigen Werth, so wie auch:

$$(-mP-(m+1))=\frac{\pm 1}{0},\ (-mP-(m+2))=\frac{\pm 1}{0},\ \text{u. s. w.}$$

Für ganze negative Werthe von z von $z=-1$ an bis $z=-(m-1)$ hat also die Kurve $y=(-mPz)$ ebenfalls reelle Ordinaten, darüber hinaus aber nicht mehr. Hiermit ist aber die Anzahl der reellen Ordinaten dieser Kurve erschöpft. Denn für einen gebrochenen Werth von z, gleichviel ob positiv oder negativ, erhalten alle Ordinaten die Form $\frac{1}{0}$. Bezeichnen nämlich n und z' Zahlen, die prim zu einander sind, so ist $(0P\frac{n}{z'}$ stets ein reeller Werth. Nun ist aber:

$$(-1P\frac{n}{z'})=\frac{-\frac{n}{z'}}{-1+1}(0P\frac{n}{z'})=\frac{1}{0}(0P\frac{n}{z'})=\infty,$$

$$(-2P\frac{n}{z'})=\frac{-1\frac{n}{z'}}{-2+1}\left\{-1P\frac{n}{z'}\right\}=\infty,\ \text{u. s. w.}$$

Ebenso

$$(-1P-\frac{n}{z'})=\frac{+\frac{n}{z'}}{-1+1}(0P\frac{n}{z'})=\frac{1}{0}(0P\frac{n}{z'})=\infty,$$

$$(-2P\frac{n}{z'})=\frac{-1+\frac{n}{z'}}{-2+1}(-1P-\frac{n}{z'})=\infty,\ \text{u. s. w.}$$

Ist also $-m$ eine negative ganze Zahl, so reducirt sich die Kurve $y=(-mPz)$ auf ein System von isolirten Punkten, von welchen auf der positiven Seite der z unendlich viele, auf der negativen Seite $(m-1)$ abwechselnd auf der positiven und negativen Seite der Ordinaten liegen. Es bleibt uns nun noch zu diskutiren übrig die Funktion:

$$y=(zPz).\ ^{*)}$$

Dieselbe läßt sich zurückführen auf die schon oben betrachtete: $y=(0Pz)$, indem man hat:

$$(zPz)=\frac{1}{(0P-z)}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß (zPz) die Form $\frac{1}{0}=\pm\infty$ erhält für $z=-1,-2,-3,\ldots$ Das Zeichen des Werthes $\pm\infty$ hängt davon ab, von welcher Seite man sich den Abscissen $z=-1,-2,-3,\ldots$ nähert.

Die Kurve $y=(zPz)$ hat daher von $z=-1$ an nach der negativen Seite der z hin unzählich viele je im Abstand Eins befindliche auf der $z=$ Axe senkrecht stehende Assymptoten, an die sich die Aeste der Kurve abwechselnd auf der positiven und negativen Seite der $z=$ Axe anschließen.

Da weiter die Kurve $y=(0P-z)$ zwischen $z=-1$ und $z=-2$, zwischen $z=-3$ und $z=-4$ u. s. w. negative dagegen zwischen $z=0$ und $z=-1$, zwischen $z=-2$ und $z=-3$ u. s. w. positive Ordinatenmaxima besitzt, so folgt, daß die Kurve $y=(zPz)$ in den betreffenden Fällen negative oder positive Minima der Ordinaten besitzt.

Da endlich die beiderseitigen Maxima sich bei der Kurve $y=(0P-z)$ mit dem Größerwerden des negativen z sich immer weiter von der $z=$ Axe entfernen, so nähern sich die Minima der Kurve $y=(zPz)$ um so mehr der $z=$ Axe, einen je größeren negativen Werth z erhält.

---

*) Es bedarf keiner Erinnerung, daß die Funktion (zPz) dieselbe ist, die man gewöhnlich mit $z!$ (Ohm) oder $1^{z|1}$ oder $z^{z|-1}$ bezeichnet.

Bei

Bei der Berechnung der Werthe von $(z P z)$ bedient man sich mit Vortheil der auf dem Wege der Induktion zu mittelnden Gleichung:

$$(z+1 P z+1) = (z+1)(z P z),$$

wie das folgende Schema zeigt:

$(0P0) = 1{,}00000000$

$\left(\frac{1}{2} P \frac{1}{2}\right) = 0{,}88622691$ $\quad \left(-\frac{1}{2} P -\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2} P \frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 1{,}77245382$

$(1P1) = 1{,}00000000$ $\quad (-1P-1) = \frac{(0P0)}{1-1} = \pm\infty$

$\left(\frac{3}{2} P \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} P \frac{1}{2}\right) = 1{,}32934036$ $\quad \left(-\frac{3}{2} P -\frac{3}{2}\right) = \frac{\left(-\frac{1}{2} P -\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{3}{2}} = -3{,}54490764$

$(2P2) = 2.(1P1) = 2{,}00000000$ $\quad (-2P-2) = \frac{(-1P-1)}{-1} = \mp\infty$

$\left(\frac{5}{2} P \frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\left(\frac{3}{2} P \frac{3}{2}\right) = 3{,}32335091$ $\qquad$ u. s. w.

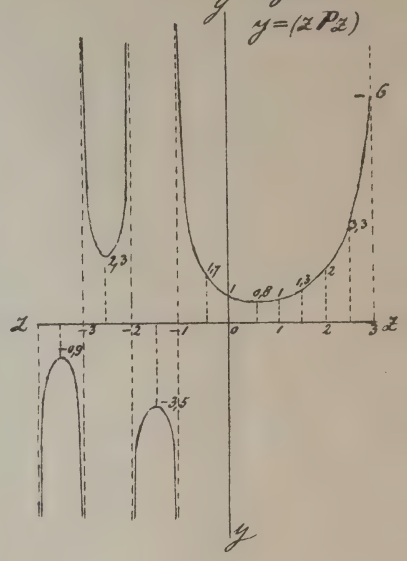
$(3P3) = 3.(2P2) = 6{,}00000000$

u. s. w.

Siehe Fig. 12.

Fig. 12

$y = (zPz)$



8). Anwendung der Ausdrücke (mPz), $(0Pz)$ und (zPz) beim Differentiiren und Integriren.

Wir haben bereits zu Anfang dieser Untersuchungen ausgesprochen, dass der Coefficient von x^{m-z} in dem Ausdruck des z^{ten} Differentialquotienten von x^m, so lange z ganz, positiv oder negativ ist, mit der Funktion (mPz) übereinstimmt.

Es unterliegt nun keinem Zweifel, dass sich die ganzen (positiven oder negativen) Differentialquotienten von x^m auf unzählig viele Arten mit einander verbinden, d. h. Funktionen angeben lassen, die für $z = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ die successiven Werthe

$$\ldots, \frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)}, \frac{x^{m+1}}{m+1}, x^m, mx^{m-1}, m.m-1.x^{m-2},$$
$$m.m-1.m-2.x^{m-3}, \ldots$$

annehmen, jedenfalls ist aber die Funktion (mPz) die einfachste, durch welche diese Interpolation vermittelt werden kann.

Diese Idee liegt der schon oben erwähnten Formel (V):

$$\frac{\partial^z f(x)}{\partial x^z} = \frac{(0Pz)}{x^z}\left\{f(x) + \frac{z}{1}\frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{x}{1-z} + \frac{z.z-1}{1.2}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\cdot\frac{x^2}{1-3\cdot 2-z} + \cdots\right\}$$

zu Grunde, wenn nun unter z nicht nur eine ganze (positive oder negative), sondern eine beliebige ganze oder gebrochene Zahl verstehe.

Da wir nun nach dem Vorangehenden die Funktionen (mPz), $(0Pz)$, (zPz) in ihrem Eigenschaften vollständig bekannt sind und wir die Fälle untersucht haben, in welchen nun für diese Funktionen Ausdrücke von der Form $\frac{1}{0} = \pm\infty$ erfällt, so sind Willkühr zufolge die Grenzen festgestellt, innerhalb deren wir uns bei der Anwendung der Formel $\frac{\partial^z (x^m)}{\partial x^z} = (mPz).x^{m-z}$ zu bewegen hat.

Es ist hiernach klar, dass die Formel $\frac{\partial^z (x^m)}{\partial x^z} = (mPz)x^{m-z}$ nicht zum Ziele führt in dem Fall:

$$\frac{\partial^{-1}(x^{-1})}{\partial x^{-1}} = (-1P-1)x^0 = \pm\infty.$$

Anderseits wissen wir aber nach Früher, dass sich die Integrirung:

$$\frac{\partial^{-1}(x^{-1})}{\partial x^{-1}} = \int\frac{\partial x}{x} = \log^e x$$

nicht mehr in einer Potenz von x zusammenfassen lässt. Genau Dasselbe gilt für:

$$\int\log^e x\,\partial x = \int\left(\int\frac{\partial x}{x}\right)\partial x = \frac{\partial^{-2}(x^{-1})}{\partial x^{-2}}\left[=(-1P-2)x^1 = \pm\infty\right];$$

ebenso:

$$\int\left(\int\log x\,\partial x\right)\partial x = \int\left(\int\left(\int\frac{\partial x}{x}\right)\partial x\right)\partial x$$
$$= \frac{\partial^{-3}(x^{-1})}{\partial x^{-3}}\left[=(-1P-3)x^2 = \pm\infty\right] \text{ u. s. w.}$$

Es findet also die Formel $\frac{\partial^z(x^m)}{\partial x^z} = (mPz)x^{m-z}$ überall dann ihre Anwendung, wenn (mPz) nicht die Form $\frac{1}{0}$ resultirt, oder wenn man durch Differentiation oder Integration einen Ausdruck von der Form $y = x^m$ nicht auf solche Funktionen geführt wird, die sich nicht mehr in einer Potenz von x zusammenfassen lassen. Ist Integration im letzteren Falle die Entwicklung der neuen Funktion nach Potenzen von x bekannt, so lässt sich dann allgemeiner Differentialquotient sofort angeben. Ist nämlich die gegebene Funktion:

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots,$$

so ist der z^{te} Differentialquotient derselben:

$$\frac{\partial^z y}{\partial x^z} = a(0Pz)x^{0-z} + b(1Pz)x^{1-z} + c(2Pz)x^{2-z} + d(3Pz)x^{3-z} + \cdots,$$

wobei:

$$(1Pz) = \frac{(0Pz).1}{1-z},\ (2Pz) = \frac{(0Pz)1.2}{1-z.2-z},\ (3Pz) = \frac{(0Pz)1.2.3}{1-z.2-z.3-z}.\ \text{u. s. w.}$$

ist:

$$\frac{\partial^z(y)}{\partial x^z} = \frac{(0Pz)}{x^z}\left\{a + \frac{1.3.x}{1-z} + \frac{1.2.c.x^2}{1-z.2-z} + \frac{1.2.3.d.x^3}{1-z.2-z.3-z} + \cdots\right\} \quad \text{(XXVI)}$$

Diese Gleichung steht zu der bereits oben entwickelten Formel (V):

$$\frac{\partial^z f(x)}{\partial x^z} = \frac{(0Pz)}{x^z}\left\{f(x) + \frac{z}{1}\frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{x}{1-z} + \frac{z.z-1}{1.2}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\frac{x^2}{1-z.2-z} + \cdots\right\}$$

in einer ähnlichen Beziehung wie der Maklaurin'sche zum Taylor'schen Satz, was sich folgendermaßen ergibt, wenn man statt $a, b, c \ldots$ ihre Werthe:

$$f(0x),\ \frac{\partial f(0x)}{1.\partial x},\ \frac{1}{1.2}\frac{\partial^2 f(0x)}{\partial x^2},\ \cdots$$

setzt. Man erhält nach diesen beiden Sätzen die folgenden allgemeinen Differentialformeln:

$$\frac{\partial^z(e^x)}{\partial x^z} = \frac{(0Pz)}{x^z}\left(1 + \frac{x}{1-z} + \frac{x^2}{1-z.2-z} + \cdots\right)$$

$$= \frac{e^x(0Pz)}{x^z}\left\{1 + \frac{z.x}{1-z} + \frac{z.x^2}{1.2.2-z} + \frac{z.x^3}{1.2.3.3-z} - \cdots\right\} \quad \text{(XXVII)}$$

$$\frac{\partial^z(a^x)}{\partial x^z} = \frac{(0Pz)}{x^z}\left(1 + \frac{x\log^e a}{1-z} + \frac{x^2\log^e{}^2 a}{1-z.2-z} + \cdots\right)$$

$$= \frac{a^x(0Pz)}{x^z}\left\{1 + z\frac{x\log^e a}{1-z} - \frac{z.x^2\log^e{}^2 a}{1-z.2-z} + \frac{z.x^3.\log^e{}^3 a}{1-z.2-z.3-z} - \cdots\right\} \quad \text{(XXVIII)}$$

$$\frac{\partial^z(\sin x)}{\partial x^z} = \frac{(0Pz)}{x^z}\left(\frac{x}{1-z} - \frac{x^3}{1-z.2-z.3-z} + \frac{x^5}{1-z.2-z.3-z.4-z.5-z} - \cdots\right)$$

$$= \frac{(0Pz)}{x^z}\left\{\begin{array}{l} \sin x\left(1 + \frac{z.x^2}{1.2.2-z} - \frac{z.x^4}{1.2.3.4.4-z} + \frac{z.x^6}{1\ldots6.6-z} - \cdots\right) \\ + \cos x\left(\frac{z.x}{1-z} - \frac{z.x^3}{1.2.3.3-z} + \frac{z.x^5}{1\ldots5.5-z} - \cdots\right) \end{array}\right\} \quad \text{(XXIX)}$$

$$\frac{\partial^z(\cos x)}{\partial x^z} = \frac{(0Pz)}{x^z}\left(1 - \frac{x^2}{1-z.2-z} + \frac{x^4}{1-z.2-z.3-z.4-z} - \cdots\right)$$

$$= \frac{(0Pz)}{x^z}\left\{\begin{array}{l} \cos x\left(1 + \frac{z.x^2}{1.2.2-z} - \frac{z.x^4}{1\ldots4.4-z} + \cdots\right) \\ -\sin x\left(\frac{z.x}{1.1-z} - \frac{z.x^3}{1.2.3.3-z} + \frac{z.x^5}{1.2.3.4.5.5-z} - \cdots\right) \end{array}\right\} \quad \text{(XXX)}$$

$$\frac{\partial^z \log^e(x+1)}{\partial x^z} = \frac{(0Pz)}{x^z}\left\{\frac{x}{1-z} - \frac{1.x^2}{1-z.2-z} + \frac{1.2.x^3}{1-z.2-z.3-z} - \cdots\right\}$$

$$= \frac{(0Pz)}{x^z}\left\{\log^e(x+1) + \frac{z}{1}\frac{1}{x+1}\cdot\frac{x}{1-z} - \frac{z.z-1}{1.2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}\frac{x^2}{1-z.2-z} + \cdots\right\}$$

oder, wenn man nicht $\frac{\partial^z(\log^e(x+1))}{\partial x^z}$, sondern $\frac{\partial^z(\log^e x)}{\partial x^z}$ nach Formel (V) direkt entwickelt:

$$\frac{\partial^z(\log^e x)}{\partial x^z} = \frac{(0Pz)}{x^z}\left(\log^e x + z\left\{\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2.2-z} + \frac{1}{3.3-z} + \cdots\right\}\right) \quad \text{(XXXI)}^*)$$

Ebenso

---

*) Diese Gleichung drückt eine höchst merkwürdige Eigenschaft des natürlichen Logarithmus aus. Für ganze negative Werthe von z kann man sich leicht durch unmittelbare Probe von der Richtigkeit derselben überzeugen. Es ist nämlich nach (V):

$$\frac{\partial^{-1}(\log^e x)}{\partial x^{-1}} = x\left(\log^e x - \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots\right)\right).$$

Es ist aber nach Gleichung (XX), wenn man darin $n = 1$ setzt:

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots = 1,$$

Daher:

$$\frac{\partial^{-1}(\log^e x)}{\partial x^{-1}} = x(\log^e x - 1) = \int \log^e x\, dx.$$

Durch

Ebenso: $$\frac{\partial^z(\log^a x)}{\partial x^z} = \frac{(0Pz)}{x^z}\left(\log^a x + z\left\{\frac{1}{1-z\cdot\log^a a} + \frac{1}{2.2-z\cdot\log^2 a} + \cdots\right\}\right). \quad (XXXII)^*)$$

Zu diesen Gleichungen, welche sich mit Anleitung der Formel (V) leicht beliebig vermehren lassen, können wir für bereits öfter angeführten Grundformeln:

$$1)\ \frac{\partial^z(x^m)}{\partial x^z} = (mPz)x^{m-z};\quad 2)\ \frac{\partial^z(x^0)}{\partial x^z} = \frac{\partial^z(1)}{\partial x^z} = (0Pz)x^{0-z};\quad 3)\ \frac{\partial^z(x^z)}{\partial x^z} = (zPz).$$

Die zweite Derselben drückt aus, daß wenn einer Constanten oder die ganzen positiven Differentialquotienten = Null sind, alle übrigen auch nicht.

Die Gleichung 3) drückt für ganze positive Werthe von z eine aus der vorher bekannten des Differentiirens sich ergebende Wahrheit aus; hier aber wird sie uns auf gebrochene Werthe von z ausgedehnt. (Für z negativ ganz führt sie auf die Form $\pm\frac{1}{0}$, ist also für diesen Fall unzulässig.) Zum Schluß der gegenwärtigen Arbeit bestimmen wir auf den allgemeinen Differentialcoefficienten des Trinoms $(A+Bx+Cx^2)^p$ in einer elegantern Form, als ihn Gleichung (V) unmittelbar gibt.

Nennen wir $A+Bx+Cx^2 = y$, so ist $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ und den darauf folgenden ganzen Differentialcoefficienten = Null und die durch z mehrfach Differentiiren von y^p entstehende Gleichung hat die Form:

$$1)\ \frac{\partial^z(y^p)}{\partial x^z} = (pPz)y^{p-z}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^z + (a_0+a_1z+a_2z^2)(pPz-1)y^{p-z+1}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{z-2}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)' + (b_0+b_1z+b_2z^2+b_3z^3+b_4z^4)(pPz-2)y^{p-z+2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{z-4}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 + \cdots.$$

Differentiirt man y^p unmittelbar $(z+1)$ mal, so wird ebenso:

$$2)\ \frac{\partial^{z+1}(y^p)}{\partial x^{z+1}} = (pPz+1)y^{p-z+1}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{z+1} + (a_0+a_1(z+1)+a_2(z+1)^2)(pPz)y^{p-z}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{z-1}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (b_0+b_1(z+1)+b_2(z+1)^2+b_3(z+1)^3+b_4(z+1)^4)(pPz-1)y^{p-z+1}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{z-3}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 + \cdots.$$

Dasselbe muß nun erfüllen, wenn nun die Gleichung 1) einmal differentiirt, nämlich:

$$3)\ \frac{\partial^{z+1}(y^p)}{\partial x^{z+1}} = (pPz+1)y^{p-z-1}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{z+1} + \left\{\begin{array}{l}(pPz)y^{p-z}\cdot z\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{z-1}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\ (pPz)y^{p-z}(a_0+a_1z+a_2z^2)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{z-1}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l}(z-2)(pPz-1)y^{p-1+1}(a_0+a_1z+a_2z^2)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{z-3}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 \\ +(b_0+b_1z+b_2z^2+b_3z^3+b_4z^4)(pPz-1)y^{p-z+1}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{z-3}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2\end{array}\right\} + \cdots;$$

wobei wieder wegen $y = A+Bx+Cx^2$ die höheren Differentialquotienten von dem 3ten an = Null gesetzt werden. Dieser erfüllt nun mit Gleichsetzung der in 2) und 3) mit einander correspondirenden Werthe:

$a_0+a_1(z+1)$

Durch Differentiiren hiervon erfüllt nun wieder:

$$\frac{\partial(x\log^e x - x)}{\partial x} = \log^e x.$$

Ebenso nach Formel (XXX): $$\frac{\partial^{-2}(\log^e x)}{\partial x^{-2}} = \frac{x^2}{1.2}\left(\log^e x - \left(\frac{2}{1.3}+\frac{2}{2.4}+\frac{2}{3.5}+\cdots\right)\right)$$

Nach (XX) ergibt sich aber für $n=2$: $\frac{2}{1.3}+\frac{2}{2.4}+\frac{2}{3.5}+\cdots = 2-\frac{2}{2.1.2} = \frac{6}{4}$.

Daher: $$\frac{\partial^{-2}(\log^e x)}{\partial x^{-2}} = \frac{x^2}{1.2}\left(\log^e x - \frac{6}{4}\right) = \int\left(\int \log^e x\,\partial x\right)\partial x.$$

Durch zweimaliges Differentiiren erfüllt nun wirklich wieder:

$$\partial^2\left(\frac{x^2\log^e x}{2} - \frac{3}{4}\right) = \log^e x \text{ u. s. w.}$$

---

*) Bei diesen sämmtlichen Formeln gilt stillschweigend das Versteh'n von z nur die Beschränkung, daß sie nie auf Ausdrücke von der Form $\frac{1}{0}$ führen darf (1. oben). Zuweilen ist jedoch die Form $\frac{1}{0}$ unschädlich, so wird z. B. die Gleichung (V):

$$\frac{\partial^z(f(x))}{\partial x^z} = \frac{(0Pz)}{x^z}\left(f(x) + \frac{z}{1}\frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{x}{1-z} + \frac{z.z-1}{1.2}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\frac{x^2}{1-z.2-z} + \cdots\right),$$

wenn z positiv ganz = n ist, die n ersten Werthe des Klammer-Coefficienten nämlich:

$$(0Pz) = 1-z.2-z.3-z\ldots(n-z)(0Pz-n)$$

alle = 0 und der $(n+1)^{te}$ Theilsatz erfüllt nicht die Form $\frac{1}{0}$, weil sich das Product $1-z\ldots n-z$ im Zähler und Nenner streicht. Die folgenden Glieder nun $(n+2)^{te}$ u. s. werden Null, so daß übrig bleibt: $\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} = \frac{n\ldots 1}{1\ldots n}\frac{x^n}{x^n}\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}$, was sich selbst versteht.

$$a_0+a_1(z+1)+a_2(z+1)^2=z+a_0+a_1z+a_2z^2,$$
$$b_0+b_1(z+1)+b_2(z+1)^2+b_3(z+1)^3+b_4(z+1)^4=(z-2)(a_0+a_1z+a_2z^2)$$
$$+b_0+b_1z+b_2z^2+b_3z^3+b_4z^4,$$
$$c_0+c_1(z+1)+c_2(z+1)^2+c_3(z+1)^3+c_4(z+1)^4+c_5(z+1)^5+c_6(z+1)^6$$
$$=(z-4)(b_0+b_1z+b_2z^2+b_3z^3+b_4z^4)$$
$$+c_0+c_1z+c_2z^2+c_3z^3+c_4z^4+c_5z^5+c_6z^6,$$
$$\text{u. s. w.}$$

woraus folgt:

$a_1=-\frac{1}{2}$, $a_2=+\frac{1}{2}$;

$b_1=-\frac{3}{4}$, $b_2=\frac{11}{8}$, $b_3=-\frac{3}{4}$, $b_4=+\frac{1}{8}$;

$c_1=-\frac{5}{4}$, $c_2=\frac{137}{24}$, $c_3=-\frac{225}{48}$, $c_4=\frac{85}{48}$, $c_5=-\frac{5}{16}$, $c_6=\frac{1}{48}$; u. s. w.

Es läßt sich weiter folgern, daß $a_0=b_0=c_0=\dots=0$ sein müssen. Man hat demnach:

$$4)\ \frac{\partial^z(y^p)}{\partial x^z}=(pPz)y^{p-z}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^z+\left(-\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}z^2\right)(pPz-1)y^{p-z+1}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{z-2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$
$$+\left(-\frac{3}{4}z+\frac{11}{8}z^2-\frac{3}{4}z^3+\frac{1}{8}z^4\right)(pPz-2)y^{p-z+2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{z-4}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2$$
$$+\left(-\frac{5}{2}z+\frac{137}{24}z^2-\frac{225}{48}z^3+\frac{85}{48}z^4\right.$$
$$\left.-\frac{5}{16}z^5+\frac{1}{48}z^6\right)(pPz-3)y^{p-z+3}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{z-6}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^3+\dots.$$

Es läßt sich nun durch Schlüsse, die denen ähnlich sind, die zur Ableitung des Ausdrucks der Coefficienten geführt haben, nachweisen, daß die successiven Klammerausdrücke:

$$\left(-\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}z^2\right),\ \left(-\frac{3}{4}z+\frac{11}{8}z^2-\frac{3}{4}z^3+\frac{1}{8}z^4\right),\dots.$$

successive die Werthe 0 und 1; 0, 1, 2 und 3; u. s. w. zu Würzeln haben müssen, wodurch die Gleichung folgende Gestalt annimmt:

$$\frac{\partial^z(A+Bx+Cx^2)^p}{\partial x^z}=(pPz)\left\{\begin{array}{l}(A+Bx+Cx^2)^{p-z}(B+2Cx)^z+\frac{1}{2}\frac{z.z-1}{p-z+1}(A+Bx+Cx^2)^{p-z+1}(B+2Cx)^{z-2}.2C\\ +\frac{1}{2.4}\frac{z.z-1.z-2.z-3}{p-z+1.p-z+2}(A+Bx+Cx^2)^{p-z+2}(B+2Cx)^{z-4}(2C)^2\\ +\frac{1}{2.4.6}\frac{z.z-1.z-2.z-3.z-4.z-5}{p-z+1.p-z+2.p-z+3}(A+Bx+Cx^2)^{p-z+3}(B+2Cx)^{z-6}(2C)^3+\dots.\end{array}\right\}\cdot(\text{XXXIII})$$

Ist p negativ ganz und z ebenfalls und $<p$, so gilt nun der Formel (XXXIII) eine andere Form, die sich ergiebt, wenn man in Gleichung (V):

$$f(x)=y^p=(A+Bx+Cx^2)^p,\ \frac{\partial y}{\partial x}=B+2Cx,\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=2C$$

setzt. Man erhält so:

$$\frac{\partial^z(y^p)}{\partial x^z}=\frac{(pPz)}{x^z}\left\{y^p+\frac{z}{1}\frac{\partial(y^p)}{\partial x}\frac{x}{1-z}+\frac{z.z-1}{1.2}\frac{\partial^2(y^p)}{\partial x^2}\frac{x^2}{1-z.2-z}+\dots\right\}.$$

Diese successiven Differentialcoefficienten von y^p gibt aber Gleichung (XXXIII), so daß diese Gleichung folgende Gestalt annimmt:

---

*) Ist z positiv ganz, so besteht der Klammerausdruck in Gleichung (XXXIII) statt aus einer endlichen Reihe, derjenige. Für alle gebrochenen Werthe von z erhält man für $\frac{\partial^z(A+Bx+Cx^2)^p}{\partial x^z}$ unendliche Reihen. Ist p negativ ganz, z. B. $=-n$, und z negativ ganz und $<p$, z. B. $=-(n+b)$, so wird dann die Reihe (XXXIII) wegen des unzulässigen Faktors $\{-n P-(n+b)\}$ nicht mehr anwendbar.

Die Reihe (XXXIII) ist übrigens, sofern sie nicht schon von einem gewissen Gliede abbricht, stets convergent, wenn der Bruch:

$$(A+Bx+Cx^2)(B+2Cx)^2(2C)$$

für den selben Quotient das $(n+1)^{te}$ und n^{te} Glied für $n=\infty$ unbestimmt, $<\frac{1}{2}$ und >-1 ist.

$\partial^z(A+B$

$$\frac{\partial^z (A+Bx+Cx^2)^p}{\partial x^z}$$

$$\frac{(0Pz)}{x^z}\left\{\begin{aligned}
&(A+Bx+Cx^2)^p+\frac{z}{1}\left[(pP1)(A+Bx+Cx^2)^{p-1}(B+2Cx)\right]\frac{x}{1-z}\\
&+\frac{z.z-1}{1.2}\left[(pP2)(A+Bx+Cx^2)^{p-2}(B+2Cx)^2+\frac{1}{2}\,2.1(pP1)(A+Bx+Cx^2)^{p-1}2C\right]\frac{x^2}{1-z.2-z}\\
&+\frac{z.z-1.z-2}{1.2.3}\left[(pP3)(A+Bx+Cx^2)^{p-3}(B+2Cx)^3+\frac{1}{2}.3.2(pP2)(A+Bx+Cx^2)^{p-2}(B+2Cx)2C\right]\frac{x^3}{1-z.2-z.3-z}\\
&+\frac{z.z-1.z-2.z-3}{1.2.3.4}\Big[(pP4)(A+Bx+Cx^2)^{p-4}(B+2Cx)^4+\frac{1}{2}.4.3(pP3)(A+Bx+Cx^2)^{p-3}(B+2Cx)2C\\
&\qquad+\frac{1}{2.4}.4.3.2.1(pP2)(A+Bx+Cx^2)^{p-2}(2C)^2\Big]\frac{x^4}{1-z.2-z.3-z.4-z}
\end{aligned}\right\}\quad(\text{XXXIV})$$

Diese Reihe ist dann anwendbar, wenn z negativ ganz ist; nur gibt sie dann stets unendliche Reihen.

Ist z positiv ganz, z. B. $= \alpha$, so ist

$$(0P\alpha)=\frac{1-\alpha}{1}.\frac{2-\alpha}{2}\cdots\frac{\alpha-\alpha}{\alpha}(\alpha P\alpha),$$

und es streicht sich $(1-\alpha)\ldots(\alpha-\alpha)$ gegen dasselbe Produkt im Nenner des $(\alpha+1)^{\text{ten}}$ Gliedes der Klammer, so daß übrig bleibt:

$$\frac{\partial^\alpha (A+Bx+Cx^2)^p}{\partial x^\alpha}$$

$$=\frac{\alpha.\alpha-1\ldots(\alpha-\alpha+1}{1\ldots\alpha}(pP\alpha)\left[(A+Bx+Cx^2)^{p-\alpha}(B+2Cx)^\alpha+\frac{1}{2}\frac{\alpha.\alpha-1}{p-\alpha+1}\cdots\right],$$

was Gleichung (XXXIII) unmittelbar gibt.

Ist p positiv ganz, so bricht Gleichung (XXXIV) an einem bestimmten Gliede ab.

Auch eine dem Taylor'schen Satze analoge allgemeine Differentiirformel kann man bei unmittelbarer Anwendung der Formel (V) auf denselben entwickeln.

Die Ausführung dieser Entwickelung würde die Gränzen dieses Aufsatzes überschreiten, weßhalb hier nur das Resultat derselben folgt:

$$\frac{\partial^z f(x+h)}{\partial x^z}=\frac{(0Pz)}{x^z}\left\{\begin{aligned}
&f(x)\left[1-\frac{z}{x}h+\frac{z.z+1}{x^2}\frac{h^2}{1.2}-\frac{z.z+1.z+2}{x^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\ldots\right]\\
&+\frac{\partial f(x)}{\partial x}\left[\frac{z}{1}\frac{x}{1-z}+\frac{z+1}{1}h-\frac{z+2}{1}\frac{z}{x}\frac{h^2}{1.2}+\frac{z+3}{1}\frac{z.z+1}{x^2}\frac{h^3}{1.2.3}-\ldots\right]\\
&+\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\left[\frac{z.z-1}{1.2}\frac{x^2}{1-z.2-z}+\frac{z+1.z}{1.2}.\frac{x}{1-z}h+\frac{z+2.z+1}{1.2}\frac{h^2}{1.2}-\frac{z+3.z+2}{1.2}\frac{z}{x}\frac{h^3}{1.2.3}+\ldots\right]\\
&+\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3}\Big[\frac{z.z-1.z-2}{1.2.3}\frac{x^3}{1-z.2-z.3-z}+\frac{z+1.z.z-1}{1.2.3}\frac{x^2}{1-z.2-z}h+\frac{z+2.z+1.z}{1.2.3}\frac{x}{1-z}\frac{h^2}{1.2}\\
&\qquad+\frac{z+3.z+2.z+1}{1.2.3}.\frac{h^3}{1.2.3}-\frac{z+4.z+3.z+2}{1.2.3}\frac{z}{x}\frac{h^4}{1.2.3.4}+\ldots\Big]\\
&+\frac{\partial^4 f(x)}{\partial x^4}\left[\ldots\right]+\ldots
\end{aligned}\right\}\quad(\text{XXXV})$$

Für $z=0$ verwandelt sich diese Formel wieder in die Taylor'sche, für $z=-1$ und $h=0$ in die Bernoulli'sche.

Inhalt

Inhalt

1.	Allgemeiner Begriff des Differentiirens	1 — 4
2.	Die Faktorielle $(m P z)$	4 — 8
3.	Entwickelung von $\overset{e}{log}(m P z)$	8 — 11
4.	Entwickelung von $\overset{e}{log}(z P z)$	12 — 15
5.	Entwickelung von $\overset{e}{log}(o P z)$, sowie von $(z P z)$ und $(o P z)$	15
6.	Wirkliche Auswerthung der Funktionen $y=(m P z)$ und $y=(z P z)$	15 — 17
7.	Diskussion der Funktion $y=(m P z)$	17 — 23
8.	Anwendung der Ausdrücke $(m P z)$, $(o P z)$ und $(z P z)$ beim Differentiiren und Integriren	23 — 27

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
FOUNDED BY JOHN D. ROCKEFELLER

THE DECENNIAL PUBLICATIONS

INVARIANTS OF DIFFERENTIAL QUANTICS

BY

H. MASCHKE

ASSOCIATE PROFESSOR OF MATHEMATICS

PRINTED FROM VOLUME IX

CHICAGO
THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS
1903

Copyright 1903
BY THE UNIVERSITY OF CHICAGO

PRINTED APRIL 1, 1903

INVARIANTS AND COVARIANTS OF QUADRATIC DIFFERENTIAL QUANTICS OF n VARIABLES

H. MASCHKE

IN the article[1] "A New Method of Determining the Differential Parameters and Invariants of Quadratic Differential Quantics, I have shown that the application of a certain symbolic method leads very readily to the formation of expressions remaining invariant with respect to the transformation of quadratic differential quantics. While, however, in that article I have confined the work essentially to the case of two independent variables, in the following an attempt will be made to treat the general case of n independent variables.

§1. DEFINITIONS. THE FUNDAMENTAL THEOREM

To the given quadratic differential quantic

$$A = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k \ , \tag{1}$$

with $x_1, x_2, \cdots x_n$ as independent variables, and the a_{ik} $(a_{ki}=a_{ik})$ as functions of these variables, we apply the transformation

$$x_i = x_i(y_1, y_2, \cdots y_n) \qquad (i=1, 2, \cdots n) \ , \tag{2}$$

and obtain

$$A = A' = \sum_{i,k=1}^{n} a'_{ik}\, dy_i\, dy_k \ . \tag{3}$$

Since the differentials dy are connected linearly with the differentials dx by means of the formulas

$$dx_i = \sum_{k=i}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial y_k}\, dy_k \qquad (i=1, 2, \cdots n) \ , \tag{4}$$

we have at once, denoting the discriminant of A by $|a_{ik}|$,

$$|a'_{ik}| = r^2 |a_{ik}| \ , \tag{5}$$

where r denotes the determinant of the linear substitution, viz.:

$$r = \left| \frac{\partial x_i}{\partial y_k} \right| \ . \tag{6}$$

Let now $u, v, \cdots$ be any (arbitrary) functions of $x_1, x_2, \cdots x_n$; $u', v', \cdots$ the same functions after application of the transformation (2), then we call every function of the coefficients a_{ik} and their derivatives, and of $u, v, \cdots$ and their derivatives, an

[1] *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. I, No. 2, pp. 197-204.

invariant expression of the quadratic differential quantic A, if the expression remains the same, whether formed with the old quantities a_{ik}, u, v, $\cdots$ and their derivatives with respect to x, or with the new quantities a'_{ik}, u', v', $\cdots$ and their derivatives with respect to y.

From $u' = u$ it follows, for instance, that every arbitrary function of x is an invariant expression of A.

If such an invariant expression involves one or more arbitrary functions u, v, $\cdots$ and their derivatives, it is called a *differential parameter;* if it involves no such functions, if it is therefore a function of the a_{ik} and their derivatives alone, it is called an *invariant proper.*[2]

By the *order* of an invariant expression we shall understand the order of the highest derivative appearing in it.

Suppose now $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, $\cdots$ $F^{(n)}$ are any n invariant expressions of A, then we have

$$F'^{(i)} = F^{(i)} \qquad (i=1, 2, \cdots n) ,$$

and also

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F'^{(i)}}{\partial y_k} dy_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F^{(i)}}{\partial x_k} dx_k \qquad (i=1, 2, \cdots n) .$$

It now follows at once

$$\left| \frac{\partial F'^{(i)}}{\partial y_k} \right| = r \cdot \left| \frac{\partial F^{(i)}}{\partial x_k} \right| ,$$

and therefore with reference to (5)

$$|a'_{ik}|^{-\frac{1}{2}} \cdot \left| \frac{\partial F'^{(i)}}{\partial y_k} \right| = |a_{ik}|^{-\frac{1}{2}} \cdot \left| \frac{\partial F^{(i)}}{\partial x_k} \right| . \tag{7}$$

This equation defines the last expression as an invariant expression, and so we have the fundamental theorem:

"*If* $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, $\cdots$ $F^{(n)}$ *are any n invariant expressions of* A, *then*

$$|a_{ik}|^{-\frac{1}{2}} \cdot \left| \frac{\partial F^{(i)}}{\partial x_k} \right|$$

is again an invariant expression of A."

§ 2. CHOICE OF CONVENIENT NOTATIONS

Since we shall have in the following to compute continuously with expressions of the type (7), a shorter notation is indispensable. Let us first agree to indicate differentiation by subscripts. F being any quantity whatever, we write

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = F_i . \tag{8}$$

[2] *Cf.* LUIGI BIANCHI, *Vorlesungen über Differentialgeometrie;* autorisierte deutsche Uebersetzung von MAX LUKAT (Leipzig, 1899), p. 39.

We further denote the reciprocal value of the (positive) square root of the discriminant of A—which we always suppose to be different from zero—by the single letter β:[3]

$$\beta = |a_{ik}|^{-\frac{1}{2}} . \tag{9}$$

The functional determinant of any n quantities $F^{(i)}$ $(i=1, 2, \cdots n)$ (for which we simply write F^i, if there is no interference with the usual notation of powers) will be denoted by

$$\{F^1, F^2, F^3, \cdots F^n\} ,$$

so that we have

$$\{F^1, F^2, F^3, \cdots F^n\} = \left| \frac{\partial F^{(i)}}{\partial x_k} \right| . \tag{10}$$

The product of β into such a functional determinant will be denoted by

$$(F^1, F^2, \cdots F^n) = \beta \{F^1, F^2, \cdots F^n\} . \tag{11}$$

The quantities we have almost exclusively to deal with in the sequel are not the functional determinants themselves, but their products into β, and for this reason we use for the latter quantities the simpler symbol ( ) instead of { }.[4]

Even this notation is for most cases too cumbersome. We write then simply

$$(F^1, F^2, \cdots F^n) = (F) . \tag{12}$$

If it should be necessary to indicate the first, or the first two, three, etc., quantities of such a parenthesis distinctly, we write them in their proper places and let the last letter run out. For instance

$$\begin{aligned} &(a) \text{ means } (a^1, a^2, \cdots a^n) , \\ &(b, a) \text{ means } (b, a^2, a^3, \cdots a^n) , \\ &(b, c, a) \text{ means } (b, c, a^3, a^4, \cdots a^n) . \end{aligned} \tag{13}$$

I give the last example in full:

$$(b, c, a) = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}^{-\frac{1}{2}} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial b}{\partial x_1}, & \frac{\partial b}{\partial x_2}, & \cdots \frac{\partial b}{\partial x_n} \\ \frac{\partial c}{\partial x_1}, & \frac{\partial c}{\partial x_2}, & \cdots \frac{\partial c}{\partial x_n} \\ \frac{\partial a^{(1)}}{\partial x_1}, & \frac{\partial a^{(1)}}{\partial x_2}, & \cdots \frac{\partial a^{(1)}}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial a^{(n)}}{\partial x_1}, & \frac{\partial a^{(n)}}{\partial x_2}, & \cdots \frac{\partial a^{(n)}}{\partial x_n} \end{vmatrix} .$$

It is understood that the letter a occurring in the coefficients a_{ik} of A has no connection whatever with the letter a occurring, for instance, in (b, c, a).

[3] α in my previous paper.

[4] I therefore withdraw the suggestion made in my paper, *loc. cit.*, p. 199, footnote, where the two parentheses ( ) and { } were used in the reversed sense.

The quantities in a parenthesis ( ) should be separated by commas. If, however, no misrepresentation can occur, the commas may be omitted:

$$(bca) = (b, c, a) \ , \quad \text{etc.}$$

The only notation left for the ordinary parenthesis in mathematical formulas is then [ ], since ( ) and { } have now both a specific meaning. Where there is no misunderstanding, also ( ) and { } may be used for ordinary parentheses.

In our new notation the last theorem of § 1 is now this: "*If* $F^1, F^2, \cdots F^n$ *are invariant expressions of* A, *then* (F) *is also an invariant expression of* A;" we shall call it an *invariantive constituent.*

§ 3. THE SYMBOLIC METHOD

If we define

$$f_i f_k = a_{ik} \ , \tag{14}$$

we have

$$A = \sum_{ik} a_{ik}, dx_i, dx_k = \Big[\sum_i f_i dx_i\Big]^2 . \tag{15}$$

The expression $\sum_i f_i dx_i$ appears, if we think of the notation $f_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ agreed upon in (8) as the complete differential of a (symbolic) function of the n variables x.

If expressions of higher than the first dimensions in the coefficients a_{ik} are to be formed symbolically, we have to use different symbols $f, \phi, \cdots$.

For instance

$$a_{12}^2 = f_1 f_2 \phi_1 \phi_2 \ , \quad a_{11} a_{22} = f_1 f_1 \phi_2 \phi_2 \ , \quad \text{etc.}$$

The symbolic functions $f, \phi, \cdots$ (we shall simply call them symbols) appear now, as every arbitrary function $u, v, \cdots$ of the variables x does, as invariant expressions of A.

If now we form invariantive constituents containing the symbols $f, \phi, \cdots$ or $f^1, f^2, \cdots$ and any number of arbitrary functions $u, v, \cdots$, then every product of these constituents will represent an expression which, according to the fundamental theorem of § 1, will represent an expression which is *formally* invariant. But from the same reasoning as in algebra it follows that these products will at once represent *actual* invariant expressions, as soon as the symbols $f, \phi, \cdots$ occur in such connections as to permit actual meaning, *e. g.*, in the connection $f_i f_k$, $\phi_i \phi_k$, etc. The connections of this type, however, are not the only ones. Some of the elements of the different invariantive constituents may be constituents themselves, as for instance in the examples

$$\big((fa), b\big) . (fc) \quad \text{or} \quad \big((fa), (fb), c\big) \ ,$$

where f denotes a symbol. In such cases also the higher derivatives of the symbol f will occur, and it is then the question, whether or not these combinations have actual meaning (they have it in the above examples). Thus we have the following theorem:

Every product of invariantive constituents, the elements of which are symbols or arbitrary functions or both, or again invariantive constituents of the same character, represents an invariant expression of A, provided that every symbol occurs precisely twice and in such a connection as to permit actual interpretation in terms of the a_{ik} and their derivatives.

With regard to these symbolic invariant expressions the following two theorems are evidently true:

The value of an invariant expression in symbolic form is not changed if two equivalent symbols are interchanged, and:

An invariant expression in symbolic form vanishes if by the interchange of two equivalent symbols its sign is changed.

Covariants can now also be formed easily. In the first place, the complete differential of every invariant expression represents immediately a linear covariant of A. Let us denote for simplicity

$$F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + \cdots F_n dx_n = F_x \ . \tag{16}$$

A single symbol and also any invariantive constituent with the subscript x represents then, at least formally, a linear covariant — let us call it a *covariantive constituent.* We therefore obtain covariants of any degree by forming products of these covariantive and invariantive constituents. Thus we have the theorem:

Every product of covariantive and invariantive constituents represents an actual covariant of A, provided that every symbol occurs precisely twice and in such a connection as to permit actual interpretation in terms of the coefficients a_{ik} and their derivatives. The degree of the covariant is determined by the number of the covariantive constituents as factors in the product.

§ 4. SOME IMPORTANT INVARIANT EXPRESSIONS

The simplest possible invariant proper is $(f)^2$, with $f^1, f^2, \cdots f^n$ as equivalent symbols. But this invariant reduces to a constant. To show it we compute first the product

$$P = f_1^1 f_2^2 \cdots f_n^n \{f^1, f^2, \cdots f^n\} \ .$$

If we multiply the first row of the functional determinant by f_1^1, the second by f_2^2, etc., we find at once

$$P = |a_{ik}| = \beta^{-2} \ .$$

If, on the other hand, we permute in P the equivalent symbols f^i in all possible ways, and add the so obtained products, which are all equal, together, we have

$$n! P = \{f^1, f^2, \cdots f^n\}^2 \ .$$

Since now

$$(f)^2 = \beta^2 \{f^1, f^2, \cdots f^n\}^2 \ ,$$

we have the important formula

$$(f)^2 = n! \ . \tag{17}$$

Let us next compute the invariant expression $(uf)^2$, where u denotes an arbitrary function and $f^2, f^3, \cdots f^n$, as before, equivalent symbols. For this purpose, and also for the following, we need a proper notation for the minors of some of our determinants. We denote

by A_{ik}[5] the minor of the element A_{ik} in the determinant $|a_{ik}|$, (18)

and further

by $F^{i,k}$ the minor of the element f_k^i in the determinant $\{f^1, f^2, \cdots f^n\}$. (19)

In this notation we have

$$(uf)^2 = \beta^2 \sum_{ik} F^{1,i} \cdot F^{1,k} u_i u_k \ .$$

But

$$F^{1,i} F^{1,k} = (n-1)!\, f_1 f_2 \cdots f_{i-1} f_{i+1} \cdots f_n \cdot \begin{vmatrix} f_1^2, f_2^2, \cdots f_{k-1}^2, f_{k+1}^2, \cdots f_n^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_1^n, f_2^n, \cdots f_{k-1}^n, f_{k+1}^n, \cdots f_n^n \end{vmatrix} ,$$

or

$$F^{1,i} F^{1,k} = (n-1)!\, A_{ik} \ ,$$

and also

$$F^{\lambda,i} F^{\lambda,k} = (n-1)!\, A_{ik} \ . \tag{20}$$

Hence

$$\frac{1}{(n-1)!} (uf)^2 = \beta^2 \sum_{ik} A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} \ ,^6 \tag{21}$$

which is the well-known first differential parameter $\Delta_1 u$. Thus we have

$$(uf)^2 = (u-1)!\, \Delta_1 u \ . \tag{22}$$

In the same way we obtain

$$\frac{1}{(n-1)!} (uf)(vf) = \beta^2 \sum_{ik} A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} \ ,^6$$

or

$$(uf)(vf) = (u-1)!\, \Delta(u, v) \ . \tag{23}$$

Numerous other differential parameters can be formed; *e. g.* $(u\,vf)^2$, etc.

In all these examples of invariant expressions only the coefficients a_{ik} themselves occur, not their derivatives. In order to derive invariant expressions involving also derivatives of the a_{ik}, we have to express these in terms of our symbols.

We deduce from (14) by differentiation

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} &= f_i f_{kl} + f_k f_{il} \ , \\ \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_i} &= f_k f_{li} + f_l f_{ki} \ , \\ \frac{\partial a_{li}}{\partial x_k} &= f_l f_{ik} + f_i f_{lk} \ , \end{aligned} \tag{24}$$

[5] Bianchi's quantities A_{ik} (*cf. loc. cit.*, p. 37) have a slightly different signification. His A_{ik} is in our notation $=\beta^2 A_{ik}$.

[6] BIANCHI, *loc. cit.*, p. 41.

which gives at once

$$f_i f_{kl} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial a_{il}}{\partial x_k} - \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_i}\right]. \tag{25}$$

The expression on the right side is precisely Christoffel's[7] so-called triple index symbol denoted briefly by $\begin{bmatrix} kl \\ i \end{bmatrix}$.[8]

We have thus the important theorem: *The symbolic product $f_i f_{kl}$ has actual meaning for every system of values i, k, l; it is equal to the triple index symbol*

$$f_i f_{kl} = \begin{bmatrix} kl \\ i \end{bmatrix}. \tag{26}$$

We see, then, further that the following combinations permit actual interpretation in the second derivatives of the a_{ik}:

$$\begin{aligned} f_{im} f_{kl} + f_i f_{klm} &= \begin{bmatrix} kl \\ i \end{bmatrix}_m, \\ f_{ir} f_{ks} - f_{kr} f_{is} &= \begin{bmatrix} ir \\ k \end{bmatrix}_s - \begin{bmatrix} is \\ k \end{bmatrix}_r, \\ f_r f_{iks} - f_s f_{ikr} &= \begin{bmatrix} ik \\ r \end{bmatrix}_s - \begin{bmatrix} ik \\ s \end{bmatrix}_r. \end{aligned} \tag{27}$$

The simplest symbolic invariant expression involving the second derivatives of the symbols f is $((uf), f)$. The computation which will be given at the end of § 6 leads to the result

$$\frac{1}{(n-\iota)!}\Big((uf), f\Big) = \beta^2 \cdot \sum_{ik} A_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} - \beta^4 \cdot \sum_{iklm}{}' A_{ik} A_{lm} \begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_m}.$$

This expression is the second differential parameter $\Delta_2 u$.[9] Hence we have

$$\Big((uf), f\Big) = (n-1)!\, \Delta_2 u. \tag{28}$$

§ 5. RELATIONS BETWEEN SYMBOLIC EXPRESSIONS

For our further computation with symbolic expressions it is necessary to deduce a number of fundamental relations. As a matter of convenience (not of definition) we shall as a rule denote symbols by the letters $a, b, c, \cdots f, e, \cdots$, and any functions of the x (not necessarily symbols) by the letters $u, v, \cdots$.

Differentiating formula (17) with regard to x_i, we have the fundamental formula

$$(f)\,(f)_i = 0. \tag{29}$$

Let now

$$[f] \text{ stand either for } (f) \text{ or for } (f)_i, \tag{30}$$

[7] CHRISTOFFEL, "Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke des zweiten Grades," *Crelle's Journal*, Vol. LXX, p. 48.

[8] BIANCHI, *loc. cit.*, p. 43.

[9] IDEM, *ibid.*, p. 47.

and let us form the symbolic product

$$f_1^1(uf)\,[f]\ .$$

We find

$$f_1^1\{uf\}\,[f]=\begin{vmatrix} f_1^1u_1, & u_2, & \cdots & u_n \\ f_1^1f_1^2, & f_2^2, & \cdots & f_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1^1f_1^n, & f_2^n, & \cdots & f_n^n \end{vmatrix}\cdot[f]=\begin{vmatrix} f_1^1u_1, & u_2, & \cdots & u_n \\ 0, & f_2^2, & \cdots & f_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & f_2^n, & \cdots & f_n^n \end{vmatrix}\cdot[f]$$

because the product $f_1^1f_1^i\,[f]$ changes its sign if the equivalent symbols f^1 and f^i are interchanged, and must therefore vanish; *i. e.*,

$$f_1^1f_1^i\,[f]=0\ .$$

It now follows further

$$f_1^1\{uf\}\,[f]=(n-1)!\,u_1f_1^1f_2^2\cdots f_n^n\,[f]=\frac{(n-1)!}{n!}u_1\{f\}\,[f]\ ,$$

and

$$f_1^1(uf)\,[f]=\frac{1}{n}u_1(f)\,[f]\ .$$

The same method can be applied when we operate with f_i^1 instead of f_1^1, so that we also have

$$f_i^1(uf)\,[f]=\frac{1}{n}u_i(f)\,[f]\ . \tag{31}$$

If now we specify the symbol $[f]$ according to (30) we obtain, changing the notation, the two equations

$$f_k(fa)\,(ua)=(n-1)!\,u_k\ , \tag{32}$$

$$f_k(fa)_i\,(ua)=0\ . \tag{33}$$

With $v^2,\ v^3,\ \cdots v^n$ as arbitrary functions these formulas can at once be extended to

$$(fa)\,(fv)\,(ua)=(n-1)!\,(uv)\ , \tag{34}$$

$$(fa)_i\,(fv)\,(ua)=0\ . \tag{35}$$

A similar method serves to reduce the expression

$$f_1^1f_2^2(uvf)\,[f]\ .$$

We find

$$f_1^1f_2^2\{uvf\}\,[f]=\begin{vmatrix} f_1^1u_1, & f_2^2u_2, & u_3, & \cdots & u_n \\ f_1^1v_1, & f_2^2v_2, & v_3, & \cdots & v_n \\ f_1^1f_1^3, & f_2^2f_2^3, & f_3^3, & \cdots & f_n^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1^1f_1^n, & f_2^2f_2^n, & f_3^n, & \cdots & f_n^n \end{vmatrix}\cdot[f]=\begin{vmatrix} f_1^1u_1, & f_2^2u_2, & u_3, & \cdots & u_n \\ f_1^1v_1, & f_2^2v_2, & v_3, & \cdots & v_n \\ 0, & 0, & f_3^3, & \cdots & f_n^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & f_3^n, & \cdots & f_n^n \end{vmatrix}\cdot[f]\ .$$

Further

$$f_1^1f_2^2\{uvf\}\,[f]=(u-2)!\,(u_1v_2-u_2v_1)f_1^1f_2^2f_3^3\cdots f_n^n\,[f]=\frac{(u-2)!}{u!}(u_1v_2-u_2v_1)\{f\}\,[f]$$

and

$$f_i^1 f_k^2 (uvf)\,[f] = \frac{1}{u(u-1)} (u_i v_k - u_k v_i)\,(f)\,[f]\ . \tag{36}$$

Specifying again the symbol $[f]$, and changing notation, we have finally

$$f_i \phi_k (f \phi a)\,(uva) = (n-2)!\ (u_i v_k - u_k v_i)\ , \tag{37}$$

$$f_i \phi_k (f \phi a)_l\,(uva) = 0\ , \tag{38}$$

two equations, which can easily be extended to many others; I put down only the following three:

$$(f \phi w)\ (f \phi a)\ (uva) = 2(n-2)!\ (uvw)\ , \tag{39}$$

$$f_i\ (f \phi a)_k\ (\phi w)\ (uva) = 0\ , \tag{40}$$

$$(f \phi w)\ (f \phi a)_k\ (uva) = 0\ . \tag{41}$$

By differentiation we deduce from the above given formulas others which will be useful. Differentiating formula (31) with regard to x_k, and observing that

$$f_i^1\ (uf)\,[f]_k = \frac{1}{n} u_1 (f)\,[f]_k$$

from the same reason which led to formula (31), we obtain

$$f_i^1\ (uf)_k\,[f] - \frac{1}{n} u_i\,(f)_k\,[f] = \frac{1}{n} u_{ik}\,(f)\,[f] - f_{ik}^1\,(uf)\,[f]\ ; \tag{42}$$

and finally by specifying $[f]$ according to (30) and changing notation

$$f_i\,(ua)_k\,(fa) = (n-1)!\ u_{ik} - f_{ik}\,(ua)\,(fa)\ , \tag{43}$$

$$f_i\,(ua)_k\,(fa)_l = \frac{1}{n}\,(fa)_k\,(fa)_l\,u_i - f_{ik}\,(ua)\,(fa)_l\ . \tag{44}$$

The first of these equations (43) is of great importance. In every term of the last equation (44) connections of the form $f_{ik} f_{rs}$ occur. Indeed, the different terms of this equation have no actual meaning. Nevertheless the formula is formally correct, and can be used for reduction work with safety. I omit to put down any of the great number of relations which can immediately be deduced from these two formulas.

§6. THE QUADRATIC COVARIANT EXPRESSION AND THE TRIPLE INDEX SYMBOLS OF THE SECOND KIND

From (43) we see that

$$f_i\,(ua)_k\,(fa) = f_k\,(ua)_i\,(fa). \tag{45}$$

this quantity gives rise to the quadratic covariant expression

$$(fa)\,f_x\,(ua)_x = \sum_{ik} (fa)\,f_i\,(ua)_k\,dx_i\,dx_k\ , \tag{46}$$

whose coefficients can be shown to be equal to the "*covariant second derivatives of the function u*" in Bianchi's terminology.[10]

[10] *Loc. cit.*, p. 46.

For this purpose we have first to compute the triple index symbol of the second kind [11]

$$\left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\} = \beta^2 \sum_u A_{lm} \begin{bmatrix} ik \\ m \end{bmatrix} . \tag{47}$$

From (20) and (26) we have

$$(n-1)! \left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\} = \beta^2 f^1_{ik} F^{1,l} \cdot \sum_m f^1_m F^{1,m} = \beta f^1_{ik} F^{1,l} \cdot (f) ,$$

$$\left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\} = \frac{1}{(u-1)!} \beta f^1_{ik} F^{1,l} \cdot (f) , \tag{48}$$

which is the required symbolic representation.

We derive from this equation

$$\sum_m u_m \left\{ \begin{matrix} ik \\ m \end{matrix} \right\} = \frac{1}{(u-1)!} \beta f^i_{ik} (f) \sum_m u_m F^{1,m} ,$$

which gives, with a slight change of notation,

$$\sum_m u_m \left\{ \begin{matrix} ik \\ m \end{matrix} \right\} = \frac{1}{(n-1)!} f_{ik} (ua) (fa) . \tag{49}$$

Now Bianchi's covariant second derivatives of u are defined as follows: [12]

$$u_{(ik)} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} - \sum_m \frac{\partial u}{\partial x_m} \left\{ \begin{matrix} ik \\ m \end{matrix} \right\} . \tag{50}$$

Hence

$$(n-1)!\, u_{(ik)} = (n-1)!\, u_{ik} - f_{ik} (ua) (fa) ,$$

and by means of (43)

$$(n-1)!\, u_{(ik)} = f_i (ua)_k (fa) , \tag{51}$$

which formula verifies the above statement concerning the coefficients of the quadratic covariant expression (46).

This formula leads now also to the proof of (28).

Bianchi defines [13]

$$\Delta_2 u = \beta^2 \sum_{ik} A_{ik} u_{(ik)} , \tag{52}$$

which gives

$$(n-1)!\, \Delta_2 u = \beta^2 (fa) \sum_{ik} A_{ik} f_i (ua)_k .$$

But from (21)

$$\beta^2 \sum_{ik} A_{ik} f_i (ua)_k = \frac{1}{(n-1)!} (f\phi) \big((ua), \phi \big) ,$$

and from (34)

$$(fa) (f\phi) \big((ua), \phi \big) = (n-1)! \big((ua), a \big) ,$$

therefore

$$(n-1)!\, \Delta_2 u = \big((ua), a \big) .$$

[11] CHRISTOFFEL, *loc. cit.*, p. 49, and BIANCHI, *loc. cit.*, p. 43.

[12] *Loc. cit.*, p. 46.

[13] *Loc. cit.*, p. 47, formula (24).

§7. THE QUADRILINEAR COVARIANT AND THE SIMPLEST INVARIANT

In the preceding article we found a quadratic covariant expression. It can be shown that the lowest covariant proper, *i. e.*, one which does not contain any arbitrary function u, is quadrilinear and of the second order. This covariant occurs in Riemann's paper: "Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab ill^ma Accademia Parisiensi propositae: Trouver quel doit être l'état califorique d'un corps solide homogène indéfini pour qu'un système de courbes isothermes, à un distant donné, restent isothermes après un temps quelconque, de telle sorte que la température d'un point puisse s'exprimer en fonction du temps et de deux autres variables indépendantes." The second part of this paper is devoted practically to the analytic deduction of the propositions established in the famous paper: "Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen." The quadrilinear covariant constitutes the numerator of a fraction which Riemann defines as the general measure of curvature.[14]

Christoffel arrived quite independently[15] at the same covariant; it forms the basis of his deductions of the conditions for the equivalence of two quadratic differential quantics.

The covariant is defined in the four sets of differentials, $d^{(1)}x$, $d^{(2)}x$, $d^{(3)}x$, $d^{(4)}x$ as

$$G_4 = \sum_{ikrs} (ikrs)\, d^{(1)}x_i\, d^{(2)}x_k\, d^{(3)}x_r\, d^{(4)}x_s \ ,^{16} \tag{53}$$

where

$$(ikrs) = \frac{\partial \begin{bmatrix} ir \\ k \end{bmatrix}}{\partial x_s} - \frac{\partial \begin{bmatrix} is \\ k \end{bmatrix}}{\partial x_r} + \beta^2 \sum_{lm} A_{lm} \left\{ \begin{bmatrix} is \\ m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} rk \\ l \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ir \\ m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sk \\ l \end{bmatrix} \right\} .^{17} \tag{54}$$

If now we introduce symbols, we have

$$(ikrs) = f_{ir} f_{ks} - f_{is} f_{kr} + \frac{\beta^2}{(n-1)!} \sum_{lm} F^{1,l} \cdot F^{1,m} \cdot [f_m f_{is} \phi_l \phi_{rk} - f_m f_{ir} \phi_l \phi_{sk}] \ ,$$

which expression, considerîng that

$$\beta \cdot \sum_l \phi_l F^{1,l} = (\phi f) \ , \quad \beta \cdot \sum_m f_m F^{1,m} = (f) \ ,$$

is transformed into

$$(ikrs) = f_{ir} f_{ks} - f_{is} f_{kr} + \frac{1}{(n-1)!} (f_{is} \phi_{rk} - f_{ir} \phi_{sk}) (\phi f) (f) \ . \tag{55}$$

But since now, according to (43)

$$\phi_{rk} (\phi f) (f) = (n-1)!\ f_{kr} - \phi_k (f)_r (\phi f) \ ,$$
$$\phi_{sk} (\phi f) (f) = (n-1)!\ f_{ks} - \phi_k (f)_s (\phi f) \ ,$$

[14] *Riemann's gesammelte Werke*, herausgegeben von H. WEBER, 2d ed. (Leipzig, 1892), pp. 403, 412.

[15] In 1869. RIEMANN's paper "Commentatio mathematica" was written 1861, but published only ten years after his death by Weber-Dedekind.

[16] CHRISTOFFEL, *loc. cit.*, p. 58; BIANCHI, *loc. cit.*, p. 50.

[17] RIEMANN, *loc. cit.*, pp. 402, 411; CHRISTOFFEL, *loc. cit.*, p. 54; BIANCHI, *loc. cit.*, p. 51.

the first terms in (55) cancel out so that after a slight change of notation we have

$$(n-1)!\,(ikrs) = [f_{ir}(fa)_s - f_{is}(fa)_r]\,(\phi a)\,\phi_k \ . \tag{56}$$

This leads by means of

$$f_{ir}(fa)_s(\phi a) = \frac{1}{n}(fa)_r(fa)_s\phi_i - f_i(\phi a)_r(fa)_s \ ,$$

and a similar relation with r and s interchanged which follows immediately from (44) to

$$(n-1)!\,(ikrs) = f_i\phi_k\,[(fa)_r(\phi a)_s - (fa)_s(\phi a)_r] \ . \tag{57}$$

Multiplying out and interchanging in the second term the two equivalent symbols f and ϕ, we have also

$$(n-1)!\,(ikrs) = (fa)_r(\phi a)_s\,[f_i\phi_k - f_k\phi_i] \ , \tag{58}$$

and interchanging f and ϕ in both terms of (57) or (58)

$$(n-1)!\,(ikrs) = \frac{1}{2}[(fa)_r(\phi a)_s - (fa)_s(\phi a)_r]\cdot[f_i\phi_k - f_k\phi_i] \ . \tag{59}$$

To each of the parentheses appearing in (57), (58), (59) we now apply formula (37), and thus we find, changing the notation of the symbols, the final result

$$(n-1)!\,(n-2)!\,(ikrs) = \big((af),(bf),c\big)\,(c)\,a_ib_kc_r^1c_s^2 \ , \tag{60}$$

$$(n-1)!\,(n-2)!\,(ikrs) = (f\phi c)\,(c)\,c_i^1c_k^2(fa)_r(\phi a)_s \ , \tag{61}$$

$$2\,(n-1)!\,(n-2)!\,(n-2)!\,(ikrs) = \big((fc),(\phi c),b\big)\,(f\phi a)\,(a)\,(b)\,a_i^1a_k^2b_r^1b_s^2 \ . \tag{62}$$

Each one of these three formulas leads to a symbolic representation of G_4, which at the same time furnishes the proof that G_4 is a covariant of A. From (60), for instance, we have

$$(n-1)!\,(n-2)!\,G_4 = \big((af),(bf),c\big)\,(c)\,a_{x^{(1)}}\,b_{x^{(2)}}\,c_{x^{(3)}}^1\,c_{x^{(4)}}^2 \ . \tag{63}$$

Closely related with this covariant G_4 is the following *invariant of order two:*

$$I_2 = \big((fa),(\phi a),c\big)\,(f\phi c) \ . \tag{64}$$

As its form shows, it is an invariant for every n and represents in particular for $n=2$ the Gaussian curvature:

$$\big((fa),(\phi a)\big)\,(f\phi) = 2K \ .$$

EXTRAIT

DU

Bulletin des Sciences mathématiques

(2e série, t. XII. — Numéro de juin 1888).

LAURENT. — Traité d'Analyse, t. II, 475 p.; t. III, 511 p. Paris, Gauthier-Villars; 1887-1888 (1).

M. Laurent poursuit avec rapidité la publication de son *Traité d'Analyse;* les tomes II et III, que nous avons le plaisir d'annoncer, se rapportent, l'un aux applications géométriques du Calcul différentiel, l'autre aux fondements du Calcul intégral et de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire.

Nous demanderons la permission de passer rapidement sur le second Volume qui est, au fond, un Traité de Géométrie analytique, développé, non dans le sens des propriétés particulières des courbes ou des surfaces spéciales, mais dans le sens des théories générales. Les choses sont en outre présentées de manière à familiariser le lecteur avec l'emploi des divers systèmes de coordonnées et aussi avec le langage et les procédés de la Géométrie projective. L'étude d'une courbe autour d'un point singulier est faite avec détail; les développements dans lesquels l'auteur est entré à ce sujet sont amplement justifiés par l'importance qu'il prend dans le Calcul intégral.

Dans le troisième Volume, après avoir, sous forme d'Introduction, exposé la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples, l'auteur introduit la notion d'intégrale définie et la justifie, d'abord pour les fonctions croissantes dans un intervalle, puis pour les fonctions continues. Passant ensuite aux intégrales indéfinies, il expose les méthodes élémentaires d'intégration : comme application, il traite de l'évaluation des aires et des arcs. L'examen du cas où la quantité sous le signe $\int$ devient infinie est présenté comme une conséquence de l'étude des intégrales singulières de Cauchy. L'étude du cas où l'une des limites de l'intégrale est infinie se relie étroitement à l'étude des séries à termes positifs considérés par le même géomètre; enfin, la théorie des indices, que l'on doit encore à Cauchy, se présente tout naturellement quand on parle des précautions qu'il faut prendre lorsque l'on passe de l'intégrale indéfinie à l'intégrale définie.

(1) Paris, Gauthier-Villars et Fils. Prix de chaque volume : 12 fr.

Après ces théories générales, M. Laurent donne des exemples importants des divers procédés et artifices qui s'appliquent à la recherche des intégrales définies que l'on ne peut obtenir directement.

Il introduit ensuite les intégrales multiples, et donne immédiatement les formules relatives au changement de variables; il établit les diverses formules relatives à l'évaluation, dans les différents systèmes usuels de coordonnées, des volumes ou des surfaces : parmi les applications qu'il en fait, nous signalerons les théorèmes que Gauss a placés au début de son Mémoire sur l'attraction des ellipsoïdes, et qui se rattachent directement aux formules de Green. La troisième des démonstrations données par le même géomètre, de l'existence d'une racine pour toute équation algébrique entière, fournit un bel exemple des précautions qu'il faut prendre dans l'interversion des limites d'une intégrale multiple. L'intégrale

$$\iint \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy,$$

signalée par M. Cayley, est un exemple des précautions qu'exige l'extension des limites à l'infini. Ces utiles remarques sont suivies de quelques notions relatives à l'espace à n dimensions, qui aboutissent aux résultats obtenus par M. Kronecker touchant la représentation, par une intégrale multiple, du nombre de solutions d'un système d'équations simultanées.

M. Laurent s'occupe ensuite de l'intégration des différentielles totales à n variables; il montre, d'après Jacobi, comment les $\frac{n(n-1)}{2}$ conditions d'intégrabilité se réduisent à $2n-3$; il montre aussi comment le théorème fondamental de Cauchy sur les intégrales prises entre des limites imaginaires se rattache directement à ce fait que l'intégrale d'une différentielle exacte prise entre deux points le long d'une courbe ne dépend pas de cette courbe.

C'est à la théorie de ces intégrales prises entre des limites imaginaires et à la théorie des fonctions d'une variable imaginaire, dans le sens de Cauchy, qu'est consacré le reste du volume (1).

(1) Je fais abstraction de quelques pages sur les formules de quadrature.

Cette partie, qui est la plus considérable, est aussi particulièrement intéressante.

On ne saurait nier d'ailleurs que l'admiration pour Cauchy, que l'auteur manifeste si volontiers, est entièrement justifiée par le rôle essentiel qu'a joué notre grand géomètre dans l'établissement de cette théorie. M. Laurent rétablit la terminologie de Cauchy; grâce à lui, le terme *synectique,* qui était tombé en discrédit, on ne sait trop pourquoi, va peut-être rentrer en faveur.

Il reprend d'abord la démonstration du théorème fondamental, qui justifie l'introduction des intégrales à limites imaginaires, en partant, comme Riemann l'a enseigné, de la transformation de l'intégrale double

$$\iint \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx\, dy$$

en une intégrale simple relative au contour de l'aire à laquelle se rapporte l'intégrale double. Il expose ensuite les principes du calcul des résidus, qu'il applique à la détermination d'intégrales définies particulièrement importantes :

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\, dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\, dx, \quad \int_0^\infty \sin x^2\, dx, \quad \ldots$$

Un Chapitre très important, tant au point de vue de la théorie que des nombreuses applications qu'il renferme, est consacré à la théorie des séries. L'auteur insiste, au début, sur la notion de l'uniformité de la convergence et soutient, non sans quelque chaleur, que cette notion ne pouvait manquer à Cauchy, qui n'aurait pas regardé comme convergentes les séries qui ne convergent pas uniformément. Je signalerai, dans ce Chapitre, l'intéressant paragraphe intitulé : *Sur la continuité des fonctions représentées par des séries;* toutefois, les conditions sous lesquelles la démonstration est valable auraient besoin d'être précisées davantage. On trouvera, dans le même Chapitre, les notions fondamentales relatives aux produits infinis, avec une application au produit, considéré par Euler,

$$(1+ax)(1+a^2x)(1+a^3x)\ldots,$$

ainsi que la méthode de Cauchy pour décomposer une fonction en une infinité de fractions rationnelles, avec l'application clas

sique aux fonctions circulaires, qui amène naturellement à donner quelques propriétés des nombres de Bernoulli.

M. Laurent expose ensuite les propriétés essentielles des fonctions synectiques et des fonctions uniformes à discontinuités polaires ou essentielles. Il traite des séries de Burmann, de Wronski, de Lagrange, de Laplace et de Legendre; il indique les caractères auxquels on reconnaît qu'une fonction est entière ou rationnelle. Il démontre, en suivant la marche qu'a fait connaître M. Hermite, le théorème de M. Weierstrass sur la décomposition en facteurs primaires d'une fonction synectique dans tout le plan. Il donne enfin une indication sur le mode de représentation que l'on doit à M. Mittag-Leffler d'une fonction uniforme dans tout le plan avec une infinité de points singuliers essentiels, ou plutôt sur un procédé qui permet, dans un cas très étendu, de parvenir à cette représentation, mais qui ne met pas assez en évidence le caractère général de la proposition de M. Mittag-Leffler. Un Chapitre est ensuite consacré aux séries trigonométriques, tant au point de vue de Dirichlet qu'à celui de Cauchy. On y trouvera exposée la méthode d'intégration, dite des restricteurs, dont Cauchy a fait de nombreuses applications et dont Dirichlet, à qui elle est due, a donné un si mémorable exemple dans le problème de l'attraction des ellipsoïdes. Ce Chapitre se termine par l'exemple que l'on doit à M. Weierstrass d'une fonction continue qui n'admet pas de dérivée. M. Laurent traite ensuite des formules d'interpolation, en particulier de la formule sommatoire d'Euler, et, à ce propos, des polynômes de Bernoulli. L'interpolation du produit $1.2\ldots x$ conduit à introduire la fonction $\Gamma(x)$, dont les propriétés sont développées avec détail. Cette étude est suivie de quelques indications intéressantes sur le calcul des dérivées à indices quelconques; M. Laurent prend pour définition de la dérivée d'ordre n de la fonction monogène $f(z)$, prise à partir de x_0, l'intégrale

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\imath}\int\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}},$$

prise le long d'un lacet ayant son entrée en x_0 et son cercle décrit autour du point x comme centre.

Chaque Chapitre est suivi de nombreux exercices, dont plusieurs sont très intéressants.

On n'a fait, dans ce compte rendu, que signaler l'ordre des principales matières traitées par M. Laurent, sans même indiquer tous les sujets qu'il a abordés. Ce qui précède n'a pu donner au lecteur qu'une idée très imparfaite de la richesse en faits analytiques du volume que nous annonçons. En contribuant à divulguer la doctrine de Cauchy et à montrer la fécondité de cette doctrine, le Livre de M. Laurent rendra de grands services. J. T.

14469 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

Hommage de l'auteur

SUR LE CALCUL

DE

QUELQUES INTEGRALES

PAR

M. Ernest LEBON

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES AU LYCÉE CHARLEMAGNE

EXTRAIT DU *JOURNAL DE MATHEMATIQUES SPÉCIALES*

PARIS

LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE

15, RUE SOUFFLOT, 15

—

1888

EXTRAIT DU *JOURNAL DE MATHEMATIQUES SPÉCIALES (1888)*

SUR LE CALCUL
DE QUELQUES INTÉGRALES

Par M. **Ernest Lebon**
Professeur de mathématiques au Lycée Charlemagne.

1. — Dans le *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* de
[. Ch. Hermite (*) (p. 260), l'illustre Géomètre, après avoir posé

$$u = x \sin x + \cos x,$$
$$v = \sin x - x \cos x,$$

ppelle l'attention sur les intégrales

$$\int \frac{x^2 dx}{u^2} = \frac{v}{u},$$
$$\int \frac{x^2 dx}{v^2} = -\frac{u}{v},$$
$$\int \frac{bx^2 dx}{(au + bv)^2} = -\frac{u}{au + bv},$$

qu'il signale comme ne pouvant pas être trouvées *directement*.
]. Hermite cite encore, a et b désignant, comme dans les for-
mules précédentes, des constantes, l'intégrale

$$\int \frac{a dx}{[a + (ax + b) \operatorname{tang} x]^2} = \frac{\operatorname{tang} x}{a + (ax + b) \operatorname{tang} x}$$

nt on ne peut, dit-il, vérifier la valeur que par la différen-
tion.

*) Gauthier-Villars, Paris, 1873.

En Septembre 1884, j'ai adressé, à M. Hermite, un procédé permettant d'obtenir directement l'expression explicite de l'intégrale de chacune de ces différentielles; et, à ce propos, il m'a fait l'honneur de m'avertir (*) que ces intégrales ont déjà fait l'objet des recherches de M. Stern.

Dans son Mémoire, M. Stern emploie la méthode d'intégration par parties, en prenant pour base la forme des différentielles des fonctions u et v.

Ces intégrales ont provoqué d'ailleurs de nouveaux et récents travaux (**) et il serait peut-être assez inutile de publier aujourd'hui les résultats que j'avais alors obtenus, si le procédé d'intégration que je vais indiquer, différent d'ailleurs de celui de MM. Stern et Pomey, ne m'avait, depuis, conduit à trouver les intégrales de quelques autres différentielles remarquables également signalées par M. Hermite.

2. — En désignant par U et V des fonctions de x, on a

$$\frac{d}{dx}\frac{V}{U} = \frac{V'}{U} - \frac{VU'}{U^2}.$$

D'où

$$\int \frac{VU'dx}{U^2} = -\frac{V}{U} + \int \frac{V'dx}{U}. \tag{1}$$

Par suite, pour trouver, au moyen de la formule (1), une intégrale de la forme

$$\int \frac{Ndx}{U^2}, \tag{2}$$

N étant une fonction de x, on tirera la fonction V de l'égalité

$$N = VU',$$

puis la dérivée V′ de V par rapport à x. Alors, la recherche de l'intégrale (2) sera ramenée à celle de l'intégrale

$$\int \frac{V'dx}{U};$$

or, cette dernière peut être plus facile à trouver que la propo-

(*) *Journal de Crelle*, t. 78, 1874.

(**) *Nouvelles Annales*, 1888, p. 191 : *Quelques intégrales remarquables*, M. Étienne Pomey.

3.—Ce procédé s'applique, avec succès, aux quatre intégrales du § **1**. Pour nous borner, prenons, par exemple, la troisième intégrale.

En posant, pour abréger l'écriture, d'abord

$$U \equiv au + bv,$$

puis, dans le cours des calculs,

$$T \equiv a + b \operatorname{tang} x,$$

nous avons $V = \dfrac{bx}{T \cos x}$, $V' = \dfrac{bU}{T^2 \cos^2 x}$,

$$I = \int \frac{bx^2 dx}{(au + bv)^2} = -\frac{bx}{TU} + \int \frac{b\,dx}{T^2 \cos^2 x}.$$

Mais $$dT = \frac{b dx}{\cos^2 x},$$

nous trouvons donc immédiatement la valeur de l'intégrale contenue dans le second membre, et nous avons

$$I = -\frac{u}{au + bv}.$$

Pour la quatrième intégrale, on pose de même

$$U \equiv a + (ax + b) \operatorname{tang} x,$$

et $$T \equiv a \sin x \cos x + ax + b.$$

On a $V = \dfrac{a \cos^2 x}{T}$, $V' = \dfrac{-2a \cos^2 x . U}{T^2}$,

$$I = -\frac{V}{U} + \int \frac{-2a \cos^2 x dx}{T^2};$$

et, comme $$dT = 2a \cos^2 x dx,$$

on obtient, sur-le-champ, l'expression explicite de cette dernière intégrale, et, finalement,

$$I = \frac{\operatorname{tang} x}{a + (ax + b) \operatorname{tang} x}.$$

4. — Le procédé d'intégration du § **2** permet de calculer rapidement l'intégrale

$$I = \int 2 \left(\cos ax - \frac{\sin ax}{ax}\right) \left(\cos bx - \frac{\sin bx}{bx}\right) dx,$$

que M. Hermite trouve par une méthode moins élémentaire (p. 352 à 358, *loc cit*). Or, en effectuant le produit indiqué, on ramène la recherche de l'intégrale précédente à celle de trois intégrales, et l'on a

$$I = \int \cos mx dx + \int \cos nx dx$$

$$+ \frac{1}{ab}\int (nx \sin nx - mx \sin mx - \cos mx + \cos nx)\frac{dx}{x^2},$$

après avoir posé, pour simplifier l'écriture,

$$m = a + b \quad \text{et} \quad n = a - b.$$

Le calcul des deux premières est immédiat. La troisième traitée par la formule (1), donne pour résultat, après quelque réductions faciles,

$$\frac{\cos mx - \cos nx}{abx}.$$

On a, par suite (*).

$$I = \frac{\sin mx}{m} + \frac{\sin nx}{n} + \frac{\cos mx - \cos nx}{abx}.$$

5. — Le calcul des intégrales de la forme

$$\int \frac{x^{2n}dx}{(P \cos x - Q \sin x)^2},$$

où P et Q désignent le numérateur et le dénominateur de la réduite de la fraction continue de Lambert

$$\operatorname{tang} x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \ldots}}},$$

est encore une application du procédé du § **2**.

Par exemple, en prenant la troisième réduite

$$\frac{15x - x^3}{15 - 6x^2},$$

(1) Dans l'ouvrage de M. Hermite, il faut changer le signe des premier et troisième termes du résultat de la page 359.

trouve

$$\int \frac{x^6 dx}{U^2} = -\frac{x^5}{UU_1} - \frac{x^3}{U_1 U_2} + \frac{x}{U_2 \sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}$$
$$= \frac{P \sin x + Q \cos x}{P \cos x - Q \sin x},$$

rès avoir posé, pour simplifier l'écriture,

$$P \equiv 15x - x^3,$$
$$Q \equiv 15 - 6x^2,$$
$$U \equiv P \cos x - Q \sin x,$$
$$U_1 \equiv 3x \cos x - (3 - x^2) \sin x,$$
$$U_2 \equiv x \cos x - \sin x.$$

Ce résultat est le même que celui que fournit la formule ivante :

$$(3) \qquad \int \frac{x^{2n} dx}{(P \cos x - Q \sin x)^2} = \frac{P \sin x + Q \cos x}{P \cos x - Q \sin x},$$

unnée par M. Hermite (*).

Observons que la seconde intégrale du § **1** est une applica- n de la formule (3), pour le cas de la première réduite.

3. — On peut trouver une formule analogue à la précédente, beaucoup plus générale.

Soient N, P, Q, R, S, φ et ψ sept fonctions quelconques de x. En cherchant, par différentiation, la relation entre ces sept ictions et les dérivées P′, Q′, R′, S′, φ', ψ' des six dernières, ır que la formule

$$(4) \qquad \int \frac{N dx}{(P\varphi + Q\psi)^2} = \frac{R\varphi + S\psi}{P\varphi + Q\psi}$$

t applicable, on trouve l'équation

$$(5) \qquad N = (PR' - RP')\varphi^2 + (QS' - SQ')\psi^2$$
$$+ (PS - QR)(\varphi\psi' - \psi\varphi') + (PS' - SP' + QR' - RQ')\varphi\psi,$$

donne toujours la fonction N, les autres étant connues.

) A la page 360, on lit, au sujet de cette formule : « c'est, sous une ne très simple, la valeur d'une intégrale que nous n'avons point de hode pour aborder, car elle n'appartient à aucune des catégories con- rées jusqu'ici ; on verra comment on y parvient facilement dans la nde partie du Cours. »

Il est facile de vérifier que les fonctions des quatre intégrales du § **1** satisfont à l'équation (5).

7. — Étant donnée une différentielle dont le dénominateur est le carré d'une fonction d'une variable, proposons-nous de rechercher si l'on peut exprimer son intégrale d'après la formule (4), en considérant comme étant inconnues les deux fonctions R et S, et en déterminant ces fonctions de manière que l'équation (5) soit vérifiée.

Supposons que les fonctions N, φ et ψ soient telles que l'on puisse décomposer l'équation (5) en trois termes, formés chacun d'un produit de deux facteurs, dont l'un contienne les fonctions inconnues R, S et leurs dérivées, et dont l'autre ne les contienne pas. En égalant à zéro les facteurs contenant R, S, R′, S′, on aura un système de trois équations, que l'on pourra remplacer par un système équivalent de trois autres équations, dont l'une sera une équation différentielle linéaire contenant soit la fonction R et sa dérivée R′, soit la fonction S et sa dérivée S′. Si l'on peut intégrer cette équation différentielle, on pourra trouver les deux fonctions inconnues.

8. — Pour les quatre différentielles du § **1**, les fonctions N, φ et ψ remplissent la condition précédente.

En effet, considérons la troisième, par exemple. En écrivant ainsi le dénominateur :

$$[(a - bx)\cos x + (ax + b)\sin x]^2,$$

l'équation (5) donne

$$(6)\quad [aS + bR - (ax + b)S' + (a - bx)R']\cos^2 x + [bS - aR + (a - bx)S' + (ax + b)R']\sin x \cos x + [(ax + b)(S' - R) - bx(x + S)] = 0.$$

En égalant à zéro les polynômes entre crochets et en éliminant R et R′ entre les trois équations obtenues, on trouve l'équation différentielle linéaire

$$(7)\qquad S' - \frac{a}{ax + b}S + \frac{b}{ax + b} = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$S = c(ax + b) + \frac{b}{a},$$

désignant une constante arbitraire. Par suite

$$R = c(a - bx) - \frac{b}{a}x.$$

On a donc

$$\int \frac{bx^2}{(au + bv)^2} = \frac{-u}{au + bv} + \frac{1}{a} + c.$$

9. — Dans les différentielles que M. Stern examine comme généralisation des quatre différentielles du § **1**, les fonctions φ et ψ sont telles que l'on peut réduire à trois termes l'équation (5), ces termes étant formés ainsi qu'il est expliqué au § **7**. Par exemple, pour l'intégrale

$$\int \frac{x^2 - (\sin x + \cos x)^2}{[(x - 1)\cos x - (x + 1)\sin x]^2} dx,$$

la relation (5) donne

$$\begin{aligned} &[R - (x - 1)R' + S - (x + 1)S'] \sin^2 x \\ &+ [-R + (x + 1)R' + S - (x - 1)S'] \sin x \cos x \\ &+ [-(x + 1)R - (x - 1)S + x^2 - 1] = 0. \end{aligned}$$

En égalant à zéro les termes entre crochets, en éliminant entre les deux premières équations ainsi obtenues, puis S entre celle que l'on trouve et la troisième, on a

$$R = R'(x - 1);$$

d'où

$$\begin{aligned} R &= c(x - 1), \\ S &= (1 - c)(x + 1), \end{aligned}$$

désignant une constante arbitraire.

En faisant $2c = 1$ dans l'expression générale trouvée pour l'intégrale proposée, on a la valeur particulière que donne Stern.

De même, pour l'intégrale

$$\int \frac{x^2 dx}{[x(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})]^2},$$

la relation (5) donne

$$\begin{aligned} &e^{2x}[R - (x - 1)R' + S - (x - 1)S'] \\ &+ e^{-2x}[R - (x + 1)R' - S + (x + 1)S'] \\ &+ 2[R + xR' + 2xS + S' + x^2] = 0. \end{aligned}$$

En éliminant S entre les deux premières équations obtenues en égalant à zéro les termes entre crochets, puis entre la première et la troisième, et S′ entre les deux nouvelles équations, on a

$$R' - \frac{1}{x} R + \frac{1}{4x} = 0;$$

d'où l'on tire, c étant une constante arbitraire.

$$R = cx + \frac{1}{4},$$

$$S = -\frac{x}{4} - c.$$

La valeur générale de l'intégrale considérée est donc

$$\frac{\left(cx + \frac{1}{4}\right)(e^x - e^{-x}) - \left(\frac{x}{4} + c\right)(e^x + e^{-x})}{x(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})}.$$

Elle est beaucoup plus simple que la valeur particulière donnée par M. Stern.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX,
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 17930-8-8.

Beiträge zur Lehre von der Integration vollständiger Differentiale mit mehreren unabhängigen Variablen.

Programm

der

Königlichen Studienanstalt zu Hof

zur

Schlußfeier des Jahres $18^{60}/_{61}$

von

Eugen Leonhardt,

kgl. Professor der Mathematik und Physik.

Hof, 1861.

Druck der Mintzel'schen Buchdruckerei (C. Hörmann).

Das Problem, die Integration vollständiger Differentiale mit mehreren unabhängigen Variablen zu
lziehen, wird in allen Werken über Integralrechnung auf eine so übereinstimmende Weise vorgetragen,
; jeder Versuch einer abgeänderten Darstellungsweise zu den Unmöglichkeiten zu gehören scheint; und
noch läßt sich diesem Probleme in Folge schärferer Betonung eines in dem Entwickelungsgange auf-
enden Umstandes eine in Fällen nicht unbedeutende Erleichterung gewährende Seite abgewinnen, die
annt zu werden verdient und deßhalb füglich den Gegenstand eines Programmes bilden kann. Der
ite Theil desselben behandelt eine kleine mir einst gestellte Aufgabe, die in das Bereich dieses Zweiges
Integralrechnung gehört. Ich habe sie in den mir bekannt gewordenen Lehrbüchern nirgends noch
getroffen und nehme daher keinen Anstand, die Lösung derselben dem Programme einzuverleiben. Der
te Abschnitt behandelt die Aufstellung der Bedingungen, die erfüllt sein müssen, wenn ein Ausdruck,
nicht nur die Veränderlichen $x,y,z\ldots$ sondern auch die Differentialcoefficienten derselben bis zu einer
ebigen Ordnung in Beziehung auf eine der Variablen z. B. x enthält, ein vollständiger Differential-
ficient sein soll. Sie werden gewöhnlich in der Variationsrechnung, wo sie sich fast ungesucht dar-
en, aufgestellt und auf diesen Zweig der höhern Analysis in den Lehrbüchern verwiesen. Da sich jedoch
e Aufgabe ganz einfach mit Hülfe der ersten Elemente der Differentialrechnung lösen läßt, so möge sie
der Vollständigkeit wegen ihre Stelle finden.

I.

Bekanntlich hat das vollständige Differential einer Function $\varphi(x,y,z\ldots)$ die Form:

$$d\varphi = Xdx + Ydy + Zdz + \ldots\ldots$$

wo $X,Y,Z\ldots$ die partiellen Differentialcoefficienten von $\varphi(x,y,z\ldots)$ resp. nach $x,y,z\ldots$ bedeute dergestalt, daß man hat:

$$\frac{d\varphi(x,y,z\ldots)}{dx} = X\,;\ \frac{d\varphi(x,y,z\ldots)}{dy} = Y\,;\ \text{ꝛc.}$$

und genügt den Bedingungen der Integrabilität:

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}\,;\ \frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx}\,;\ \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy}\,;\ \text{ꝛc.}$$

deren Anzahl nothwendig so groß ist, als die Anzahl Amben, welche zwischen den vorhandenen Variab möglich sind, also für n Variable $= \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}$

Sind nun die Function $\varphi(x,y,z\ldots)$ und ihre partiellen Differentialcoefficienten innerhalb der I grationsgrenzen nicht unendlich oder gehen sie nicht plötzlich von einem endlichen Werthe zu einem an über, so findet sich das Integral der vorgegebenen Differentialgleichung oder die Function $\varphi(x,y,$ durch eine Reihe von Quadraturen, deren Ableitung allenthalben die nämliche ist, und wenn man auf drei Variable beschränkt, schließlich in folgendem Endresultate dargestellt sind:

$$\varphi(x,y,z\ldots) = \int Xdx + \int\left(Y - \int\frac{dX}{dy}dx\right)dy + \int\left\{Z - \int\frac{dX}{dz}dx - \int\left(\frac{dY}{dz}dx - \int\frac{d^2X}{dydz}\right)dy\right\}dz + C.$$

Erinnert man sich an den Gang der Entwickelung und betrachtet das dadurch gewonnene Endres so wird man versucht zu glauben, man müsse sich die einzelnen Integrationsausdrücke durch ein Verf schaffen, welches in Fällen sehr mühsam und weitläufig und vielleicht unübersichtlich werden kann, rend in dem vorgelegten Differentiale, was man zur Auffindung des Integrales bedarf, Alles scho geben ist. Eine etwas abgeänderte Darstellungsweise wird die aufgestellte Behauptung leicht rechtferti

Es ist wie bereits oben angedeutet wurde:

$$X = \frac{d\varphi(x,y,z\ldots)}{dx}$$

Hieraus findet man, wenn man beiderseits mit dx multiplicirt und integrirt:

$$\varphi(x,y,z\ldots) = \int Xdx + \text{Const.}$$

wo Const. einen Ausdruck bedeutet, der außer der Variablen x, worauf sich die Integration bezieh Größe, hier also möglicher Weise auch $y,z\ldots$ enthalten könne. Aus diesem Grunde wollen wir i $\varphi'(y,z\ldots)$ bezeichnen, wodurch letzte Gleichung sich schreibt:

$$\varphi(x,y,z\ldots) = \int Xdx + \varphi'(y,z\ldots)$$

Da $\mathbf{X}$ bekannt ist, so hat man auch $\int \mathbf{X}\,dx$, und es ist zur Kenntniß der Function $\varphi(x,y,z\ldots)$ ter nichts nöthig als die Kenntniß von $\varphi'(x,z\ldots)$, die wir durch folgende Betrachtung erhalten. Wenn n die vorstehende Gleichung nach y differentiirt, so erhält man:

$$\frac{d\varphi(x,y,z\ldots)}{dy} = \frac{d\int \mathbf{X}\,dx}{dy} + \frac{d\varphi'(y,z\ldots)}{dy} = \mathbf{Y}$$

Der Ausdruck $\mathbf{Y}$ zerfällt, wie man sieht, in zwei Theile, von denen der eine, welcher $\frac{d\int \mathbf{X}\,dx}{dy}$ gleich die Ausdrücke in sich schließt, worin die Variable x enthalten ist, $\frac{d\varphi'(y,z\ldots)}{dy}$ diejenigen Ausdrücke, denen kein x vorkommt. $\int \mathbf{X}\,dx$ kann kein von x freies Glied enthalten, weil solches e Constante in Beziehung auf x sein würde, das zu setzen nicht erlaubt ist; mithin in auch $\frac{d\int \mathbf{X}\,dx}{dy}$ kein von x freies Glied enthalten. Es enthält also $\frac{d\varphi'(y,z\ldots)}{dy}$ alle n x freien Glieder ohne Ausnahme und keines mit x *).

Sammelt man daher alles Dasjenige, was mit keinerlei Potenz von x behaftet ist, und bezeichnet en Theil mit $(\mathbf{Y})$, so erhält man:

$$\frac{d\varphi'(y,z\ldots)}{dy} = (\mathbf{Y})$$

hieraus:

$$\varphi'(y,z\ldots) = \int (\mathbf{Y})\,dy + \varphi''(z\ldots)$$

Und somit wäre $\varphi'(y,z\ldots)$, um welches es sich allein handelte, gefunden, wenn man $\varphi''(z\ldots)$ iete. Hiezu gelangt man jedoch durch das nämliche Verfahren. Denn differentiirt man $\varphi(x,y,z\ldots)$ z, so erhält man:

$$\frac{d\varphi(x,y,z\ldots)}{dz} = \frac{d\int \mathbf{X}\,dx}{dz} + \frac{d\int (\mathbf{Y})\,dy}{dz} + \frac{d\varphi''(z\ldots)}{dz} = \mathbf{Z}$$

demnach $\frac{d\varphi''(z\ldots)}{dz}$ derjenige Theil von $\mathbf{Z}$ ist, der keinerlei Potenz von x oder y enthält. eichnet man ihn analog mit $(\mathbf{Z})$, so erhält man:

$$\frac{d\varphi''(z\ldots)}{dz} = (\mathbf{Z})$$

lich:

$$\varphi''(z\ldots) = \int (\mathbf{Z})\,dz + \varphi'''(\text{Variable ohne } x,y,z)$$

daher:

$$\varphi(x,y,z\ldots) = \int \mathbf{X}\,dx + \int (\mathbf{Y})\,dy + \int (\mathbf{Z})\,dz + \varphi'''(\text{Variable ohne } x,y,z)$$

Man sieht, wie das Verfahren auf so viele Veränderliche sich erstreckt, als man will, so daß man mein hat, wenn

$$1^0 \qquad \mathbf{X}\,dx + \mathbf{Y}\,dy + \mathbf{Z}\,dz + \mathbf{U}\,du + \ldots.$$

vorgegebene Differential ist, und den Bedingungen der Integrabilität genügt wird, das Integral des- n sein wird:

*) Von einem Ausnahmsfalle wird später die Rede sein.

$$\varphi(x,y,z,u\ldots) = \int X\,dx + \int (Y)\,dy + \int (Z)\,dz + \int (U)\,du + \ldots\ldots + \text{Const.}$$

wo **X** das in 1° unmittelbar gegebene **X** bedeutet,
„ **(Y)** den Theil aus dem in 1° gegebenen **Y**, welcher mit keiner Potenz von x
„ **(Z)** „ „ „ „ „ „ „ **Z**, „ „ „ „ „ x,y
„ **(U)** „ „ „ „ „ „ „ **U**, „ „ „ „ „ x,y,z
2c. 2c.

und **Const.** eine wirkliche Constante, d. h. einen Ausdruck bedeutet, welcher frei ist von x,y,z...

Der Vorzug, den diese Darstellungsweise, wie mir scheint, vor der gewöhnlichen haben dürfte, beste darin, daß man bei einmal gewählter Ordnung des Integrirens auf den ersten Anblick von **X**,**Y**,**Z**... d Größen **(X)**,**(Y)**,**(Z)** direct erkennt, während man bei der bisherigen Art die Sache darzustellen, gla ben mußte, sich dieselben auf einem Umwege erst schaffen zu müssen. Die einfachsten Operationen auf d Ausdrücke **X**,**Y**,**Z**... in Gedanken angewandt reichen in der Regel hin, um die treffenden Glieder erhalten, welche mit keinerlei Potenzen irgend welcher der Variablen behaftet sind.

Ueber die Ordnung des Integrirens läßt sich nicht leicht etwas Bestimmtes festsetzen. Bei einig Uebung im Integriren wird die Betrachtung der Größen **X**,**Y**,**Z**... im Zusammenhalt mit **(X)**,**(Y)**,**(Z)** leicht den einfachsten Weg zeigen zum Resultate zu gelangen. Im Allgemeinen ist es wohl am vorth haftesten, in der Ordnung zu integriren, wodurch am meisten und die complicirtesten Ausdrücke der übrig Variablen, nach welchen noch nicht integrirt wird, in das Integral hinein kommen. Dadurch werden complicirten Ausdrücke ohne Integration erhalten. Um die Sache anschaulich zu machen, wollen folgendes Detail herausheben. Es sei

$$X = \varphi(x,y)\ ;\ Y = \psi(x,y)$$

Nun kann es sich treffen, daß y auf eine complicirte Weise in **X** vorhanden ist. Wenn man daher zu $\int X\,dx$ bildet, so bleibt dieser complicirte Ausdruck gegenwärtig, ohne daß man ihn durch mühsame I gration einzuführen nöthig hätte. Und möglich oder vielmehr gewiß ist, daß wenn man hierauf i Alles beseitigt, was mit Potenzen von x behaftet ist, dadurch complicirte Ausdrücke in y, welche d Integration erst jene erwähnten complicirten Ausdrücke geliefert hätten, hinweg fallen und also die Sch rigkeit der Integration mit fortheben, was nicht geschehen könnte, wenn man zuerst nach y integ indem dann jene mit x behaftet gebliebenen complicirten Ausdrücke demnach nicht entfernt, sondern i ungünstigen Einfluß auf die Integration ausüben würden.

Oben wurde erwähnt, daß z. B. $\int X\,dx$ kein von x freies Glied enthalten kann. Dieß erleidet Ausnahme, wenn das Integral von Logarithmen abhängig wird. Von den Ausdrücken **(Y)** oder **(Z)** hän alsdann ab, ob der von x freie Logarithmus als eine Constante hinweggelassen oder in der Entwick beibehalten werden muß. Ist **(Y)** = o, so ist dieß ein Zeichen, daß $\int X\,dx$ keine von y abhä Glieder nöthig hat, um sich zum vollständigen Integrale der vorgelegten Differentialgleichung zu ergänzen, so selbst schon das Integral derselben in seiner Totalität darstellt. Der von x freie Logarithmus ist alsdann, w y enthält, als eine Constante in Beziehung auf x hinweg zu lassen. Verschwindet **(Y)** nicht, so ist der von x Logarithmus beizubehalten, und hilft mit den durch $\int (Y)\,dy$ hinzukommenden Gliedern das Intregal zum vollständigen Intregale der vorgelegten Differentialgleichung ergänzen.

Beispiele.

Es sei der Ausdruck:

$$dV = \frac{a(adx + ydy + zdz)}{\sqrt{(x^2 + y^2 + x^2)}} + \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} + 3by^2dy$$

integriren; — hier ist:

$$X = \frac{ax}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}} + \frac{y}{x^2 + y^2}\ ;\ Y = \frac{ay}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}} - \frac{x}{x^2 + y^2} + 3by^2$$

$$Z = \frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}}$$

che Ausdrücke den Bedingungen der Integrabilität genügen. Bildet man erst $\int X dx$, so erhält man:

$$\int X dx = a\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} + \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{y}\right)$$

: Ausdruck (Z), der keinerlei Potenz von x und y enthalten darf, wird, wie man auf den ersten k übersieht, Null und (Y), welches keinerlei Potenz von x enthalten darf, wird $= 3by^2$ und sein egral $= by^3$. Daher das vollständige Integral des obigen Differentials:

$$V = a\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} + \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{y}\right) + by^3 + \text{Const.}$$

te man erst $\int Y dy$ gebildet, so hätte man erhalten:

$$\int Y dy = a\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} + \text{arc.}\left(\text{cotang} = \frac{y}{x}\right) + by^3$$

die Integrale $\int (X)\,dx$, $\int (Z)\,dz$; von denen ersteres mit keinerlei Potenz von y, letzteres mit rlei Potenzen von x und y behaftet sein darf, wären ausgefallen und hätten blos die Constante fert, so daß also die einzige Integration nach y schon hinreichte, um das vollständige Integral des elegten genauen Differentials zu erhalten.

Als zweites Beispiel diene die Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{x} + \frac{y^2dx}{x^3} - \frac{dy}{x^2} + \frac{(ydx - xdy)\sqrt{(x^2 + y^2)}}{x^3} + \tfrac{1}{2}\frac{dy}{y} = 0$$

ist:

$$X = \frac{1}{x} + \frac{y^2 + y\sqrt{(x^2 + y^2)}}{x^3}\ ;\ Y = \frac{-y - \sqrt{(x^2 + y^2)}}{x^3} + \tfrac{1}{2}\frac{dy}{y}$$

grirt man erst nach x und dann nach y, so erhält man

$$\int X dx = lx - \frac{y^2}{2x^2} - \frac{y\sqrt{(x^2 + y^2)}}{2x^2} + \tfrac{1}{2}\,l\,\frac{\sqrt{(x^2 + y^2)} - y}{x}$$

$$\int (Y)\,dy = \tfrac{1}{2}\int \frac{dy}{y} = \tfrac{1}{2}ly$$

r das Integral obiger Gleichung:

$$\text{Const.} = \tfrac{1}{2}ly - \frac{y^2}{2x^2} - \frac{y\sqrt{(x^2 + y^2)}}{2x^2} + \tfrac{1}{2}\,l\,\frac{y\sqrt{(x^2 + y^2)} - y^2}{x}$$

Integrirt man erst nach y, so erhält man:

$$\int Y dy = \tfrac{1}{2} l y - \frac{y^2}{2x^2} - \frac{y\sqrt{(x^2+y^2)}}{2x^2} - \tfrac{1}{2} l \frac{\sqrt{(x^2+y^2)}+y}{x}$$

wo lx als Constante nicht hinwegzulassen ist, da $\int (X)\, dx$ nicht constant, sondern $= lx$ wird. Nimm man zusammen, so erhält man nach einigen leichten Reductionen das obige Resultat wieder. Uebrigens hätte sich dieses Integral ebenso einfach durch Sonderung der Variablen finden lassen, indem man für eine neue Veränderliche eingeführt hätte, wozu der Factor vor der Wurzelgröße den Fingerzeig bietet.

Ein drittes Beispiel sei die Integration des Differentialausdruckes

$$du = \frac{yzdx - xzdy - xydz}{y^2z^2 - x^2}$$

der den Bedingungen der Integrabilität genügt. Hier ist:

$$X = \frac{yz}{y^2z^2 + x^2}\,;\; Y = -\frac{xz}{y^2z^2 + x^2}\,;\; Z = -\frac{xy}{y^2z^2 + x^2}$$

und es ist wegen der Symmetrie der Ausdrücke einerlei, in welcher Ordnung man integrirt; ein jed Integral liefert den fertigen Werth für u. Bildet man erst $\int X dx$, so erhält man:

$$\int X dx = \int \frac{\frac{dx}{yz}}{1 + \frac{x^2}{yz}} = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{yz}\right) + \text{Const.} = u$$

Die weitern Integrationen $\int (Y)\, dy$, $\int (Z)\, dz$ fallen aus, da aus ersterem weder die Potenzen von noch aus letzterem die Potenzen von x und y zu entfernen sind.

Es sei ein viertes Beispiel der Ausdruck

$$du = \frac{x+y}{x^2+y^2}\, dx - \frac{x^2+xy}{y(x^2+y^2)}\, dy$$

gegeben, so ist

$$X = \frac{x+y}{x^2+y^2}\,;\; Y = -\frac{x^2+xy}{y(x^2+y^2)}$$

(X) wird Null und $(Y) = -\frac{1}{y}$, wie eine einfache Division zeigt. Die Integration nach y a reicht also schon hin das vollständige Integral obigen Differentialausdruckes zu bieten, und doch ist e diesem Falle vortheilhafter erst $\int X dx$ zu bilden und es durch Hinzunahme des $\int (Y)\, dy$ zum voll ständigen Integrale zu ergänzen, indem dadurch der ermüdenden Zerfällung in Partialbrüche vorge wird. Man erhält:

$$\int X dx = l\sqrt{(x^2+y^2)} + \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{y}\right)$$

$$\int (Y)\, dy = -ly = l\frac{1}{y}$$

)er das vollständige Integral:

$$u = l\frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{y} + \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{y}\right) + \text{Const.}$$

e Integration nach y hätte ergeben:

$$\int Y dy = -\int\frac{x^2+xy}{y(x^2+y^2)} = -\int\frac{dy}{y} + \int\frac{y dy}{x^2+y^2} - x\int\frac{dx}{x^2+y^2}$$

$$= l\frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{y} + \text{arc}\left(\text{cotg.} = \frac{y}{x}\right)$$

s also blos durch eine Constante ergänzt zu werden braucht.

Es sei ferner:

$$U = -\frac{x^2-y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{dx}{x} + \frac{x^2+(y-z^2)}{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{dy}{z} + \frac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{dz}{z} - \frac{y dz}{z^2} + \frac{dz}{z^2}$$

r ist, wie man auf den ersten Blick übersieht

$$\int X dx = -\int\frac{x^2-y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}\frac{dx}{x};\ \int(Y)\,dy = \int\frac{dy}{z};\ \int(Z)\,dz = \int\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^3}\right)dz$$

)er

$$U = l\frac{x}{x^2+y^2+z^2} + \frac{y}{z} + lz - \frac{1}{2z^2} + \text{Const.}$$

$$= l\frac{xz}{x^2+y^2+z^2} + \frac{y}{z} - \frac{1}{2z^2} + \text{Const.}$$

Es sei noch die homogene Gleichung gegeben

$$x dx - (y + \sqrt{(x^2+y^2)})\,dy = 0$$

wird durch den Divisor $x\sqrt{(x^2+y^2)}$ integrabel und liefert die Ausdrücke:

$$Y = \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)}};\ X = -\frac{y}{x\sqrt{(x^2+y^2)}} - \frac{1}{x}$$

wird $= o$ und $(X) = -\frac{1}{x}$. Integrirt man erst nach y und dann nach x, so erhält man:

$$\int Y dy = l\frac{y+\sqrt{(x^2+y^2)}}{x};\ \int(X)\,dx = -lx$$

also das x im Nenner nicht hinwegzulassen ist. Das vollständige Integral obiger Gleichung) also:

$$l(y + \sqrt{(x^2+y^2)}) - 2lx = lc$$

$$y + \sqrt{(x^2+y^2)} = cx^2$$

te man erst nach x integrirt, so würde man erhalten haben:

$$\int X dx = -l\frac{\sqrt{(x^2+y^2)}-y}{x} - lx = -l\left(\sqrt{(x^2+y^2)}-y\right)$$

nach einer leichten Reduction in obige Form des Integrals übergeht.

II.

Wenn $\mathbf{P}dx + \mathbf{Q}dx + \mathbf{R}dz + \ldots$ unmittelbar integrabel, also

$$(1^0) \qquad \frac{d\mathbf{P}}{dy} = \frac{d\mathbf{Q}}{dx}\,;\ \frac{d\mathbf{P}}{dz} = \frac{d\mathbf{R}}{dx}\,;\ \frac{d\mathbf{Q}}{dz} = \frac{d\mathbf{R}}{dy}\,;\ \ldots$$

ist, so ist von selbst klar, daß $\frac{d\mathbf{P}}{dy}$ und $\frac{d\mathbf{Q}}{dx}$ genau dieselben Potenzen von x enthalten müssen, ohne we
ches die Größen sich nicht identisch aufheben würden. Ebenso verhält es sich mit den übrigen Differentia
coefficienten. Wenn daher **P** eine homogene Function ist, so muß auch **Q** eine solche sein und zwar v
derselben Ordnung; ebenso **R** 2c. Wiewohl dieses von selbst klar ist, so kann man es doch beweisen, ind
man sich die Aufgabe stellt, die Ordnungsexponenten von **P,Q,R** 2c., welche wir p,q,r... nennen woll
zu bestimmen. Es soll also die Gleichung (1^0) erfüllt sein, man sucht p,q,r....

Da **R** eine homogene Function von der Ordnung p ist, so hat man nach dem Theorem der hon
genen Functionen:

$$\mathbf{pP} = \frac{d\mathbf{P}}{dx}x + \frac{d\mathbf{P}}{dy}y + \frac{d\mathbf{P}}{dz}z + \ldots.$$
$$= -\mathbf{P} + \frac{d(\mathbf{P}x + \mathbf{Q}y + \mathbf{Z}z + \ldots)}{dx}$$

also:

$$(p+1)\,\mathbf{P} = \frac{d(\mathbf{P}x + \mathbf{Q}y + \mathbf{P}z + \ldots)}{dx}$$

Ebenso:

$$(q+1)\,\mathbf{Q} = \frac{d(\mathbf{P}x + \mathbf{Q}y + \mathbf{R}z + \ldots)}{dy}$$

$$(r+1)\,\mathbf{R} = \frac{d(\mathbf{P}x + \mathbf{Q}y + \mathbf{R}z + \ldots)}{dz} \quad 2c.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit dx, dy, dz, ... so erhält man durch Addition:

$$(p+1)\,\mathbf{P}dx + (\mathbf{Q}+1)\,\mathbf{Q}dy + (r+1)\,\mathbf{R}dz + \ldots = d(\mathbf{P}x + \mathbf{Q}y + \mathbf{R}z + \ldots)$$

Wenn demnach **P,Q,R** jede für sich eine homogene Function ist und sie genügen den Bedingu
der Integrabilität, so ist der Theil links in obiger Gleichung ein vollständiges Differential und erfüllt
die Integrabilitätsbedingungen, d. h. es ist:

$$(p+1)\frac{d\mathbf{P}}{dy} = (q+1)\frac{d\mathbf{Q}}{dx}\,;\ (q+1)\frac{d\mathbf{P}}{dz} = (r+1)\frac{d\mathbf{R}}{dx}\,;\ \ldots.$$

woraus wegen Gleichung (1) folgt:

$$p = q = r\ldots$$

III.

Es sei erstlich eine Function φ von x,y und den n ersten Differentialcoefficienten von y
gegeben, zu deren Bezeichnung wir den Lagrange'schen Algorithmus gebrauchen wollen und setze
voraus, diese Function sei der Differentialcoefficient einer Function u der $(n-1)$ten Ordnung, s
folglich sein:

$$\frac{du}{dx} = \varphi$$

Bezeichnen wir ferner die partiellen Differentialcoefficienten von u nach x zum Unterschiede von dem ollständigen $\frac{du}{dx}$, in welchem man die Größen $y, y', y'' \ldots$ auch als Functionen von x behandelt, durch nschluß in Klammern und ebenso auch die übrigen Differentialcoefficienten von u nach $y, y', y'' \ldots$; so ist

$$(1) \ldots \quad \frac{du}{dx} = \left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dy}\right) y' + \left(\frac{du}{dy'}\right) y'' + \cdots \left(\frac{du}{dy^{(n-1)}}\right) y^{(n)} = \varphi$$

Wir gehen zum folgenden Differentialcoefficienten über und differentiiren zu diesem Zwecke beide Gleichitsseiten nach allen darin befindlichen Veränderlichen. Man erhält alsdann:

$$(2) \ldots \quad d.\frac{du}{dx} = d\left(\frac{du}{dx}\right) + d\left(\frac{du}{dy}\right) y' + d\left(\frac{du}{dy'}\right) y'' + \cdots\cdots d\left(\frac{du}{dy^{(n-1)}}\right) y^{(n)}$$

$$+ \left(\frac{du}{dy}\right) dy' + \left(\frac{du}{dy'}\right) dy'' \cdots\cdots \left(\frac{du}{dy^{(n-1)}}\right) dy^{(n)}$$

ntwickelt man nun das Differential $d\left(\frac{du}{dx}\right)$ und eben so jedes folgende, so ergibt sich:

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) dx + \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right) dy + \left(\frac{d^2u}{dxdy'}\right) dy' + \cdots\cdots \left(\frac{d^2u}{dxdy^{(n-1)}}\right) dy^{(n-1)}$$

$$\left\{ \left(\frac{d^2u}{dydx}\right) dx + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) dy + \left(\frac{d^2u}{dydy'}\right) dy' + \cdots\cdots \left(\frac{d^2u}{dydy^{(n-1)}}\right) dy^{(n-1)} \right\} y'$$

$$\left\{ \left(\frac{d^2u}{dy'dx}\right) dx + \left(\frac{d^2u}{dydy'}\right) dy + \left(\frac{d^2u}{dy'^2}\right) dy' + \cdots\cdots \left(\frac{d^2u}{dy'dy^{(n-1)}}\right) dy^{(n-1)} \right\} y''$$

2c. 2c.

r Coefficient von dx wird:

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right) y' + \left(\frac{d^2u}{dxdy'}\right) y'' + \cdots \left(\frac{d^2u}{dxdy^{(n-1)}}\right) y^{(n)} = \frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dx}$$

che Summe offenbar nichts anderes ist als $\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dx}$, worin die zweite Differentiation nicht partiell ist.

enso wird der Coefficient von dy:

$$\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right) + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) y' + \left(\frac{d^2u}{dy'dy}\right) y'' + \cdots \left(\frac{d^2u}{dydy^{(n-1)}}\right) y^{(n)} = \frac{d\left(\frac{du}{dy}\right)}{dx}$$

Coefficienten von $dy', dy'', \ldots dy^{(n-1)}$ aber werden der Reihe nach:

$$\frac{d\left(\frac{du}{dy'}\right)}{dx} + \left(\frac{du}{dy}\right) ; \quad \frac{d\left(\frac{du}{dy''}\right)}{dx} + \left(\frac{du}{dy'}\right) ; \ldots\ldots ; \quad \frac{d\left(\frac{du}{dy^{(n-1)}}\right)}{dx} + \left(\frac{du}{dy^{(n-2)}}\right)$$

und endlich der Coefficient von $dy^{(n)}$ wird $= \left(\frac{du}{dy^{(n-1)}}\right)$.

Von der andern Seite aber hat man:

$$(3) \ldots \quad d\varphi = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) dx + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) dy + \left(\frac{d\varphi}{dy'}\right) dy' + \ldots + \left(\frac{d\varphi}{dy^{(n)}}\right) d^{(n)}$$

und da die Gleichungen (2) und (3) identisch sein müssen, auf welche Art man sich y von x abhängig denken mag, so müssen die Coefficienten von $dx, dy, \ldots$ in beiden Gleichungen gleich sein. Man erhält omit folgende Gleichungen:

$$(4) \ldots \quad \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = \frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dx}$$

$$(5) \ldots \quad \begin{cases} \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) = \frac{d\left(\frac{du}{dy}\right)}{dx} \\ \left(\frac{d\varphi}{dy'}\right) = \frac{d\left(\frac{du}{dy'}\right)}{dx} + \left(\frac{du}{dy}\right) \qquad \left(\frac{d\varphi}{dy^{(n-2)}}\right) = \frac{d\left(\frac{du}{dy^{(n-2)}}\right)}{dx} + \left(\frac{du}{dy^{(n-3)}}\right) \\ \left(\frac{d\varphi}{dy''}\right) = \frac{d\left(\frac{du}{dy''}\right)}{dx} + \left(\frac{du}{dy'}\right) \qquad \left(\frac{d\varphi}{dy^{(n-1)}}\right) = \frac{d\left(\frac{du}{dy^{(n-1)}}\right)}{dx} + \left(\frac{du}{dy^{(n-2)}}\right) \\ \left(\frac{d\varphi}{dy'''}\right) = \frac{d\left(\frac{du}{dy'''}\right)}{dx} + \left(\frac{du}{dy''}\right) \qquad \left(\frac{d\varphi}{dy^{(n)}}\right) = \left(\frac{du}{dy^{(n-1)}}\right) \end{cases}$$

2c. 2c.

Die Gleichung (4) liefert keine Bedingung; sie drückt nichts weiter aus, als daß es einerlei ist, ob man u zuerst partiell und dann vollständig nach x differentiirt, oder zuerst vollständig und dann partiell, wie man sich leicht überzeugt. In diesem Falle erhält man aber, da nach der Voraussetzung $\frac{du}{dx} =$ ist, $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$, also eine identische Gleichung. Die $(n+1)$ Gleichungen führen aber durch Elimination der n Größen $\left(\frac{du}{dy}\right), \left(\frac{dy}{dy'}\right) \ldots$ auf folgende Bedingungsgleichung:

$$(6) \ldots \quad \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) - \frac{d\left(\frac{d\varphi}{dy'}\right)}{dx} + \frac{d^2\left(\frac{d\varphi}{dy''}\right)}{dx^2} - \ldots\ldots \pm \frac{d^n\left(\frac{d\varphi}{dy^{(n)}}\right)}{dx^n} = 0$$

welche die Function φ erfüllen muß, wenn sie der vollständige Differentialcoefficient einer Function $(n-1)$ten Ordnung sein soll.

Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt, so ist auch φdx ein vollständiges Differential; denn man kann ann immer die Größen $\left(\frac{du}{dy}\right)$, $\left(\frac{dy}{dy'}\right)$ ... aus den Gleichungen (5) bestimmen. Man erhält nämlich:

$$\left(\frac{du}{dy^{(n-1)}}\right) = \left(\frac{d\varphi}{dy^{(n)}}\right)$$

$$\left(\frac{du}{dy^{(n-2)}}\right) = \left(\frac{d\varphi}{dy^{(n-1)}}\right) - \frac{d\left(\frac{d\varphi}{dy^{(n)}}\right)}{dx}$$

$$\left(\frac{du}{dy^{(n-3)}}\right) = \left(\frac{d\varphi}{dy^{(n-2)}}\right) - \frac{d\left(\frac{d\varphi}{dy^{(n-1)}}\right)}{dx} + \frac{d^2\left(\frac{d\varphi}{dy^{(n)}}\right)}{dx^2} \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

$$(7) \ldots \begin{cases} \left(\frac{du}{dy'}\right) = \left(\frac{d\varphi}{dy''}\right) - \frac{d\left(\frac{d\varphi}{dy'''}\right)}{dx} + \frac{d^2\left(\frac{d\varphi}{dy'''}\right)}{dx^2} - + \cdots \\ \left(\frac{du}{dy}\right) = \left(\frac{d\varphi}{dy'}\right) - \frac{d\left(\frac{d\varphi}{dy''}\right)}{dx} + \frac{d^2\left(\frac{d\varphi}{dy'''}\right)}{dx} - + \cdots \end{cases}$$

$\left(\frac{du}{dx}\right)$ kann man aus der Gleichung (1) bestimmen. Es wird

$$(8) \ldots \left(\frac{du}{dx}\right) = \varphi - \left(\frac{du}{dy}\right) y' - \left(\frac{du}{dy'}\right) y'' - \cdots - \left(\frac{du}{dy^{(n-1)}}\right) y^{(n)}$$

Sind hiedurch die partiellen Differentialcoefficienten von u bestimmt, so hat man:

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy + \left(\frac{du}{dy'}\right) dy' + \cdots$$

d erhält sodann das gesuchte Integral u oder $\int \varphi dx$ nach den gewöhnlichen Regeln, indem man $y, y' \ldots y^{(n-1)}$ als unabhängige Variable betrachtet.

Wir wollen jetzt specialisiren. Soll die Function φ ein zweiter Differentialcoefficient oder φdx^2 ein ständiges zweites Differential sein, so muß φdx auch ein vollständiges Differential sein und dieselbe dingung wie vorher φ erfüllen, und somit muß φ außer der Bedingung (6) noch die Bedingung üllen:

$$\frac{du}{dy} - \frac{d\left(\frac{du}{dy'}\right)}{dx} + \frac{d^2\left(\frac{du}{dy''}\right)}{dx} - \frac{d^3\left(\frac{du}{dy'''}\right)}{dx^3} + \cdots \text{ o; (Coeff. v } (1+x)^{-1})$$

r:

$$(9)\ \ldots\quad \left(\frac{d\varphi}{dy'}\right) - 2.\frac{d\left(\frac{d\varphi}{dy''}\right)}{dx} + 3.\frac{d^2\left(\frac{d\varphi}{dy'''}\right)}{dx^2} - 4.\frac{d^3\left(\frac{d\varphi}{dy''''}\right)}{dx^3} + \ldots . = 0;\ (\text{Coeff. v. } (1+x)^{-2})$$

Sollte φ aber ein Differentialcoefficient der dritten Ordnung sein, so müßte u auch vollständiger Differentialcoefficient der zweiten Ordnung sein und die Gleichung (9) befriedigen; φ muß also noch außer dem die dritte Bedingungsgleichung erfüllen:

$$(10)\ \ldots\quad \left(\frac{d\varphi}{dy''}\right) - 3.\frac{d\left(\frac{d\varphi}{dy'''}\right)}{dx} + 6.\frac{d^2\left(\frac{d\varphi}{dy''''}\right)}{dx^2} - 10.\frac{d^3\left(\frac{d\varphi}{dy^v}\right)}{dx^3} + \ldots = 0;\ (\text{Coeff. v. } (1+x)^{-3})$$

Ebenso käme für einen Differentialcoefficienten φ der vierten Ordnung noch die Bedingung hinzu:

$$(11)\ \ldots\quad \left(\frac{d\varphi}{dy'''}\right) - 4.\frac{d\left(\frac{d\varphi}{dy''''}\right)}{dx} + 10.\frac{d^2\left(\frac{d\varphi}{dy^v}\right)}{dx^2} - 20.\frac{d^3\left(\frac{d\varphi}{dy^{vi}}\right)}{dx^3} + \ldots = 0;\ (\text{Coeff. v. } (1+x)^{-4}$$

2c. 2c.

Das Bildungsgesetz der aufeinander folgenden Bedingungsgleichungen ist einfach. Soll die Gleichung (bestehen können, so muß φ in Beziehung auf den höchsten Differentialcoefficienten $y^{(n)}$ lineär sein. Denn wä dieses nicht der Fall, so enthielte $\left(\frac{d\varphi}{dy^{(n)}}\right)$ noch $y^{(n)}$ und mithin $\frac{d^n\left(\frac{d\varphi}{dy^{(n)}}\right)}{dx^n}$ die Größe $y^{(2n)}$, die in k nem der andern Glieder vorkommt, also auch nicht aus der Gleichung verschwinden kann.

Beispiel.

Sei $\varphi = 6(y' + 1)\,y' + 6(x + y + xy')\,y'' + (x + 2y)\,x\,.\,y'''$; so ist:

$$\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) = 2(3y'' + xy'')$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dy'}\right) = 6(1 + 2y' + xy');\ \frac{d\left(\frac{d\varphi}{dy'}\right)}{dx} = 6(3y'' + xy''')$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dy''}\right) = 6(x + y + xy');\ \frac{d\left(\frac{d\varphi}{dy''}\right)}{dx} = 6(1 + 2y' + xy'')$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dy'''}\right) = x(x + 2y);\ \frac{d\left(\frac{d\varphi}{dy'''}\right)}{dx} = 2(x + y + xy');\ \frac{d^2\left(\frac{d\varphi}{dy'''}\right)}{dx^2} = 2(1 + 2y' + x$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) = 2(3y'' + xy''');$$

$$\frac{\left(\frac{d\varphi}{dy'}\right)}{dx} = -6(3y'' + xy''') \; ; \qquad \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) = +6(1 + 2y' + xy'').$$

$$\frac{\left(\frac{d\varphi}{dy''}\right)}{dx^2} = +6(3y'' + xy''') \; ; \quad -2\frac{d\left(\frac{d\varphi}{dy''}\right)}{dx} = -12(1 + 2y' + xy'') \; ; \qquad \left(\frac{d\varphi}{dy''}\right) = +6(x + y + xy')$$

$$\frac{\left(\frac{d\varphi}{dy'''}\right)}{dx^3} = -2(3y'' + xy''') \; ; \quad +3\frac{d^2\left(\frac{d\varphi}{dy'''}\right)}{dx^2} = -6(1 + 2y' + xy'' \; ; \quad -3\frac{d\left(\frac{d\varphi}{dy'''}\right)}{dx} = -6(x + y + xy')$$

$$0 \qquad\qquad 0 \qquad\qquad 0$$

Es genügt also diese Function nicht allein der Gleichung (6), sondern auch den Gleichungen (9) und), und ist daher der Differentialcoefficient der dritten Ordnung einer Function von x und y. Um ihr es Integral zu finden, hat man zufolge der Gleichungen (7) und (8):

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = 2 + 4y' + 2xy'' \; ; \quad \left(\frac{du}{dy'}\right) = 4(x + y + xy') \; ; \quad \left(\frac{du}{dy''}\right) = x(x + 2y)$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 4y' + 2y'^2 + 2(x + y)y''$$

daher

$$du = (4y' + 2y'^2 + 2(x + y)\,y'')\,dx + (2 + 4y' + 2xy'')\,dy + (x + y + xy')\,dy' + x(x + 2y)\,dy''$$

Integrirt man nach der in I gegebenen Methode, so wird

$$\int X dx = (4y' + 2y'^2 + 2yy'')\,x + x^2y'' \; ; \quad \int (Y)\,dy = (2 + 4y')\,y$$

$'')\,dy$ und $\int (Y'')\,dy''$ fallen aus, da sie keine von x und y freien Glieder enthalten, und man lt das Integral:

$$u = 2y + 2(2x + 2y + 4y')\,y' + x(x + 2y)\,y'' + C.$$

C eine willkürliche Constante bedeutet.

Nimmt man nun die so gefundene Function u für die Function φ, so findet man ebenso ihr Integral

$$(2x + y)\,y + x(x + 2y)\,y' + Cx + C,$$

das Integral dieses Ausdrucks wird endlich:

$$(x + y)\,xy + Cx^2 + C_1x + C_2$$

C, C_1, C_2 willkürliche Constanten sind.

Dieß eine Beispiel möge genügen, da der Gegenstand ohnehin nur von theoretischem Interesse und tisch von keiner Bedeutung ist.

Bis jetzt wurde angenommen, daß die Function φ nur x und y und die Differentialcoefficienten von thalte; enthielte sie aber noch eine andere Variable z und deren Differentialcoefficienten $z', z'' \ldots$, so

kann man auf die Variable z ganz dasselbe Räsonnement anwenden wie auf die Variable y und fin
sodann, daß, wenn φdx ein vollständiges Differential sein soll, ohne irgend eine Bestimmung zu x,
festzusetzen, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen folgende sind:

$$\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) - \frac{d\left(\frac{d\varphi}{dy'}\right)}{dx} + \frac{d^2\left(\frac{d\varphi}{dy''}\right)}{dx^2} - + \cdots = 0$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dz}\right) - \frac{d\left(\frac{d\varphi}{dz'}\right)}{dx} + \frac{d^2\left(\frac{d\varphi}{dz''}\right)}{dx^2} - + \cdots = 0$$

Enthält die Function φ nur die ersten Differentialcoefficienten y', z'; so geben diese Gleichungen d
eine einfache Reduction die bekannten drei Bedingungsgleichungen wieder. In der That muß die Functio
in Bezug auf y' und z' lineär und also von der Form sein

$$X + Yy' + Zz'$$

wo X, Y, Z Functionen von x, y, z sind. Es wird also:

$$\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) = \frac{dX}{dy} + \frac{dY}{dy}y' + \frac{dZ}{dz}z' \; ; \; \left(\frac{d\varphi}{dz}\right) = \frac{dX}{dz} + \frac{dY}{dz}y' + \frac{dZ}{dz}z'$$

$$\frac{d\varphi}{dy'} = Y \; ; \; \frac{d\varphi}{dz'} = Z$$

$$\frac{d\left(\frac{d\varphi}{dy'}\right)}{dx} = \frac{dY}{dx} + \frac{dY}{dy}y' + \frac{dY}{dz}z' \; ; \; \frac{d\left(\frac{d\varphi}{dz'}\right)}{dx} = \frac{dZ}{dx} + \frac{dZ}{dy}y' + \frac{dZ}{dz}z'$$

und die vorigen beiden Gleichungen werden:

$$\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx} + \left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right)z' = 0$$

$$\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} - \left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right)y' = 0$$

Da nun diese Gleichungen bestehen sollen unabhängig von den Werthen, die man z', y' beilegen ma
zerfallen sie in die drei Gleichungen:

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx} \; ; \; \frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx} \; ; \; \frac{dZ}{dy} = \frac{dY}{dz}$$

Wäre φ nur eine Function von x, y, y' und von der Form

$$X + Yy'$$

so erhielte man zufolge der ersten voriger Gleichungen

$$\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx} = 0.$$

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE
D'UNE FORMULE DE RAABE

PAR

M. LERCH

Docent à l'École Polytechnique tchèque de Prague.

Considérons l'intégrale

$$\int_0^1 \lg \Gamma(x+u)\,dx = \mathrm{F}(u)$$

t supposons que u soit réel et positif.

Posant $x+u=z$ cette intégrale se change en

$$\mathrm{F}(u) = \int_u^{u+1} \log \Gamma(z)\,dz$$

où il suit la formule

$$\frac{d}{du}\mathrm{F}(u) = \lg \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(u)} = \lg u$$

nt on conclut

(1) $$\mathrm{F}(u) = \mathrm{C} + u\log u - u\,,$$

désignant la constante d'intégration.

On a évidemment

$$\mathrm{C} = \int_0^1 \lg \Gamma(x)\,dx\,;$$

formule

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

nous donnera

$$\int_0^1 \lg \Gamma(x)\, dx = \lg \pi - \int_0^1 \lg \operatorname{sen} \pi x\, dx - \int_0^1 \lg \Gamma(1-x)\, dx$$

et puisqu'on a

$$\int_0^1 \lg \Gamma(1-x)\, dx = \int_0^1 \lg \Gamma(x)\, dx$$

il s'en suit

$$2\int_0^1 \lg \Gamma(x)\, dx = \lg \pi - \int_0^1 \lg \sin \pi x\, dx = \lg 2\pi$$

de sorte qu'on aura enfin

$$C = \frac{1}{2} \lg 2\pi.$$

En substituant cette valeur dans la formule (1) il vient

$$\int_0^1 \lg \Gamma(x+u)\, dx = u \lg u - u + \frac{1}{2} \lg 2\pi. \qquad (2)$$

Cette formule a été donnée par *Raabe* et démontrée de plusieurs manières mo
simples que la précédente.

Estratto dal Volume XXVI del Giornale di Matematiche diretto dal Professore G. Battaglini,
edito da Benedetto Pellerano, *via Gennaro Serra*, 20. Napoli.

XLV.

Programm

des

Staats-Obergymnasiums

zu

Klagenfurt.

Herausgegeben am Schlusse des Studienjahres

1894/95

von dem k. k. Gymnasial-Director

Dr. Robert Latzel.

1895.

Buchdruckerei der St. Hermagoras-Bruderschaft in Klagenfurt.

Im Selbstverlage des Gymnasiums.

Inhalt:

Bestimmung der Maxima und Minima durch Auflösung quadratischer Gleichungen. Von Albin Lesky. . . . . .

Schulnachrichten vom Director . . . . . .

Bestimmung der Maxima und Minima

durch Auflösung quadratischer Gleichungen.

Von

Albin Lesky.

Eine wichtige und zugleich lehrreiche Anwendung der Differentialrechnung ist die Bestimmung der Maxima und Minima von Functionen. Zahlreiche Aufgaben darüber lassen sich jedoch auf elementarem Wege lösen, wozu man auch allgemeine Methoden aufstellt hat (erwähnenswert wäre die Schellbach'sche), welche sowohl ithmetische, als auch geometrische Übungen in sehr vielen Gebieten lassen. Der Zweck dieser Arbeit soll nun einzig darin bestehen, ıige Aufgaben über Maxima und Minima auf elementarem Wege iglichst einfach zur Lösung zu bringen, und zwar nur durch den thematischen Hilfsapparat, welcher den Schülern der letzten Classe er Mittelschule zu Gebote steht; auf diese Weise soll wieder einmal f dieses Capitel aufmerksam gemacht und gezeigt werden, dass es sich pfehlen würde, derartige Aufgaben, insoweit es die Zeit zulässt, an Mittelschule zu üben. Das Einüben derartiger Aufgaben ist für den ıüler sehr gewinnbringend, da dabei ein ausgedehntes Terrain der ıentarmathematik benützt wird und auch Schlüsse verwendet werden ssen, die bei anderen Aufgaben seltener gemacht werden. Dies hätte och den Vortheil einer Vertiefung über das Wesen der Operationen, i die an der Grenze eines Gymnasiums oder einer Realschule stehenden üler werden genöthigt, nicht bloß das Letzterlernte, sondern auch ıches Frühere, namentlich das Umformen und Lösen der Gleichungen Anwendung zu bringen, sie werden nach manchem mühsamen Schritte noch zu Resultaten gelangen, welche ihnen eine Befriedigung bieten den. Wir glauben nicht fehl zu schließen, wenn wir behaupten, dass Schüler derartigen Aufgaben über Maxima und Minima ein lebhaftes eresse entgegen bringen würden, und zwar schon vermöge der überhenden Einfachheit der erzielten Resultate.

Wenn die Darstellung dieser Arbeit hie und da etwas breiter gen ist, als es unbedingt nothwendig wäre, so möge dies dadurch gtfertigt erscheinen, dass wir eben die Aufmerksamkeit auf diese Aufen lenken und dem Leser das Durchsehen derselben erleichtern wollten.

Möge von dieser Arbeit weniger die Wissenschaft an sich, als das aktische in Betracht gezogen werden.

Bei jeder Lösung einer mathematischen Aufgabe erscheint das Re- at ausgedrückt durch Größen, welche durch Operationen mit einander nüpft sind, es ist eben das Resultat eine Function dieser Größen.

Bei zahlreichen Aufgaben entsteht die Frage, wie diese Größen zu wähle sind, damit der Wert des Resultates ein Maximum oder Minimu wird. Erscheint ein Resultat y in der Form $y = x_1 + x_2 + \ldots + x$ so kann y zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden, wer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die größt- oder kleinstmöglichen reellen Werte erlange wobei jedoch vorausgesetzt wird, dass diese Größen verschiedene Wer annehmen können und dürfen. Wäre $y = A + Bx$, wobei A und B d Summe constanter Größen bedeuten, so wird y zu einem Maximum od Minimum, je nachdem man x den größten oder kleinsten Wert beile Um zu beurtheilen, wann eine Differenz ein Maximum oder Minim wird, hat man zwei Fälle zu beachten. Eine Differenz bei constant Minuend wird ein Maximum oder Minimum, je nachdem der veränderli Subtrahend ein Minimum oder Maximum wird. Ist hingegen der Subt hend constant, so wird bei kleinstem oder größtem Minuend der Wert Differenz ein Minimum oder Maximum. Ein Product von constanten u veränderlichen Factoren wird ein Maximum oder Minimum, je nachd das Product der veränderlichen Factoren den größten oder kleinsten W besitzt. Der Wert eines Bruches wird bei constantem Zähler ein M mum oder Minimum, wenn der Nenner seinen kleinsten, respective gröf Wert erreicht. Bei constantem Nenner wird, je nachdem der Zähler Maximum oder Minimum wird, auch der Wert des Bruches zu einem solc

Bei zahlreichen Aufgaben ist die Frage zu beantworten, für we Werte eine ganze, stetige und quadratische Function, welche nur Hauptgröße enthält, ein Maximum oder Minimum wird. Bei den mei Aufgaben über Maxima und Minima, welche elementar zu lösen sind diese Frage zu beantworten; auch im folgenden werden nur dera Aufgaben gelöst.

Setzen wir eine ganze, quadratische und stetige Function $y = a$ $+ bx + c$ voraus, wobei a, b und c absolute Zahlen bedeuten, so wird zwei Wurzeln besitzen, welche man durch das Auflösen der Gleic $ax^2 + bx + c - y = 0$ erhält. Die Größe y wird als veränderlich genommen, und zwar durch x. Um nun zu ermitteln, für welche re Werte von x die Function y zu einem Maximum oder Minimum wird man zunächst die Gleichung $ax^2 + bx + c - y = 0$ aufzulösen. Ma hält daraus

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac + 4ay}$$

oder

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{(b^2 + 4ay) - 4ac}.$$

Soll nun y den kleinsten Wert erlangen, so dass dadurch x einen r Wert besitzt, so muss $b^2 + 4ay - 4ac = 4ay - (4ac - b^2) = 0$ denn lässt man y abnehmen, so ist diese Abnahme durch die Gleichung beschränkt, da bei weiterer Abnahme von y der cand der Gleichung (1) negativ und x dadurch imaginär würd nun $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$, so ist dies der kleinste Wert der quadratischen tion, welcher dann für $x = -\frac{b}{2a}$ eintritt, was aus der Gleichu folgt. Die Zunahme von y in der Gleichung (1) ist unbeschränkt nun in einer Function ein Maximum eintreten, so ist die Zunah wöhnlich noch durch eine Nebenbedingung beschränkt. Jede F von der Form $y = ax^2 + bx + c$ hat also einen ausgezeichneten

ıd zwar ein Minimum. Das Wesen der Maxima und Minima von Funconen kann sehr leicht nach Descartes mit Hilfe der analytischen Geoetrie veranschaulicht werden. Ist die Function stetig, so erhält man s geometrisches Bild derselben eine stetige Curve. Construiert man ın die größte oder kleinste Ordinate derselben und zieht noch in sehr einen, gleichen Abständen benachbarte Ordinaten, so weichen diese ıchbarordinaten nur sehr wenig von der größten, respective von der einsten ab. Es ändert sich also die Function sehr langsam in der Nähe res Maximums oder Minimums. Dieser Satz ist der Keplersche Satz m Maximum oder Minimum.

Es sollen nun einzelne Aufgaben über Maxima oder Minima zur ısung gebracht werden.

1. Aufgabe. Es soll untersucht werden, für welche Werte von x r Ausdruck $y = x + \sqrt{1-x}$ ein Maximum oder Minimum wird.

Wir lösen die Gleichung $y = x + \sqrt{1-x}$ nach x auf und erhalten durch

$$x = -\frac{1-2y}{2} \pm \frac{1}{4}\sqrt{5-4y}.$$

ll y ein Maximum sein, so muss dann $5-4y=0$ sein, denn bei weiterer nahme von y würde dann $5-4y$ negativ werden, was nicht eintreten f, da ja x reell sein muss. Der Wert $y = \frac{5}{4}$ ist demnach der Maximal-

rt, welcher bei $x = -\frac{1-2\cdot\frac{5}{4}}{2} = \frac{3}{4}$ eintritt. Einen endlichen Minimalrt besitzt y nicht, denn die Größe y kann von $(+\frac{3}{4})$ bis $(-\infty)$ abmen und man erhält immer in der Gleichung für x einen positiven licanden. Es wird somit $y = x + \sqrt{1-x}$ für $x = \frac{3}{4}$ ein Maximum.

2. Aufgabe. Für welche Werte von x wird $y = \frac{x^2}{2} - \frac{5}{2}x + \frac{41}{8}$ Maximun oder Minimum?

Es ist $$x^2 - 5x + (\tfrac{41}{4} - 2y) = 0,$$

er $$x = \tfrac{5}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{8y-16}.$$

nun y abnehmen, so ist dies durch die Gleichung $8y-16=0$ beänkt. Demnach ist $y=2$ ein Minimum, welches für $x=\frac{5}{2}$ eintritt. : kann y keinen endlichen Maximalwert annehmen, denn nimmt y von s ∞ zu, so wird der Radicand $8y-16$ stets positive Werte annen und wird zugleich stetig von 0 bis ∞ wachsen. Die Function $\frac{x^2}{2} - \frac{5}{2}x + \frac{41}{8}$ wird für $x = \frac{5}{2}$ zu einem Minimum $y=2$ gemacht.

3. Aufgabe. Wie ist x zu wählen, damit $y = x^2(a-x)^2$ ein imum oder Minimum wird?

Schlägt man den Weg, wie bei den früheren Aufgaben ein, so erman die Gleichung $x^2 - ax + \sqrt{y} = 0$, woraus für x der Wert $\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4\sqrt{y}}$ folgt. Ist nun $a^2 - 4\sqrt{y} = 0$, so hat y seinen malwert erreicht, wofür x noch reell wird; es ist dann $y = \frac{a^4}{16} = \left(\frac{a}{2}\right)^4$, hen Wert y für $x = \frac{a}{2}$ annimmt. Hier kann aber auch ein Minimum eten, denn $y = x^2(a-x)^2$ wird Null, wenn $x=0$ oder $x=a$

wird. Denn lässt man x von $\frac{a}{2}$ bis a zunehmen, so wird der Wert v
y abnehmen, und für $x = a$ tritt das Minimum $y = 0$ ein. Wenn
x von $\frac{a}{2}$ bis 0 abnimmt, so findet für $x = 0$ ein zweites Minimum $y =$
statt. Bei weiterer Abnahme von x wird y wieder größer. Dieses Beis
zeigt, dass eine quadratische Function nicht bloß ein Maximum oder
nimum besitzen kann, sondern beides gleichzeitig.

4. Aufgabe. Für welche Werte des Winkels x wird $y = \cos x$
$+ \cos(\alpha - x)$, wenn $\alpha < \pi$ ist, ein Maximum oder Minimum?

Es ist $y = \cos x + \cos(\alpha - x) = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{2x - \alpha}{2}$.

Die Größe y erscheint als ein Product von einem constanten Fa
$2 \cos \frac{\alpha}{2}$ und einem veränderlichen $\cos \frac{2x - \alpha}{2}$. Wenn nun dieser verän
liche Factor den Maximal- oder Minimalwert erreicht, so wird au
dadurch zu einem größten oder kleinsten Wert. Ist nun $\cos \frac{2x - \alpha}{2}$
also $\measuredangle \frac{2x - \alpha}{2} = 2n\pi$, wobei n jede beliebige ganze Zahl bede
oder $x = 2n\pi + \frac{\alpha}{2}$, so wird dann $y = 2 \cos \frac{\alpha}{2}$ der Maximalwert v
sein. Ist hingegen $\cos \frac{2x - \alpha}{2} = -1$, so wird y den Minimalwert errei
welcher für $\measuredangle x = (2n - 1)\pi + \frac{\alpha}{2}$ eintritt, und wofür $y = -2 \cos \frac{\alpha}{2}$

Aus diesem Beispiel ist ersichtlich, dass es Functionen mit une
vielen Maxima und Minima gibt, dies sind die sogenannten periodi
Functionen, wozu auch die trigonometrischen gehören.

Bei den folgenden Aufgaben ist häufig eine Figur nothwendig
geehrte Leser möge freundlichst dieselbe, die zur Anschaulichkeit
Aufgaben dient und leicht herzustellen ist, selbst construieren.

5. Aufgabe. In einen Kreis vom Radius r ist das an F
größte Rechteck zu zeichnen.

Sind x und y die Seiten des zu suchenden Rechteckes, so is
Fläche desselben $f = x \cdot y$. Zwischen x und y besteht die Re
$x^2 + y^2 = 4r^2$, woraus die Fläche f nur durch eine Seite ausge
werden kann. Es ist also $f = x \cdot \sqrt{4r^2 - x^2}$, und der Ausdruck $x \cdot \sqrt{4r}$
ist der Aufgabe gemäß zu einem Maximum m zu machen. Durc
schiedene Annahmen von x, die zwischen 0 und $2r$ liegen, erhält
verschiedene Werte, worunter dann das verlangte Maximum m vork
wird. Es ist also die Gleichung $x \cdot \sqrt{4r^2 - x^2} = m$ aufzulösen. M
somit

$$x^4 - 4r^2x^2 + m^2 = 0,$$

woraus

$$x = \pm \sqrt{2r^2 \pm \sqrt{4r^4 - m^2}}$$

folgt. Soll nun m ein Maximum werden, so wird dies dann ei
wenn $4r^4 - m^2 = 0$ wird; denn m kann durch die verschiedenen
von x nur solange wachsen, als der Radicand der Gleichung
noch positiv bleibt. Aus $4r^4 - m^2 = 0$ folgt $m = 2r^2$ als Maxim
zu suchenden Fläche f. Dieses Maximum tritt ein bei $x = \sqrt{2r^2}$
und $y = \sqrt{4r^2 - x^2} = r\sqrt{2}$. Da nun $x = y = r\sqrt{2}$ ist, so erh
ein Quadrat.

6. Aufgabe. In einen Kreis vom Radius r ein Rechteck mit dem
rößten Umfang einzuschreiben.

Behält man die Bezeichnung der vorigen Aufgabe bei, so hat man
ir den Umfang $u = 2(x+y)$ und $x^2+y^2=4r^2$. Wenn nun $x+y=x+\sqrt{4r^2-x^2}=m$ ein Maximum wird, so erhält auch dadurch u seinen
rößten Wert $2m$. Es ist also x so zu wählen, dass $x+\sqrt{4r^2-x^2}=m$ wird.

Also ist
$$x^2-mx+\frac{m^2-4r^2}{2}=0,$$

mit
$$x=\frac{m}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{8r^2-m^2}.$$

oll m ein Maximum werden, so muss $8r^2-m^2=0$ sein, daher ist
$=2r\sqrt{2}$, $x=r\sqrt{2}$ und $y=r\sqrt{2}$. Der Maximalumfang des verlangten
echteckes ist somit $u=2(x+y)=4r\sqrt{2}$. Da nun $x=y$ ist, so bekommt
an als Resultat wieder ein Quadrat. Aus der Aufgabe 5 und 6 folgt somit,
ıss unter allen Rechtecken, welche in einen Kreis eingeschrieben werden
ınnen, das Quadrat die größte Fläche und den größten Umfang hat.

Bei diesen zwei Aufgaben kann man sich auf das positive Vorzeichen
:r Wurzel beschränken, da nur eine positive Fläche und ein positiver
mfang hier in Rechnung gezogen werden kann.

7. Aufgabe. Zwei Punkte bewegen sich mit gleichförmiger Ge-
hwindigkeit auf zweien sich unter einem rechten Winkel schneidenden
:raden nach dem Durchschnittspunkte hin. Der erste hat die Geschwin-
gkeit c_1, der andere c_2. Im gegenwärtigen Augenblicke sind ihre Ent-
nungen vom Durchschnittspunkte a und b. Wann werden beide Punkte
n gegenseitigen Abstand d haben? und welches ist die kleinste Ent-
nung zwischen ihnen?

Ist t die fragliche Zeit, so hat der Punkt mit der Geschwindigkeit
vom Durchschnittspunkte O den Abstand $(a-c_1t)$, der andere Punkt
t von O die Entfernung $(b-c_2t)$. Für diese Lage der Punkte den
thagoräischen Lehrsatz angewendet gibt:
$$(a-c_1t)^2+(b-c_2t)^2=d^2.$$
raus erhält man für die Zeit t die Gleichung:
$$t=\frac{1}{c_1^2+c_2^2}\left[(ac_1+bc_2)\pm\sqrt{(c_1^2+c_2^2)d^2-(ac_2-bc_1)^2}\right].$$

Ist nun d_1 ein beliebiger anderer Abstand der Punkte, welcher zur
t t_1 eintritt, so muss dafür eine der letzten Gleichung analoge bestehen,
ılich:
$$t_1=\frac{1}{c_1^2+c_2^2}\left[(ac_1+bc_2)\pm\sqrt{(c_1^2+c_2)^2d_1^2-(ac_1-bc_1)^2}\right].$$

Wenn nun dieser Abstand d_1 fortwährend abnimmt, so ist diese
ıahme an die Gleichung
$$(c_1^2+c_2)^2d_1^2-(ac_2-bc_1)^2=0$$
unden, da ja die Zeit t_1 der Bewegung reell sein muss. Besteht nun
:e Gleichung, dann ist d_1 der Minimalabstand. Es ist dieser somit
$$d_1=\frac{ac_2-bc_1}{c_1^2+c_2^2}$$
kleinste Entfernung, welche die Punkte haben können; und diese
en sie nach
$$t_1=\frac{ac_1+bc_2}{c_1^2+c_2}\ sec.$$

8. Aufgabe. Ein Punkt P bewege sich von A aus in der Richtu
AB mit constanter Geschwindigkeit c_1. An einer Stelle C soll er
Gerade AB verlassen und sich geradlinig mit der constanten Geschwind
keit c_2 nach D bewegen. In welchem Abstande $\overline{BC} = x$ muss der Pu
C liegen, damit die zum Durchlaufen des Weges $\overline{AC} + \overline{CD}$ nöthige Z
t ein Minimum wird? Dabei sei $\overline{AB} = d$ und der Abstand $\overline{BD}$
Punktes D von der Geraden AB sei a.

Die Zeit, die der Punkt zur Bewegung von A nach C mit der
schwindigkeit c_1 braucht, sei t_1, jene zur Bewegung von C nach D
der Geschwindigkeit c_2 sei t_2, daher ist $t = t_1 + t_2$. Nun ist a
$\overline{AC} = d - x = c_1 t_1$ und $\overline{CD} = \sqrt{a^2 + x^2} = c_2 t_2$. Daraus folgt $t_1 = \frac{d-}{c}$
$t_2 = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c_2}$ und $t = \frac{(d-x)c_2 + c_1\sqrt{a^2+x^2}}{c_1 c_2}$. Nun soll t durch passe
Wahl von x zu einem Minimum werden. Ist nun der Zähler
letzten Gleichung ein Minimum M, so wird auch t ein solches, da ja
Nenner $c_1 c_2$ constant ist. Es muss also $(d-x)c_2 + c_1\sqrt{a^2+x^2} = M$
daher muss auch $-c_2 x + c_1\sqrt{a^2+x^2} = m$ ein Minimum werden. D
Auflösung dieser Gleichung erhält man zunächst

$$x^2 - \frac{2mc_2}{c_1^2 - c_2^2}x + \frac{a^2c_1^2 - m^2}{c_1^2 - c_2^2} = 0$$

und schließlich $x = \frac{mc_2}{c_1^2 - c_2^2} \pm \frac{c_1}{c_1^2 - c_2^2}\sqrt{m^2 - a^2(c_1^2 - c_2^2)}$.

Soll nun m ein Minimum sein, so wird dies dann eintreten,
$m^2 - a^2(c_1^2 - c_2^2) = 0$ ist, woraus $m = a\sqrt{c_1^2 - c_2^2}$ folgt; man
sich auf die positive Wurzel beschränken. Dieser Wert m macht x

$$x = \frac{ac_2\sqrt{c_1^2 - c_2^2}}{c_1^2 - c_2^2} = \frac{ac_2}{\sqrt{c_1^2 - c_2^2}}.$$

Da aber $tc_1c_2 = M$ und $M = m + c_2 d$ ist, so erhält man für das Min
der Zeit $t = t_{min.}$ den Wert $t_{min.} = \frac{dc_2 + a\sqrt{c_1^2 - c_2^2}}{c_1 c_2}$.

Bezüglich des Wertes von x ist zu bemerken, dass es zwischer
Punkten A und B nur dann einen dazwischenliegenden Punkt C
wenn $c_1 > c_2$ ist und der Wert $x < d$ wird. Die Strecke x wird
das Ermitteln einer vierten Proportionale gewonnen.

9. Aufgabe. Einen Winkel α in einen Kreis als Peripheriewin
einzutragen, dass *a)* die Summe S der von den Schenkeln abgeschni
Sehnen s_1 und s_2, ferners *b)* das Product P der Sehnen ein Maximum

Aus einer einfachen Betrachtung folgt, dass die verlangte
zunehmen wird, solange sich noch der Kreismittelpunkt nicht zw
den Schenkeln von α befindet. Zieht man nun vom Scheitel des W
α einen Durchmesser, so zerfällt jener in die Theile φ und $\alpha - \varphi$.
erhält nun für s_1 und s_2 die Werte $s_1 = 2r\cos\varphi$ und $s_2 = 2r\cos($
wodurch die Summe S den Wert

$$S = 2r[\cos\varphi + \cos(\alpha - \varphi)] = 4r\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{2\varphi - \alpha}{2}$$

erhält. Dieser Ausdruck erreicht durch verschiedene Winkel φ den
Wert, wenn der mit φ veränderliche Factor $\cos\frac{2\varphi - \alpha}{2}$ ein Maximu

as bei $cos\frac{2\varphi-\alpha}{2}=1$, also wenn $\sphericalangle\varphi=\frac{\alpha}{2}$ ist, der Fall sein wird.
urch diesen Winkel erreicht die Summe S den Wert $S_{max.}=4r\,cos\frac{\alpha}{2}$.
araus folgt aber, dass man den Winkel α, um der verlangten Bedingung
genügen, in der Weise einträgt, dass man zu beiden Seiten eines be-
bigen Durchmessers den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ construiert.

Soll nun das Product P der Sehnen s_1 und s_2 ein Maximum werden,
hat man dafür $P=4r^2\,cos\,\varphi\,cos\,(\alpha-\varphi)$.
rücksichtigt man darin die bekannte Gleichung
$cos\,(\alpha+\beta)+cos\,(\alpha-\beta)=2\,cos\,\alpha\,.\,cos\,\beta$,
erhält man $P=2r^2[cos\,\alpha+cos\,(2\varphi-\alpha)]=2r^2\,cos\,\alpha+2r^2\,cos\,(2\varphi-\alpha)$,
lcher Ausdruck zu einem Maximum wird, wenn $cos\,(2\varphi-\alpha)=1$,
o $\sphericalangle\varphi=\frac{\alpha}{2}$ ist. Das Product P erhält dadurch den Wert $P_{max.}=$
$^2(cos\,\alpha+1)=4r^2\,cos^2\frac{\alpha}{2}$. Ist also $\sphericalangle\varphi=\frac{\alpha}{2}$, so ist sowohl S, als auch
ein Maximum.

10. Aufgabe. Aus einem geraden Kreiskegel, dessen Höhe h ist
d dessen Grundfläche den Radius r hat, den geraden Cylinder heraus-
schneiden, dessen Mantel ein größter ist.

Die Deckfläche des Cylinders sei durch eine Schnittebene, welche
allel zur Basis des Kegels ist, bestimmt. Es sei nun x der Radius
Deckfläche und y die Höhe des Cylinders. Die Mantelfläche M hat
Wert $M=2xy\pi$. Die Größen r, x, y und h erscheinen in ähnlichen
iecken, wodurch man die Proportion $r:h=x:(h-y)$ erhält. Berechnet
n daraus x und setzt den Wert dafür in die Gleichung der Mantelfläche
, so erhält man

$$M=\frac{2r(h-y)y\pi}{h}=\frac{2r\pi}{h}(h-y)y.$$

dieser Gleichung kann nur y verschiedene Werte annehmen; soll
die Mantelfläche M ein Maximum m werden, so muss jedenfalls das
duct $(h-y)y=m$ zu einem solchen werden. Es ist also

$$y^2-hy+m=0,$$

aus

$$y=\frac{h}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{h^2-4m}$$

t. Ist nun $h^2-4m=0$, so wird m den größten Wert erreicht haben,
$m=\frac{h^2}{4}$ macht die Mantelfläche M zum Maximum $M=\frac{2r\pi}{h}\cdot\frac{h^2}{4}=\frac{rh\pi}{2}$,
ches für $y=\frac{h}{2}$ und $x=\frac{r}{2}$ eintritt. Der Parallelschnitt der Deckfläche
s somit mitten durch die Höhe geführt werden, damit der Aufgabe
igt wird.

11. Aufgabe. Unter den einer Halbkugel eingeschriebenen geraden
ndern den mit größter Oberfläche zu ermitteln.

Die algebraische Lösung dieser Aufgabe wäre länger als eine tri-
metrische, daher wir letztere wählen wollen. Wir führen als ver-
rliche Größe den Neigungswinkel φ eines nach der Peripherie des
en Grundkreises gehenden Kugelradius r mit dem unteren Grundkreis
Haben x und y die Bedeutung wie in der vorhergehenden Aufgabe, so
lie Oberfläche O des eingeschriebenen Cylinders durch die Gleichung

$$O = 2x^2\pi + 2xy\pi = 2x\pi(x+y)$$

gegeben. Nun ist aber $x = r\ cos\ \varphi$ und $y = r\ sin\ \varphi$, wodurch

$$O = 2r^2\pi\ cos\ \varphi\ (cos\ \varphi + sin\ \varphi)$$

wird. Es ist somit $\sphericalangle\ \varphi$ so zu wählen, dass O ein Maximum wird. I
nun das Product $cos\ \varphi\ (cos\ \varphi + sin\ \varphi) = m$ ein Maximum, so wird dadur
auch O zu einem größten Wert werden.

Es ist nun $cos\ \varphi\ (sin\ \varphi + cos\ \varphi) = m$
nach $\sphericalangle\ \varphi$ aufzulösen, also $2\ sin\ \varphi\ cos\ \varphi + 2\ cos^2\varphi = 2m$
oder $sin\ 2\varphi + cos\ 2\varphi = 2m - 1.$
Da nun $sin\ 2\varphi = cos\ (90^0 - 2\varphi)$ ist, so erhält man

$$2\ cos\ 45^0 . cos\ (45^0 - 2\varphi) = 2m - 1,$$

schließlich

$$cos\ (45^0 - 2\varphi) = \frac{2m-1}{2\ cos\ 45^0}.$$

Wenn nun $cos\ (45^0 - 2\varphi) = 1$ wird, dann erreicht der Quotient
letzten Gleichung auch seinen Maximalwert 1. Es ist demnach

$$\frac{2m-1}{2\ cos\ 45^0} = 1,$$

woraus folgt, dass $m = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ist, welcher Wert eintritt, wenn

$$cos\ (45^0 - 2\varphi) = 1$$

ist, also

$$\sphericalangle\ \varphi = \frac{45}{2} = \frac{\pi}{8} = 22^0\ 30'.$$

Durch diesen Wert von φ erhält auch die Oberfläche des eingeschriebe
Cylinders den größten Wert

$$O_{max.} = 2r^2\pi m = (1+\sqrt{2})r^2\pi.$$

Diese zwei letzten Aufgaben können in zwei entsprechende pl
metrische verwandelt werden.

Bei derartigen stereometrischen Aufgaben kann auch gezeigt wer
dass die Bienen ihre Zellen derartig bauen, dass sie zur Herstellung
selben das Minimum des Stoffes brauchen.

12. Aufgabe. Gegeben ist ein rechter Winkel mit dem Sch
A und auf dem einen Schenkel die Punkte B und C. Man soll auf
anderen Schenkel einen Punkt D so finden, dass der Winkel BDC
ein Maximum wird.

Hier wird eine trigonometrische Lösung am einfachsten zum
führen. Es sei $\overline{AB} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AD} = x$; $\sphericalangle\ ABD = \alpha$ und $\sphericalangle\ ACD$
dann ist $tg\alpha = \frac{x}{a}$ und $tg\beta = \frac{x}{b}$. Da nun $\sphericalangle\ \alpha$ ein Außenwinkel des
eckes BCD ist, so hat man $\sphericalangle\ v = \alpha - \beta$, daher $tgv = tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha -}{1+tg}$
Setzt man nun die Werte für $tg\alpha$ und $tg\beta$ ein und ordnet, so erhält

$$tgv = \frac{x}{ab+x^2}(b-a).$$

Es ist somit durch passende Wahl von x der Ausdruck $\frac{x}{ab+x^2}$ zu
Maximum m zu machen. Die Gleichung

$$\frac{x}{ab+x^2} = m$$

gibt für x den Wert $x = \frac{1}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{1-4abm^2}$.

Wenn nun m das Maximum sein soll, so muss $(1-4abm^2) = 0$ sein

ist $m = \frac{\sqrt{ab}}{2ab}$, welcher Wert für $x = \frac{1}{2m} = \sqrt{ab}$ eintritt. Hat nun x diesen Wert, dann wird auch tgv, also auch $\sphericalangle v$ den größten Wert erreicht haben. Dieser Wert ist durch die Gleichung

$$tgv_{max.} = m \,.\, (b - a) = \frac{(b-a)\sqrt{ab}}{2ab}$$

gegeben. Auch hier durfte man sich auf den positiven Wert der Wurzel beschränken, da man nur positive Strecken in Rechnung zu ziehen braucht, wenn man die Schenkel des rechten Winkels als Halbstrahlen annimmt. Der Punkt D kann durch eine einfache Construction gefunden werden, da $\overline{AD} = x = \sqrt{ab}$ ist.

13. Aufgabe. Zwei Tangenten eines Kreises vom Radius r bilden einen Winkel 2α. Man soll eine dritte Tangente so legen, dass das dem Kreise umschriebene Tangentendreieck ein Minimum wird.

Die zu suchende Tangente wird bestimmt sein, wenn man die Winkel x und $2y$, welche sie mit den gegebenen Tangenten einschließt, kennt. Sind nun a, b und c die Seiten des Tangentendreieckes, so erhält man dafür, da dieses durch die Winkelsymmetralen in drei Dreiecke zerfällt, folgende Werte

$$a = r\,(ctg\,x + ctg\,y)$$
$$b = r\,(ctg\,y + ctg\,\alpha)$$
$$c = r\,(ctg\,\alpha + ctg\,x).$$

Die Fläche f des Tangentendreieckes berechnet man am einfachsten nach der Formel $f = r\,.\,s = \frac{r}{2}(a+b+c)$. Man hat demnach

$$f = r^2\,(ctg\,x + ctg\,y + ctg\,\alpha),$$

wobei $\sphericalangle\, 2x + 2y + 2\alpha = 180^0$ ist. Dieser Wert von f wird dann zu einem Minimum werden, wenn die mit x und y veränderliche Summe $ctg\,x + ctg\,y$ den kleinsten Wert m annimmt. Man hat also in dem Gleichungssystem

$$ctg\,x + ctg\,y = m$$
$$\sphericalangle\, x + y = 90^0 - \alpha$$

die Winkel x und y so zu wählen, dass m der möglichst kleinste Wert wird. Löst man die Gleichung auf, so hat man

$$ctg\,x + ctg\,y = m$$
$$ctg\,(x+y) = ctg\,(90^0 - \alpha) = tg\alpha.$$

Nun ist aber $ctg\,(x+y) = \frac{ctg\,x\,.\,ctg\,y - 1}{ctg\,x + ctg\,y}$; wenn man dies in die Gleichung einsetzt und noch für $ctg\,x + ctg\,y = m$ setzt, so erhält man

$$ctg\,x + ctg\,y = m$$
$$ctg\,x\,ctg\,y = mtg\alpha + 1.$$

Aus diesen Gleichungen berechnet man nun $ctg\,x - ctg\,y$, so dass man die Gleichung

$$ctg\,x + ctg\,y = m$$
$$ctg\,x - ctg\,y = \pm\sqrt{m^2 - 4mtg\alpha - 4}$$

aufzulösen hat. Daraus folgt nun

$$ctg\,x = \tfrac{1}{2}\left[\, m \pm \sqrt{m^2 - 4mtg\alpha - 4}\,\right]$$
$$ctg\,y = \tfrac{1}{2}\left[\, m \mp \sqrt{m^2 - 4mtg\alpha - 4}\,\right].$$

Wenn nun $ctg\,x + ctg\,y$ ein Minimum werden soll, so wird dies jedenfalls eintreten, wenn sowohl $ctg\,x$ als auch $ctg\,y$ ein Minimum wird. Wenn die Winkel x und y nach einander abnehmen, so ist schließlich diese Annahme durch die Gleichung

$$m^2 - 4mtg\alpha - 4 = 0$$

begrenzt, da wir zur Lösung der Aufgabe nur reelle und positive Winke verwenden können. Daraus folgt aber

$$m = \frac{2}{\cos\alpha}(\sin\alpha \pm 1).$$

Nun ist jedenfalls $\sphericalangle 2\alpha < 180^0$, also $\sphericalangle \alpha < 90^0$, daher $\sin\alpha < 1$; darau folgt, dass m nicht den Wert $\frac{2}{\cos\alpha}(\sin\alpha - 1)$ haben kann, da sonst negativ wäre, was der Aufgabe widersprechen würde. Es hat also den Wert

$$m = \frac{2}{\cos\alpha}(1+\sin\alpha) = \frac{4}{\cos\alpha}\sin^2(45^0+\frac{\alpha}{2}) = \frac{4}{\cos\alpha}\cos^2(45^0-\frac{\alpha}{2}).$$

Hat nun m diesen Wert, dann muss auch $ctg\,x$ und $ctg\,y$ den kleinste Wert haben; dieser ist durch die Gleichung

$$ctg\,x = \frac{m}{2} \text{ und } ctg\,y = \frac{m}{2}$$

gegeben, daraus folgt nun $\sphericalangle x = y$, d. h. das gesuchte umschriebe Tangentendreieck muss ein gleichschenkeliges sein, damit die Fläche e Minimum wird. Aus dem gewonnenen Resultat folgt eine einfache Co struction der gegebenen Aufgabe.

14. Aufgabe. Gegeben ist ein Kreis vom Radius r, auf demselb zwei Punkte A und B durch ihre Abscissen m und n $(n > m)$. M ermittle jene Tangente, welcher von der verlängerten Ordinate dies Punkte das kleinstmögliche Stück abgeschnitten wird.

Die Gleichung des Kreises sei $x^2+y^2=r^2$; die Gleichung d gesuchten Tangente ist dann $xx'+yy'=r^2$, diese werde von den v längerten Ordinaten der gegebenen Punkte in den Punkten A' und geschnitten. Die Coordinaten von A' sind dann $x_1 = m$, $y_1 = \frac{r^2-m}{y'}$ und jene von B' $x_2 = n$, $y_2 = \frac{r^2-nx'}{y'}$. Es soll der Aufgabe gen $\overline{A'B'} = M$ ein Minimum werden. Nun ist $M = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y}$ wenn man die Werte einsetzt und für $x' = x$ und $y' = y$ setzt, so hat n

$$M = \frac{(n-m)r}{y}.$$

M wird dann zu einem Minimum, wenn der veränderliche Nenner y Maximum wird, was bei $y = r$ eintreten wird; x ist dann Null. Die suchende Tangente geht also durch den Schnittpunkt der Ordinaten mit dem Kreis, ist also parallel zur Abscissenaxe, was auch aus ei einfachen Betrachtung sofort folgt. Das von den verlängerten Ordina der Punkte A und B abgeschnittene Tangentenstück ist dann $M = n-$ also stets gleich der Differenz der Abscissen der gegebenen Punkte. nun y unabhängig von den Coordinaten der gegebenen Punkte gefun wurde, so ersieht man daraus, dass für irgend zwei beliebige Punkte Kreises durch die nämliche Tangente die Aufgabe gelöst wird.

Diese Aufgabe lässt sich auch auf die übrigen drei Kegelschn linien übertragen. Bei der Ellipse erhält man für den Tangentenabsch M den Wert

$$M^2 = (n-m)^2\frac{(a^2-b^2)y^2+b^4}{a^2y^2}.$$

Das Minimum von M kann leicht dadurch bestimmt werden, dass der letzten Gleichung die Form

$$M^2 = (n-m)^2\left[\frac{a^2-b^2}{a^2} + \frac{b^4}{a^2y^2}\right]$$

bt. Ist nun y ein Maximum, so wird M ein Minimum werden, was r $y = b$ eintritt, dann ist $M = (n-m)$. Da für die gesuchte Tangente e Coordinaten des Berührungspunktes $x = 0$ und $y = b$ sind, so ist ese wieder parallel zur Abscissenaxe.

Wendet man für die Hyperbel dieselbe Schlussweise an, so erhält m für

$$M^2 = (n-m)^2\left[\frac{a^2+b^2}{a^2} + \frac{b^4}{y^2}\right].$$

ird nun $y = \infty$, liegt also der Berührungspunkt der fraglichen Tangente Unendlichen, so hat M den größten Wert. Man erhält als Lösung die ymptoten der Hyperbel. Der Abschnitt erhält dann den Wert

$$M = \frac{n-m}{a}\sqrt{a^2+b^2} = \frac{(n-m)e}{a} = (n-m)\varepsilon,$$

bei e die lineare und ε die numerische Excentricität bedeutet.

Bei der Parabel erhält man für den Tangentenabschnitt M die eichung

$$M^2 = (n-m)^2\left[1 + \frac{p^2}{y^2}\right].$$

würde ein Minimum werden, wenn $y = \infty$ wäre. Nun besitzt aber Parabel keine Asymptoten, daher gibt es für diesen Kegelschnitt ne Tangente, welche der Forderung genüge leisten könnte.

Bei der Lösung dieser Aufgabe hat man ein Minimum durch ein- he Überlegung gefunden. Wenn man Bedenken gegen Aufgaben über xima und Minima, welche in der Weise wie die meisten der in dieser beit betrachteten Aufgaben gelöst werden müssen, hegt, so kann man och gegen die Auflösungsmethode, wie sie in der letzten Aufgabe an- vendet wurde, nichts vorbringen, und es soll nicht versäumt werden, artige Beispiele in den Unterricht hineinzuflechten, da sie gewiss das eresse der Schüler anregen und fördern werden.

15. Aufgabe. Auf dem ersten Quadranten einer Ellipse soll man jenigen Punkt bestimmen, dessen Normale am weitesten vom Mittel- kt entfernt ist.

Wir setzen voraus, dass die Ellipse auf ein rechtwinkeliges Co- inatensystem, welches seinen Ursprung im Mittelpunkte der Ellipse , bezogen wird. Die Coordinaten des gesuchten Punktes seien x' und y'. Gleichung der durch diesen Punkt gehenden Tangente lautet:

$$y - y' = -\frac{b^2x'}{a^2y'}(x-x').$$

zu x' und y' gehörige Normale hat die Gleichung

$$y - y' = \frac{a^2y'}{b^2x'}(x-x'),$$

che sich auf folgende reduciert

$$y = \frac{a^2y'}{b^2x'}x - \frac{(a^2-b^2)y'}{b^2}.$$

nun p der Abstand dieser Normalen vom Mittelpunkte der Ellipse, cher die Coordinaten (o, o) hat, so erhält man dafür nach einer be- nten Formel

$$p = \frac{\frac{a^2-b^2}{b^2}y'}{\sqrt{1+\left(\frac{a^2y'}{b^2x'}\right)^2}}.$$

Da nun x' und y' die Coordinaten des gesuchten Punktes sind, so können wir dafür x und y setzen. Man hat somit

$$p = \frac{(a^2-b^2)xy}{\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}}.$$

Setzt man darin für $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ und für $a^4y^2 = a^4b^2 - a^2b^2x^2$, welche Werte aus der Ellipsengleichung folgen, so hat man schließlich nach einigen Umformungen für p die Gleichung

$$p = \frac{a^2-b^2}{a} \cdot \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2(a^2-x^2)+b^2x^2}}.$$

Soll nun p ein Maximum werden, so wird dies eintreten, wenn der mit x veränderliche Quotient ein Maximum m wird. Daher hat man die Gleichung

$$\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2(a^2-x^2)+b^2x^2}} = m$$

nach x aufzulösen. Es folgt zunächst

$$x^4 - x^2(a^2m^2 - b^2m^2 + a^2) + a^4m^2 = 0,$$

daraus $$x^2 = \frac{(a^2-b^2)m^2+a^2}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{[m^2(a^2-b^2)+a^2]^2 - 4a^4m^2}$$

oder $$x^2 = \frac{(a^2-b^2)m^2+a^2}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{m^4(a^2-b^2)^2 - 2a^2(a^2+b^2)m^2+a^4}.$$

Soll nun m ein Minimum werden, so muss

$$m^4(a^2-b^2) - 2a^2(a^2+b^2)m^2 + a^4 = 0$$

sein. Daraus folgt nun

$$m^2 = \frac{a^2(a^2+b^2)}{(a^2-b^2)^2} \pm \frac{2a^3b}{(a^2-b^2)^2}.$$

Also ist $$m_1 = \frac{a}{a-b}$$

und $$m_2 = \frac{a}{a+b}.$$

Nun kann aber nur ein Wert von m den von p zu einem Maximum machen, daher wir nun untersuchen müssen, welcher diese Eigenschaft besitzt. Hätte nun m_1 diese Eigenschaft, dann müsste

$$p = \frac{a^2-b^2}{a} \cdot m_1 = a+b$$

sein; dies kann jedoch nicht der Fall sein, denn, wenn man m_1 in die Gleichung (1) einsetzt, und dabei berücksichtigt, dass der Radicand Null ist, so erhält man dadurch $x^2 = \frac{a^3}{a-b}$. Nun ist $a-b < a$, daher $\frac{a^3}{a-b} > a^2$. Es müsste demnach $x^2 > a^2$, also $x > a$ sein. Daher würde es für diesen Wert von m_1 einen Ellipsenpunkt geben, dessen Abscisse größer als a wäre, was aber nicht möglich ist. Somit ist nur m_2 als jener Wert zu gebrauchen, welcher p zu einem Maximum macht. Man bekommt also für den Maximalabstand der gesuchten Normalen den Wert

$$p = \frac{a^2-b^2}{a} \cdot m_2 = a-b,$$

und die Coordinaten des gesuchten Punktes sind $x = \sqrt{\frac{(a^2-b^2)m_2^2+a^2}{2}}$ und $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, also

$$x = \frac{a \,.\, \sqrt{a(a+b)}}{a+b}$$

$$y = \frac{b \,.\, \sqrt{b(a+b)}}{a+b}.$$

ie Abscisse x des gesuchten Punktes ist somit durch eine vierte geo-
etrische Proportionale zu finden, nachdem man früher $\sqrt{a(a+b)}$ con-
ruiert hat. Ebenso könnte die Ordinate y gefunden werden.

Diese Aufgabe kann auch durch einen Hilfswinkel α zur Lösung
ebracht werden. Da diese sehr kurz ist, wollen wir sie hier andeuten.
m den Winkel α zu erhalten, beschreibt man mit dem Radius a um
en Mittelpunkt der Ellipse einen Kreis. Wenn man die Ordinate des
esuchten Ellipsenpunktes verlängert und den Schnittpunkt derselben mit
esem Kreis mit dem Mittelpunkt der Ellipse verbindet, so schließt diese
erbindungslinie mit der Abscissenaxe den Winkel α ein; dieser Winkel
hrt den Namen der excentrischen Anomalie. Es ist dann $x = a \cos \alpha$;
ıdurch nimmt der Abstand p nach einigen Umformungen den Wert

$$p = (a^2 - b^2) \,.\, \frac{\sin \alpha}{\sqrt{a^2 tg^2 \alpha + b^2}}$$

. Ist nun $\dfrac{\sin \alpha}{\sqrt{a^2 tg^2 \alpha + b^2}} = m$, wobei m das Maximum bedeuten soll,
geht auch p in den größten Wert über. Löst man diese Gleichung auf,
hat man

$$tg^4 \alpha + \frac{(a^2+b^2)m^2 - 1}{a^2 m^2}\, tg^2 \alpha + \frac{b^2}{a^2} = 0,$$

raus $tg^2 \alpha = -\dfrac{(a^2+b^2)m^2-1}{2a^2m^2} \pm \dfrac{1}{2a^2m^2}\sqrt{[(a^2+b^2)m^2-1]^2 - 4a^2b^2m^2}$ (2
gt; wird nun der Radicand Null gesetzt, so erhält man schließlich

$$m^2 = \frac{a^2+b^2}{(a^2-b^2)^2} \pm \frac{2ab}{(a^2-b^2)^2}$$

er

$$m_1 = \frac{1}{a-b}$$

d

$$m_2 = \frac{1}{a+b}.$$

n diesen Werten ist m_1 unbrauchbar, da dadurch $tg\alpha$ imaginär wird.
rch m_2 erhält $tg\alpha$ den Wert

$$tg\alpha = \frac{b}{a},$$

lche Gleichung auch den Winkel angibt, durch welchen $p = (a^2-b^2)m_2 =$
b zu einem Maximum wird. Zu bemerken wäre noch, dass die Gleichun-
n, die erhalten werden, wenn man die Radicanden der Gleichungen (1)
d (2) Null setzt, noch einfacher gelöst werden könnten. Auch bei
ser Aufgabe wurden die doppelten Vorzeichen der Größen m_1 und
unberücksichtigt gelassen, da ja m_1 und m_2 der Aufgabe gemäß nur
itiv sein können.

16. Aufgabe. Wie muss ein Dachstuhl gegen eine gegebene Grund-
he geneigt sein, damit der darauf fallende Regen in kürzester Zeit
ihm abläuft?

Es soll von der Reibung hier abgesehen werden. Der Dachstuhl, der
e schiefe Ebene bildet, habe den Neigungswinkel α und die Basis b.
fragliche Zeit t ergibt sich aus der Gleichung $t = \sqrt{\dfrac{2s}{\varphi}}$, wobei s die

Länge der schiefen Ebenen und φ die Beschleunigung auf derselben bedeutet. Nun ist aber $s = \frac{b}{\cos \alpha}$ und $\varphi = g \sin \alpha$, daher hat man

$$t = \sqrt{\frac{2b}{g \sin \alpha \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{4b}{g \sin 2\alpha}}.$$

Soll nun t ein Minimum werden durch Änderung des Winkels α, so wird dies erreicht, wenn $\sin 2\alpha = 1$ wird; es tritt demnach für $\measuredangle \alpha = 45°$ das Minimum der Zeit t ein, und zwar ist dieses $t_{min.} = 2\sqrt{\frac{b}{g}}$.

17. Aufgabe. Ein Körper vom Gewichte P werde auf einer Horizontalebene mit einer Kraft K fortgezogen, welche mit dieser Ebene einen Winkel α bildet. Diese Kraft K habe nur die Reibung, welche P auf die Unterlage verursacht, zu überwinden. Bei welchem Winkel α wird die Zugkraft ein Minimum?

Man zerlege die Kraft K in eine horizontale Componente $K_1 = K \cos \alpha$ und in eine verticale $K_2 = K \sin \alpha$. Von diesen Componenten wirkt K_1 in der Richtung der Bewegung und ist somit gleich der Reibung R, welche der Körper auf die horizontale Unterlage ausübt. Die Componente K_2 wirkt vertical nach aufwärts und vermindert den Normaldruck D gegen die Horizontalebene. Es ist somit $D = P - K \sin \alpha$. Ist nun r die Reibung auf die Flächeneinheit, also der Reibungscoefficient, so ist $K_1 = R = r \cdot D = r(P - K \sin \alpha)$. Soll nun Gleichgewicht bestehen, so muss jedenfalls die in der horizontalen Richtung wirkende Kraft gleich der Gesammtreibung sein, also ist

$$K \cos \alpha = r \cdot (P - K \sin \alpha).$$

Man hat somit $$K = \frac{rP}{\cos \alpha + r \sin \alpha}.$$

Um nun das Minimum von K zu ermitteln, könnte man wie bei den früheren Aufgaben verfahren und diese Gleichung nach einer trigonometrischen Function des Winkels α auflösen und in der Lösung die Bedingung aufnehmen, dass K ein Maximum werden soll. Durchsichtiger wird die Rechnung, wenn man bedenkt, dass der Zähler rP constant und nur der Nenner $(\cos \alpha + r \sin \alpha)$ veränderlich ist. Es ist somit dieser zu einem Maximum zu machen. Es muss demnach

$$\cos \alpha + r \sin \alpha = m$$

sein. Ersetzt man $\cos \alpha$ durch $\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ und löst die erhaltene Gleichung nach $\sin \alpha$ auf, so hat man

$$\sin \alpha = \frac{mr}{r^2+1} \pm \frac{1}{r^2+1}\sqrt{(r^2+1) - m^2}.$$

Der größtmögliche Wert von m wird erreicht sein, wenn $(r^2+1) - m^2$ ist. Es ist somit $$m = \pm \sqrt{r^2+1}.$$

Da aber der Winkel α zwischen $0°$ und $90°$ liegen muss, so kann m $m = \sqrt{r^2+1}$ sein,

daher $$\sin \alpha = \frac{r\sqrt{r^2+1}}{r^2+1}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{r^2+1}}{r^2+1} \text{ und } tg\alpha = r.$$

Daraus folgt die Größe des Winkels α, für welchen m ein Minimum wird.

Dieser Minimalwert von K ist $K_{min.} = \frac{rP}{m}$, also

$$K_{min.} = \frac{rP\sqrt{r^2+1}}{r^2+1}.$$

Bei schlechten Straßen kann bei Fuhrwerken $r = 0{\cdot}7$ angenommen erden, für diesen Wert von r ist $tg\alpha = 0{\cdot}7$, woraus der Winkel α anähernd mit 4^0 folgt. Daher ist die günstigste Richtung der Zugstange m 4 Grade zur horizontalen Fahrbahn geneigt.

Ist $r = 0{\cdot}04$, was einer sehr glatten Fläche, etwa einer Schneebahn ntspricht und $P = 200\ kg$, so wird $\alpha = 2^0\ 17'$ und $K_{min.} = 7{\cdot}98\ kg$, also ahezu 4 Procent des Gewichtes P.

18. Aufgabe. Am Fuße eines Berges, der unter dem Winkel β nsteigt, soll eine Kanone den Berg hinauf abgefeuert werden. Wie muss an den Lauf richten, um bei der Geschwindigkeit c des Projectiles einen öglichst fernen Punkt des Berges zu treffen?

Wenn α der Elevationswinkel des Kanonenlaufes gegen die Ebene s Horizontes ist, so hat man als Gleichung der Bahncurve, welche eine rabel ist ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes

$$y = x \,.\, tg\alpha - \frac{g}{2c^2\ cos^2\ \alpha} \,.\, x^2.$$

Wird die Böschung des Berges als eine ebene Fläche angenommen, wird diese durch die Ebene der Wurfbahn nach einer Geraden G gehnitten, deren Gleichung $y = x \,.\, tg\beta$ ist. Diese Gerade wird nun die rabel schneiden. Der Abstand des Schnittpunktes vom Coordinatenprung wird die schiefe Wurfweite genannt und soll in unserer Aufgabe einem Maximum gemacht werden. Wenn nun die Gerade G die Parabel Punkte (x, y) schneidet, so wird mit dem Maximum von x oder y auch schiefe Wurfweite zu einem solchen. Für den Schnittpunkt (x, y) ss sowohl die Gleichung der Parabel, als auch jene der Geraden G stehen, daher hat man das Gleichungssystem

$$y = x\ tg\alpha - \frac{g}{2c^2\ cos^2\ \alpha}\, x^2$$
$$y = x\ tg\beta$$

zulösen. Daraus erhält man

$$x = \frac{2c^2\ cos^2\ \alpha\ (tg\alpha - tg\beta)}{g} = \frac{2c^2\ cos\ \alpha\ sin\ (\alpha - \beta)}{g\ cos\ \beta}.$$

Um das Maximum von x zu bestimmen, wenn die Größen c, β und onstant bleiben, könnte man auch wie bei den früheren Aufgaben vorien. Es soll nun eine andere Art der Lösung, die auch häufig verndet wird, durchgeführt werden.

Die Größe x ist die schiefe Wurfweite W_1, daher ist

$$W_1 = \frac{2c^2\ cos\ \alpha\ sin\ (\alpha - \beta)}{g\ cos\ \beta}.$$

Lässt man, um das Maximum von W_1 zu bestimmen, den Elevationskel α alle Werte von β bis 90^0 annehmen, so wird für einen Winkel der zwischen diesen Grenzen liegt, ein Maximum von W_1 eintreten. nn nun α von β bis α_m wächst, so nimmt die Wurfweite W_1 zu und icht bei $\sphericalangle\ \alpha = \alpha_m$ ihr Maximum. Nimmt der Winkel α weiter von α_m 90^0 zu, so wird die Wurfweite abnehmen, und zwar bis Null. Daraus t, dass eine bestimmte schiefe Wurfweite durch zwei Elevationswinkel icht werden kann; der eine Winkel liegt zwischen β und α_m und andere zwischen α_m und 90^0. Das Maximum der Wurfweite kann

jedoch nur durch einen Elevationswinkel α_m erreicht werden, denn wächs dieser über α_m, so nimmt die schiefe Wurfweite wieder ab. Wenn nu $W_1 = \frac{2c^2 \cos\alpha \sin(\alpha-\beta)}{g\cos^2\beta}$ eine dem Winkel α zugehörige schiefe Wur weite ist, so muss W_1 noch durch einen zweiten Winkel α_1 erreich werden können; es muss also $W_1 = \frac{2c^2 \cos\alpha_1 \sin(\alpha_1-\beta)}{g\cos^2\beta}$ sein. Durc Gleichstellung dieser beiden Gleichungen erhält man

$$\frac{2c^2 \cos\alpha \sin(\alpha-\beta)}{g\cos^2\beta} = \frac{2c^2 \cos\alpha_1 \sin(\alpha_1-\beta)}{g\cos^2\beta}$$

oder $$\cos\alpha \sin(\alpha-\beta) = \cos\alpha_1 \sin(\alpha_1-\beta). \quad (1$$

Die Größen $2c^2$, g und $\cos\beta$ fallen weg; sie könnten aber auch auf d Maximum keinen Einfluss haben, da sie Constanten sind. Der Winkel wird als veränderlich angenommen. Multiplicieren wir die Gleichung (mit 2 und führen die Operationen aus, so erhält man

$$2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta - 2\cos^2\alpha\sin\beta = 2\sin\alpha_1\cos\alpha_1\cos\beta - 2\cos^2\alpha_1\sin$$

Dividiert man durch $\cos\beta$ und berücksichtigt, dass $2\sin\alpha.\cos\alpha = \sin$ $2\sin\alpha_1\cos\alpha_1 = \sin 2\alpha_1$, $2\cos^2\alpha = 1+\cos 2\alpha$ und $2\cos^2\alpha_1 = 1+\cos 2\alpha_1$ i so hat man $\sin 2\alpha - (1+\cos 2\alpha)\,tg\beta = \sin 2\alpha_1 - (1+\cos 2\alpha_1)\,tg\beta_1$

oder $$\sin 2\alpha - \sin 2\alpha_1 = tg\beta\,(\cos 2\alpha - \cos 2\alpha_1),$$

daher $$2\cos(\alpha+\alpha_1)\sin(\alpha-\alpha_1) = -2\,tg\beta\sin(\alpha+\alpha_1)\sin(\alpha-\alpha_1),$$

schließlich $$\cos(\alpha+\alpha_1) = -tg\beta\sin(\alpha+\alpha_1). \quad (2$$

Wenn nun das Maximum der schiefen Wurfweite eintreten soll, so m $\measuredangle\,\alpha = \alpha_1$ sein; dies in der Gleichung (2) berücksichtigt, gibt

$$\cos 2\alpha = -tg\beta\sin 2\alpha.$$

Nun ist aber $-tg\beta = ctg\,(90^0+\beta)$, wodurch man erhält

$$ctg\,2\alpha = ctg\,(90^0+\beta),$$

woraus $$\measuredangle\,\alpha = \frac{90^0+\beta}{2} = 45^0 + \frac{\beta}{2} \quad (3$$

folgt. Bei diesem Winkel α wird demnach das Maximum der schie Wurfweite W_{1m} erreicht; der Winkel α ist also der Wert von α_m.

W_{1m} erhält man den Wert aus der Gleichung $W_1 = \frac{2c^2\cos\alpha\sin(\alpha-}{g\cos^2\beta}$ wenn man hierin für $\alpha = \alpha_m$ der Gleichung (3) setzt; also ist

$$W_{1m} = \frac{2c^2\cos(45^0+\frac{\beta}{2})\sin(45^0-\frac{\beta}{2})}{g\cos^2\beta}$$

oder

$$W_{1m} = \begin{cases} \dfrac{2c^2\sin^2(45^0-\frac{\beta}{2})}{g\cos^2\beta} \\ \dfrac{2c^2\cos^2(45^0+\frac{\beta}{2})}{g\cos^2\beta}. \end{cases}$$

Ist nun der Winkel $\beta = 0$, so erhält man die horizontale Wurfw W. Setzt man in der Gleichung (3) $\measuredangle\,\beta = 0$, so ist $\measuredangle\,\alpha = 45^0$ der vationswinkel, bei welchem das Maximum der horizontalen Wurfweite eintritt; der Wert selbst wird erhalten, wenn man in der Gleichung $\measuredangle\,\beta = 0$ setzt, also ist

$$W_m = \frac{2c^2\sin^2 45^0}{g} = \frac{2c^2\cos^2 45^0}{g} = \frac{c^2}{g}.$$

Diese Gesetze gelten natürlich nur für den Fall, als man den Luftwiderstand unberücksichtigt lässt.

Aus dem Resultate dieser Aufgabe folgt nun, dass der Kanonenlauf den Winkel $(90^0 - \beta)$ halbieren muss, damit das abgeschossene Projectil einen möglichst fernen Punkt des Berges erreicht.

19. Aufgabe. Das Maximum der Stromstärke I von einer gegebenen Anzahl n Elemente wird erreicht, wenn sie derart aneinander geordnet werden, dass der wesentliche Widerstand W in der erhaltenen Batterie gleich dem des Schließungsbogens ist.

Das Ohm'sche Gesetz hat die Form $I = \frac{E}{W + W'}$, wobei E noch die elektromotorische Kraft bedeutet. Werden x Platten mit einander verbunden, so erhält man dadurch $\frac{n}{x}$ Elemente, und die elektromotorische Kraft wird $\frac{n}{x} . E$, da sie in jedem Elemente E ist; der frühere wesentliche Widerstand beträgt für ein Element $\frac{W}{x}$, für $\frac{n}{x}$ Elemente daher $\frac{nW}{x^2}$; wenn nun W unverändert bleibt, so hat man bei dieser Anordnung für die Stromstärke I die Gleichung

$$I = \frac{\frac{nE}{x}}{\frac{nW}{x^2} + W'} = \frac{nEx}{nW + W'x^2} = \frac{nE}{\frac{nW}{x} + W'x}.$$

Soll nun I zu einem Maximum werden, so wird dies erreicht, wenn der Nenner $\frac{nW}{x} + W'x$ zu einem Minimum m wird, daher hat man der Gleichung

$$\frac{nW}{x} + W'x = m$$

zu genügen. Daraus folgt zunächst

$$x = \frac{m}{2W'} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4W'^2} - \frac{nW}{W'}}.$$

Der Forderung gemäß muss der Radicand den Wert Null annehmen, daher

$$m = 2\sqrt{nWW'},$$

und daraus folgt

$$x = \sqrt{\frac{nW}{W'}},$$

jene Zahl der Platten, welche vereinigt werden müssen, um das Maximum der Stromstärke $I_{max.}$ zu erhalten; es ist demnach

$$I_{max.} = \frac{nE}{2\sqrt{nWW'}} = \frac{E}{2}\sqrt{\frac{n}{WW'}}.$$

Dass dabei dann der wesentliche Widerstand $\frac{nW}{x^2}$ gleich dem des Schließungsbogens W' ist, folgt durch Einsetzung des Wertes von x.

Aus diesen Aufgaben ist ersichtlich, dass man aus allen Theilen der Elementarmathematik, welche an den Mittelschulen behandelt werden, Beispiele über Maxima und Minima zur Auflösung durch elementare Operationen bringen kann. Zu erwähnen wäre, dass manche Aufgaben aus Grund rein geometrischer Betrachtungen aufgelöst werden können.

Bei dieser Auflösungsmethode wird mittelst einer Construction ein Ma
ximal- oder Minimalwert gefunden. Durch dieses Verfahren kann unte
anderem auch gezeigt werden, dass ein Lichtstrahl, welcher von eine
leuchtenden Punkte A auf eine spiegelnde Fläche auffällt und dann z
einem Punkte B gelangt, dabei stets den kürzesten Weg einschläg
woraus sich das Reflexionsgesetz erschließen lässt. Auch können dur
dieses geometrische Verfahren Lehrsätze gewonnen werden, wie z. B
Das gleichseitige Dreieck hat den größten Inhalt von allen Dreiecke
welche denselben Umfang haben, und den kleinsten Umfang von all
Dreiecken, welche denselben Inhalt haben; oder: Der Kreis hat von all
Vielecken gleichen Inhaltes den kleinsten Umfang, und von allen Vi
ecken gleichen Umfanges den größten Inhalt. Durch derartige Beispie
kann sehr viel Abwechslung in den Unterricht gebracht werden, name
lich bei Wiederholung des Lehrstoffes.

Sehr viele Aufgaben über Maxima und Minima lassen sich au
nach der Methode, welche in der 18. Aufgabe angewendet wurde, a
lösen. Diese Auflösungsmethode gewährt noch eine sehr gute Dur
übung im Umformen und Lösen der Gleichungen; ferner bei Anwendu
der Trigonometrie bietet sie ein vorzügliches Mittel zur Einübung u
zur geschickten Anwendung der goniometrischen Formeln.

Bei den Aufgaben über Maxima und Minima kann nicht bloß
Functionsbegriff gut erklärt werden, sondern es kann auch in das We
der Functionen auf eine leicht verständliche Weise eingedrungen werd
dies beides zu thun, soll in der Mittelschule nicht versäumt werden,
man dadurch viele Theile der Elementarmathematik sehr einfach d
stellen kann.

Schulnachrichten.

I.

Personalstand des Lehrkörpers und Lehrfächervertheilung.

a) K. k. Director:

Dr. Robert Latzel, Besitzer der goldenen Medaille für Kunst und Wissenschaft, lehrte Mathematik und Naturgeschichte in II. b, 5 Stunden wöchentlich.

b) K. k. Professoren:

Norbert Lebinger, Ritter des Franz Joseph-Ordens, Capitular des Benedictiner-Stiftes St. Paul, Conservator der k. k. Central-Commission für Kunst- und historische Denkmale, VIII. Rangsclasse, lehrte Geographie u. Geschichte in II. b, III. b, IV. b, V. u. VII., 17 St. w.

Adalbert Meingast, VIII. Rangsclasse, lehrte Latein und Deutsch in II. a, Griechisch in VI., 17 St. w. Classenvorstand der II. a.

Karl Dürr, VIII. Rangsclasse, lehrte Latein und Griechisch in IV. a, Griechisch in VIII., 15 St. w. Classenvorstand der IV. a.

Johann Scheinigg, VIII. Rangsclasse, lehrte Latein in VII., Griechisch in V., Slovenisch im I. und II. Vorbereitungscurs und in der I. slov. Abtheilung, 16 St. w. Classenvorstand der V.

Dr. Jakob Sket, VIII. Rangsclasse, lehrte Latein in VI., Griechisch in VII., Slovenisch in der II., III. und IV. slovenischen Abtheilung, 16 St. w. Classenvorstand der VII.

Dr. Franz Hann, Conservator der k. k. Central-Commission für Kunst- und historische Denkmale, VIII. Rangsclasse, lehrte Geographie in I. a, Geographie und Geschichte in VI., Deutsch in VII. und VIII., philosoph. Propädeutik in VII., 15 St. w. Classenvorstand der VI.

Jodok Mätzler, VIII. Rangsclasse, lehrte Latein und Griechisch in III. a, Deutsch in III. b u. IV. a, 17 St. w. Classenvorstand d. III. a.

Anton Webhofer, VIII. Rangsclasse, lehrte Mathematik in I. b, IV. a, VI., VII. u. VIII., Physik in IV. a u. VIII., 20 St. w.

Gottfried Flora lehrte Latein und Deutsch in II. b, Deutsch in V., 15 St. w. Classenvorstand der II. b.

Dr. Karl Frauscher lehrte Mathematik in III. a, III. b, Naturgeschichte (bezw. Physik) in I. a, I. b, II. a, III. a, III. b, V. u. VI., 20 St. w.

Johann Gessler lehrte Latein und Deutsch in I. b, Latein in VIII., 17 St. w. Classenvorstand der I. b.

c) K. k. Gymnasiallehrer:

13. **Leopold Pazdera** lehrte die katholische Religion in allen Classen u Abtheilungen und besorgte als Exhortator den Gymnasial-Gottesdien 24 St. w.
14. **Alois Grillitsch,** k. k. Lieutenant in der Evidenz der Landwehr, leh Geographie in I. b, Geographie und Geschichte in II. a, III. a, IV und VIII., 17 St. w. Classenvorstand der VIII.
15. **Albin Lesky** lehrte Mathematik in II. a und V., Physik in V Turnen in II. a, II. b, IV. a, IV. b und VI. (1. Riege), 20 St. w. Ers Leiter der Jugendspiele.

d) Supplenten:[1]

16. **Josef Linhart,** k. k. Lieutenant in der n. a. Landwehr, lehrte La u. Griechisch in III. b, Latein in V., 17 St. w. Classenvorstand d. II
17. **Josef Sichrowsky** lehrte Latein, Griechisch und Deutsch in IV Deutsch in III. a, 16 St. w. Classenvorstand der IV. b.
18. **Dr. Eugen Giannoni** lehrte Mathematik in I. a und IV. b, Physi IV. b, Turnen in I. a, I. b, III. a, III. b, V. (1. Riege), VI. (2. Ri und VII., 23 St. w. Zweiter Leiter der Jugendspiele.
19. **Dr. Ägid Raiz,** k. u. k. Lieutenant in d. Res., lehrte Latein Deutsch in I. a, Deutsch in VI., philos. Propädeutik in VIII., 17 S Classenvorstand der I. a.

e) Hilfslehrer:

20. **Karl Günther,** Superintendential-Vicar, ertheilte den Religionsu richt den evangel. Schülern des Unter- und Obergymnasiums bis März d. J., 2 St. w.
21. **Robert Czilchert,** Pfarrvicar, ertheilte den evang. Religionsunte von Anfang April bis Ende des Schuljahres, 2 St. w.

f) Nebenlehrer:

22. **Adalbert Meingast,** Gymn.-Prof., lehrte die Kalligraphie, 2 St.
23. **Gottfried Flora,** Gymnasial-Professor, lehrte die Stenograph niederen und höheren Curse, 4 St. w.
24. **Victor Slop von Cadenberg,** Professor an der hiesigen Staat schule, lehrte Italienisch im niederen Curse, 2 St. w.
25. **Josef Reiter,** Director der Musikvereinsschule in Klagenfurt, er den Gesangsunterricht in 3 Cursen, 5 St. w.
26. **Josef Lakomy,** Turnlehrer an der k. k. Lehrerbildungsanstalt, richtete im Turnen in 2 Abtheilungen, nämlich Cl. V. (2. Rieg VIII., 4 St. w.
27. **Franz Schreyer,** Lehrer an der hierortigen Bürgerschule, Zeichnen in 2 Abtheilungen (5 Cursen), 4 St. w.

---

[1] Sämmtlich für das Obergymnasium geprüft.

II.

Veränderungen

im Stande und in den Dienstverhältnissen des Lehrkörpers

während des Schuljahres 1894/95.

Mit h. Unterr.-Minist.-Erlass vom 6. Juli 1894, Z. 11.038, wurde an Stelle des im ›rjahre verstorbenen Professors Hermann Purtscher Herr Jodok Mätzler, welcher sher am Staats-Untergymnasium in Gottschee gewirkt hatte, zum Professor ernannt. . Sch. R. v. 20. Juli 1894, Z. 1766.)

Mit h. Unterr.-Minist.-Erlass v. 6. Juli 1894, Z. 14.991, wurde für eine neu systemi›rte Lehrstelle Herr Albin Lesky, zuletzt Supplent an der Staats-Realschule in Graz, m wirklichen k. k. Gymnasiallehrer für Physik, Mathematik u. Turnen ernannt. (L. Sch. R. 20. Juli 1894, Z. 1765.)

Mit h. Unterr.-Min.-Erlass v. 29. Aug. 1894, Z. 19.007, wurde der bisherige Supplent ›rr Rudolf Straubinger zum provisorischen Lehrer am k. k. Staats-Gymnasium in ›rz ernannt. An seine Stelle ward Herr Dr. Agid Raiz, Supplent an der Staats›errealschule in Marburg, zum Supplenten für class. Philologie und Deutsch bestellt. . Sch. R. v. 3. October 1894, Z. 2445.)

Weiters wurde Herr Dr. Eugen Giannoni, im Vorjahre Supplent an d. Communalerrealschule im IV. Bezirk von Wien, zum Supplenten für Mathematik, Physik und Turnen ›tellt. (L. Sch. R. v. 3. Octob. 1894, Z. 2445.)

Mit h. Min.-Erlass v. 19. Juli 1894, Z. 6778, wurde Herr Professor Jodok Mätzler die VIII. Rangsclasse versetzt. (L. Sch. R. f. Krain v. 29. Juli 1894, Z. 1941.)

Mit h. Min.-Erlass v. 7. Jänner 1895, Z. 29.480 ex 1894, wurde Herr Prof. Anton ›bhofer in die VIII. Rangsclasse versetzt. (L. Sch. v. 23. Jänner 1895, Z. 120.)

Mit h. L. Sch. R.-Erlasse v. 23. Septemb. 1894, Z. 2275, wurde der bisherige k. k. mnasiallehrer Herr Johann Gessler im Lehramte definitiv bestätigt und ihm der el eines Professors verliehen.

Infolge Ablebens des Superintendenten und evang. Pfarrers Herrn Karl Bauer, der ch eine Reihe von Jahren den evangelischen Schülern des Obergymnasiums den Religionserricht ertheilt hatte, wurde sein mit dem Religionsunterrichte bei den evangelischen ülern des Untergymnasiums und im letzten Schuljahre auch des Obergymnasiums betraut ›esener Vicar Herr Karl Günther zur Dienstleistung beim evang. Oberkirchenrathe Wien einberufen. An seine Stelle als evangel. Religionslehrer trat (einstw. provisorisch) ›r Robert Czilchert, evangel. Pfarradministrator-Stellvertreter in Klagenfurt.

III.

Lehrverfassung.

Der Unterricht wurde nach dem mit hoher Minist.-Verordnung vom 26. Mai 1884, 0.128, und vom 24. Mai 1892, Z. 11.372, abgeänderten Lehrplane ertheilt und die vorhriebene Zahl schriftlicher Haus- und Schularbeiten in den Sprachfächern und in der hematik gegeben. Diesbezüglich wird auf das Programm für 1886, S. 21—26, und auf Verordn.-Blatt des Min. f. C. u. U. v. J. 1892, S. 397, verwiesen.

Der Lehrplan für den obligaten Turnunterricht findet sich im Verordn.-Bl. Min. f. C. u. U. v. J. 1875, S. 257—263, der für den Zeichenunterricht sammt Inctionen im Verordn.-Bl. des Min. f. C. u. U. v. J. 1891, S. 180—194.

Absolvierte Lectüre und **Memorierstoff** aus den lateinischen, echischen und deutschen Classikern.

a) Latein.

III. a u. b Classe. Lectüre: Cornelii Nepotis vitae (n. Weidner): Miltiades, Theocles, Aristides, Pausanias, Alcibiades, Epaminondas, Pelopidas, Hannibal.

Memoriert wurde: III. a: Aristides; Themistocles c. 1; Epaminondas c. 4 u. 5. — b: Aristides, Themistocles c. 1.

IV. a u. b Classe. Lectüre IV. a: Caesar, Bell. Gall. (n. Prammer) I., 1—30 VII., 1—33, 36—53, 68—90; Ovid (n. Gehlen-Schmidt) Nr. 1, 2 u. 3. — Lectüre IV. b Caesar, Bell. Gall. I, 1—30; VII, 1—58; das übrige cursorisch; Ovid, Metam. Nr. 1, 2 u. 5

Memoriert wurde: IV. a: Caes., I, c. 13 u. 14; VII, c. 14 u. 29; Ovid, Metam Nr. 1. — IV. b: Caes. I, c. 1; c. 13, § 3 bis Ende; c. 14, § 1—3; VII, c. 23; Ovid, Met I. v. 1—25.

V. Classe. Lectüre: Livius (n. Zingerle): I., XXI. (Auswahl); Ovid (n. Gehlen Metam. Nr. 5, 12, 16, 19; Fasti Nr. 8, 15; ex aliis libr. Nr. 2.

Memoriert wurde: Ovid, Metam. Nr. 5, v. 1—68.

VI. Classe. Lectüre: Sallust „Bellum Jugurthinum" (nach Scheindler) (I. Sem. Cicero, Orat. in Cat. I. (n. Nohl); Vergil, Aeneis I., II. n. Hoffmanns Epitome; Eclo I. u. V.; Georg. II., v. 136—176 und v. 458—540 (laudes Ital. et vit. rustic.).

Memoriert wurde: Bell. Jug. c. 1—2; Orat. in Cat. I. c. 1; Aeneis I. v. 1—3 261—289; II. v. 199—227, 370—401; Georg. II. v. 136—176 (laud. Ital.).

VII. Classe. Lectüre: Cicero: In Catilinam II., Pro Ligario, pro rege Deiota Laelius, (theilweise). — Vergilius: Aeneis, IV., VI., XII. Buch.

Memoriert wurde: Cic. in Cat., II. c. 1., pro Lig., c. 1.; pro rege Deid., c. Laet., c. 2.; Verg. Aen., IV. 53—77, VI., 250—280, 709—740, 806—840.

VIII. Classe. Lectüre: Tacitus, Historien, B. IV. c. 1—38, 54—79, B. V. c. 14— Germania, c. 1—27; Horaz Oden, B. I., 1, 3, 11, 14, 18, 22, 31, 34; B. II. 7, 10, 13, 20; B. III. 1, 2, 3, 4, 16, 21, 30; B. IV. 2, 3, 7, 12. — Epod. 2. — Satir., B. I. 9; B. II. — Epist., B. I. 19, 20.

Memoriert wurde: Oden. I. 1., II. 10., III. 2, 3 v. 1—8., IV. 3.

b) Griechisch.

V. Classe. Lectüre: Xenophon (nach Schenkls Chrestomathie): Anabasis Nr. II., III., VI.; Kyrup. IX., X., XIV.; Homer, Ilias (nach Scheindler): I. u. II. Buch.

Memoriert wurde: Anab. I. § 1—6, III. § 1—4, VI. § 10—14; Kyr. IX. § 6— Homer I. v. 1—82.

VI. Classe. Lectüre: Herodot ed. Hintner: VIII. Buch; Anhang I., II., I Homer, Ilias ed. Scheindler: XXVI., XXVII., XXIX.; Xenoph. Memorabilien ed. Schen I., III., IV.

Memoriert wurde: Homer, Ilias XVI. 662—700, XIX. 1—40.

VII. Classe. Lectüre: Demosthenes (Paulys Ausg.): Olynthische Reden I., und III.; Rede über den Frieden. — Odyssee (ed. Pauly): B. VI., VII., VIII., IX. und

Memoriert wurde: Dem. Olynth. R. I. § 14—18; II. § 1—2; Rede über den Frie § 1—3; Odyssee VI. 175—205; VII. 167—211; IX. 241—264.

VIII. Classe. Lectüre: Plato (ed. Christ): Apologie, Krito, Phaedo c. 64— Sophokles: (ed. Schubert): Antigone; Homer (ed. Pauly): Odyssee, 21, 22, 23.

Memoriert wurde: Platons Apologie, c. XV—XIX und c. XXIII, Kriton, c. X. XII.; Sophokles Antigone v. 332—375 und 781—810.

c) Deutsch.

Lectüre. **I.—VIII. Classe:** Schul- und Privatlectüre nach den betreffenden Lesebüchern. Außerdem wurden gelesen:

VI. Classe. Mittelhochdeutsch: Nibelungenlied und Walthers Gedichte in Auswahl. — Neuhochdeutsch: Minna von Barnhelm als Privatlectüre.

VII. Classe. In der Schule: Schillers Braut von Messina, Jungfrau von Orleans, Wallenstein; Goethes Iphigenie in Tauris. — Als Privatlectüre: Schillers Räuber, Carlos, Maria Stuart; Goethes Götz, Egmont, Shakespeares Macbeth.

VIII. Classe. In der Schule: Goethes Hermann und Dorothea, Lessings Laokoon (Ausgewählte Partien.) — Als Privatlectüre: Kleists Käthchen von Heilbronn, Grillparzers König Ottokars Glück und Ende.

Der Memorierstoff wurde in reichlichem Maße den betreffenden Lesebüchern entnommen und zu declamatorischen Übungen verwendet.

IV.

Lehrbücher.

Religion. I. Classe: Katholische Glaubens- und Sittenlehre von Leinkauf; II. Katholische Liturgik von F. J. Mach; III. und IV. Geschichte der göttlichen Offenbarung des alten und neuen Bundes von Zetter; V. Die katholische Apologetik von Frind; VI. Lehrbuch der kathol. Religion, II. Thl., von F. J. Mach; VII. Lehrbuch der katholischen Religion von Dr. Martin; VIII. Lehrbuch der Kirchengeschichte von Kaltner.

Lateinische Sprache. I.—III. Lateinische Grammatik von Goldbacher; IV.—VIII. Kleine lateinische Sprachlehre von Dr. Schultz; I. Lateinisches Übungsbuch von Nahrhaft, 1. Theil; II. Lateinisches Übungsbuch von Nahrhaft, 2. Theil; III. und IV. Aufgaben zum Übersetzen ins Lateinische von Vielhaber; V.—VIII. Stilistische Übungen der lateinischen Sprache von Fr. Berger. (Die Classiker-Ausgaben s. voran bei dem Ausweise der Lectüre.)

Griechische Sprache. III.—VIII. Griechische Schulgrammatik von Curtius-Hartel II., IV. u. V. Griechisches Lese- und Übungsbuch von Hintner; VI.—VIII. Übungsbuch um Übersetzen ins Griechische von Dr. Schenkl. (Die Classiker-Ausgaben s. voran bei dem Ausweise der Lectüre.)

Deutsche Sprache. I.—V. Deutsche Grammatik von Dr. Willomitzer; I.—VIII. Deutsches Lesebuch von Kummer und Stejskal (in der VI. mit mittelhochdeutschen Texten).

Geographie und Geschichte. I. Leitfaden der Geographie, 1. Theil, von Kozenn-Marz; II.—VIII. Lehrbuch der Geographie von Dr. Supan; II., III., IV. Lehrbuch der allgemeinen Geschichte für die unteren Classen, 1.—3. Theil von Dr. Gindely; IV. Geographie der österr.-ungar. Monarchie von Dr. Mayer; V. und VI. Grundriss der Geographie und Geschichte für die oberen Classen, 1. Theil, von W. Pütz; VI. und VII. Lehrbuch der allgemeinen Geschichte für die oberen Classen, 2. u. 3. Theil, von Dr. Gindely; VIII. Österreichische Vaterlandskunde für die höheren Classen der Mittelschulen von Dr. Hannak; W. Pütz, Grundriss etc., 1. Theil; I.—VIII. Geograph. Schulatlas, Ausg. II., von Kozenn; II., III. und IV. Historischer Schulatlas von Putzger; V.—VIII. Atlas antiquus von Kiepert und Schulatlas von Spruner.

Mathematik. I.—IV. Lehrbuch der Arithmetik für Untergymnasien, I. u. II. Abth., von Dr. Močnik; I.—IV. Lehr- und Übungsbuch der Geometrie für Untergymnasien von Dr. Hočevar; V.—VIII. Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik von Dr. Frischauf; V.—VII. Lehrbuch der Geometrie für Obergymnasien von Dr. Hočevar und dessen geometrischen Übungsaufgaben; VIII. Lehrbuch der Geometrie für die oberen Classen der Mittelschulen von Dr. Močnik; V.—VIII. Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra von Dr. Heis; VI.—VIII. Taschenbuch der Logarithmen von Adam.

Naturgeschichte. I., II., III. Pokornys Naturgeschichte des Thier-, Pflanzen- und Mineralreiches, bearbeitet von Dr. Latzel und Mik; V. Leitfaden der Mineralogie und Geologie von Dr. Hochstetter und Dr. Bisching; Vorschule der Botanik von Dr. Wretschko; VI. Leitfaden der Zoologie für die oberen Classen der Mittelschulen von Dr. Graber.

Naturlehre. III., IV. Anfangsgründe der Naturlehre von Dr. Krist; VII., VIII. Lehrbuch der Physik für Obergymnasien von Dr. Handl.

Philosophische Propädeutik. VII. Grundlehren der Logik von Dr. Höfler; VIII. Lehrbuch der empirischen Psychologie von Dr. Lindner.

Slovenische Sprache. I. und II. Vorbereitungscurs für Deutsche: Slovenisches Lese- und Übungsbuch von Dr. Sket; I. sloven. Abtheilung: Janežič, Slovenska slovnica, bearbeitet von Dr. Sket, und Slovenska čitanka I. von Dr. Sket; II. sloven. Abtheilung: Janežič, Slovenska slovnica, bearbeitet von Dr. Sket, und Slovenska čitanka IV. von Dr. Sket; III. sloven. Abtheilung: Janežič, Slovenska slovnica, bearbeitet von Dr. Sket, und Slovenska čitanka za V. in VI. razred von Dr. Sket; IV. sloven. Abtheil.: Slovenska slovstvena čitanka za VII. in VIII. razred von Dr. Sket, und Staroslovenska čitanka von Dr. Sket.

Anmerkung. Von sämmtlichen hier angeführten Lehrbüchern wurden die approbirten letzten Auflagen, von den früheren Auflagen nur die von der Schulbehörde zugelassenen benützt. Die Lehrtexte der classischen Autoren sind im Ausweise über die Lectüre angeführt. — Diese Lehrbücher bleiben auch im nächsten Schuljahre im Gebrauche, doch werden folgende Änderungen eintreten: In der IV. Classe wird statt der kl. latein. Grammatik von Schultz die lateinische Grammatik von Goldbacher; in der III. Classe statt Vielhaber Aufgaben, I. Hft., Nahrhaft Lateinisches Übungsbuch, III. Th.; in der V. Classe wird statt Kiepert Atlas antiquus Putzgers historischer Schulatlas zur alten, mittleren und neueren Geschichte; in der V. Classe statt Frischauf Allgem. Arithmetik,

Močnik Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für die oberen Classen der Mittelschulen und statt Berger Stilistische Vorübungen Hintner-Neubauer, Sammlung von Übungsstücken zum Übersetzen ins Latein gebraucht werden; in der VII. Classe wird statt Martin, Lehrbuch der katholischen Religion Machs Lehrbuch der katholischen Religion für Obergymnasien, 3. Theil; in der VIII. Classe statt Močniks Lehrbuch der Geometrie Hočevars Lehrbuch der Geometrie für Obergymnasien und dessen geometrische Übungsaufgaben in Gebrauch genommen werden. — Im Slovenischen kommt in der I. slovenischen Abtheilung Slovenska čitanka II., in der II. slov. Abtheil. Slovenska čitanka III in Gebrauch.

V.

a) Themen für die deutschen Aufsätze im Obergymnasium.

V. Classe.

1. Das Schalten und Walten des Herbstes. — 2. Goethes „Fischer" ist nach Inhalt und Form zu erläutern. — 3. Ein Theilnehmer an den isthmischen Spielen erzählt die Entdeckung der Mörder des Ibykus. — 4. Tells Tod. Nach Uhlands gleichnamigem Gedicht. — 5. Das Samenkorn („Klage der Ceres" von Schiller). — 6. Der alte Horatius erbittet vom Volke die Begnadigung seines Sohnes. (Frei nach Livius I. 26.) — 7. Gunther und Hagen im Walthariliede. — 8. *a)* Siegfrieds Ermordung. *b)* Der Burgunden Empfang in Heunenlande. — 9. Die Treue im Nibelungenliede. — 10. Wie kam es, dass Philipp von Macedonien aus dem Kampfe mit den Griechen als Sieger hervorgieng? — 11. Ostern. — 12. Ein Jahr aus dem Leben eines Baumes. — 13. Rettung des Schiffbrüchigen von der Insel Salas y Gomez. — 14. Was treibt die Menschen in die Ferne? — 15. *a)* Hannibals Übergang über die Rhone (Liv. XXI. c. 26—28); *b)* Wie weiß sich Reineke der Todesstrafe zu entziehen? *G. Flora.*

VI. Classe.

1. Wie geht in der älteren Nibelungensage der Fluch, der auf dem Horte lastet, in Erfüllung? — 2. Nutzen der Geschichtschreibung. — 3. Welche ethischen Grundsätze entwickelt Sallust in seiner Einleitung zum „Bellum Jugurthinum"? — 4. Was erstrebten die Gracchen mit ihren Reformen? — 5. Kriemhilde und Gudrun, zwei Heldinnen der Treue. — 6. Nib. Str. 1612—1614, 1616 f., 1621—1624 sind ins Nhd. zu übertragen. — 7. Jugurthas Glück und Ende. — 8. Die Entstehung der neuhochdeutschen Schriftsprache. — 9. Der Charakter des Dichters Hans Sachs nach Goethes Gedichte „Hans Sachs poetische Sendung". — 10. Die Aufgaben der Politik der Hohenstaufen. — 11. Zur Abwahl: „Swer wistuom, êr, grôz rîchheit mêrt, der mêrt sin arebeit" oder „Si jehent, daz lihter sî, da si ouch das boeser bî" oder „Gedinge groezer fröide gît, danne uns diu sumerzit". (Aus Freidanks „Bescheidenheit".) — 12. Besondere und allgemeine Rechtfertigung des Spruches „Timeo Danaos et dona ferentes" (Vergil). *Dr. Rai.*

VII. Classe.

1. Licht- und Schattenseiten der Sturm- und Drangperiode. — 2. Wodurch wird der Untergang des Helden in Shakespeares Drama „Macbeth" herbeigeführt? — 3. Wallensteins Verhalten im zweiten Theile der Trilogie. — 4. Demosthenes' Redekampf gegen Philipp. — 5. Inwieferne wird Schillers Wallenstein unserem Herzen näher gebracht? — 6. Die Ehe und die neue Zeit in Goethes Götz von Berlichingen. — 7. Warum war die Strafe der Verbannung bei den Griechen und Römern weit schwerer als heutzutage? — 8. Inwiefern gibt Schiller in den Worten des Glaubens und Wahnes seinen religiösen und sittlichen Anschauungen Ausdruck? — 9. „Es soll der Sänger mit dem König gehen, sie beide stehen auf der Menschheit Höhen". — 10. Welchen geistigen Einfluss übt Goethes Iphigenie auf den König und auf Orestes? — 11. Die verschiedene Bedeutung des Wortes „Stab" (Bettelstab, Ritterstab, Herrscherstab etc.) mit besonderer Rücksicht auf das Alterthum. — 12. Warum kann man Schiller mit Recht einen Dichter der Freiheit nennen? *Dr. Han.*

VIII. Classe.

1. Wo der Römer siegte, dort wohnte er. — 2. Der Gegensatz zwischen sesshaftem und wanderndem Leben in Goethes Hermann und Dorothea. — 3. Bestrebungen Max. — 4. Entscheidende Völkerschlachten in der Weltgeschichte. — 5. Nihil mortalibus arcu est. — 6. Grenzen der menschlichen Empfindung und Wahrnehmung. — 7. Welche

tände bewirkten die Verurtheilung des Philosophen Sokrates und wie benahm sich der Verurtheilte? — 8. Der romantische Charakter des Ritterschauspieles Käthchen von Heilbronn. — 9. Man lebt nur einmal; über die doppelte Auffassung, welche dieses Sprichwort zulässt. — 10. Rhein und Donau, ein Vergleich. — 11. Die Bedeutung des Liedes für das Volk. — 12. Maturitätsaufgabe (S. 32).

Dr. Hann.

b) Themen für die slovenischen Aufsätze im Obergymnasium.

V. und VI. Classe.

1. Spomin na pretekle počitnice. — 2. Moj rojstni kraj. — 3. *a)* Vile ali žalik-žene narodnem slovstvu. *b)* O usodnih božanstvih v narodnem slovstvu slovenskem. — Na sveti večer. — 5. Pripovedka o Polifemu in njene sličnice slovanske. — 6. Kako nastale živalske pravljice in basni, in ktero je razmerje med njimi? — 7. Snov rešernove pesni: „Krst pri Savici". — 8. Ostanki starih obrednih pesnij v tradicijonalnem slovstvu. — 9. „Sloga jači, nesloga tlači." Nár. pregovor. — 10. Kralj Matjaž v rodovini in v narodni pesni.

Dr. Sket.

VII. und VIII. Classe.

1. Pomen velikih šolskih počitnic v duševnem in telesnem oziru. — 2. Demosten, or domoljubja. — 3. Prevod iz staroslovenščine. (Matevž XVII. 19—27.) — 4. Pomen vorništva v staroklasiški dobi in v sedanjem času. — 5. Nektere značilne posebnosti roslovenskega jezika. — 6. Ktera božanstva so častili stari Slovani? — 7. Kakšne tnosti dičijo dobrega govornika. — 8. Delovanje sv. Cirila in Metoda v Panoniji in na likomoravskem. — 9. Govor ob otvoritvi planinskega doma. — 10. Slovenski spomeniki X—XVI. stoletja.

Dr. Sket.

VI.

Relativ obligate und freie Lehrgegenstände.

A. Evangelische Religionslehre.

(Schülerzahl im I. Semester: 10, im II. Semester: 10.)

Lehrstoff im Untergymnasium: Geschichte der christlichen Kirche. Der Lutherische echismus. Memorieren einzelner Psalmen. Das Wichtigste aus der Einleitung in die l. Schrift.

Lehrbücher im Untergymnasium: Heinrich Palmer: „Der christl. Glaube und das istl. Leben." — Gesangbuch f. d. evang. Kirche in Württemberg.

Lehrstoff im Obergymnasium: Einleitung ins Neue Testament: Die Briefe. Geichte der christlichen Kirche. Memorieren von Bibelversen. Einleitung ins Alte tament.

Lehrbücher im Obergymnasium: K. R. Hagenbachs Leitfaden zum christlichen igionsunterrichte. Siebente Auflage — Durchgesehen und theilweise umgearbeitet von S. M. Deutsch.

K. Günther und *R. Czilchert.*

B. Slovenische Sprache.

I. Vorbereitungscurs für Nichtslovenen aus verschiedenen Classen.

(Schülerzahl im I. Sem.: 8, im II. Sem.: 8.)

Allgemeine Vorbegriffe. Empirisch-analytische Zergliederung leichtfasslicher Lesepe behufs Aneignung der Formenlehre bis zur Classeneintheilung des Zeitwortes. norieren von Lesestücken und Vocabeln. Mündliche und bisweilen schriftliche Übermngsübungen an der Hand des slovenischen Sprach- und Übungsbuches. Monatlich Schulaufgabe. Unterrichtssprache deutsch. 2 St. w.

b) II. Vorbereitungscurs für Nichtslovenen aus verschiedenen Classen.

(Schülerzahl im I. Sem.: 5, im II. Sem.: 4.)

Die syntaktischen Haupteigenthümlichkeiten der slovenischen Sprache und deren praktische Anwendung. Lectüre kleinerer zusammenhängender Lesestücke. Memorieren, Wiedererzählen, freie Wiedergabe des Gelesenen. Sprechübungen. Monatlich eine schriftliche Aufgabe. Unterrichtssprache deutsch. 2 St. w.

c) I. slovenische Abtheilung für Slovenen der I. und II. Classe und für absolvierte Schüler der beiden Vorbereitungs-Curse.

(Schülerzahl im I. Sem.: 32, im II. Sem.: 30.)

Die Hauptpunkte aus der Formenlehre. Syntax des einfachen Satzes. Lectüre mit Erklärungen und Bemerkungen. Memorieren und Vortragen poëtischer und prosaischer Stücke. Monatlich eine Aufgabe. 2 St. w. *J. Scheinigg.*

d) II. slovenische Abtheilung für Slovenen der III. und IV. Classe.

(Schülerzahl im I. Sem.: 14, im II. Sem.: 14.)

Systematische Darstellung der Hauptpunkte aus der Formenlehre, betreffend die Verbalclassen, die Tempusbildung und die Steigerung des Verbum. Die wichtigsten Punkte aus der Moduslehre. — Lectüre poëtischer und prosaischer Stücke mit Erklärungen und Bemerkungen. Memorieren und Vortragen ausgewählter poëtischer und prosaischer Stücke. Monatlich ein Aufsatz. 2 St. w.

e) III. slovenische Abtheilung für Slovenen der V. und VI. Classe

(Schülerzahl im I. Sem.: 19, im II. Sem.: 18.)

Hauptpunkte aus der Wortbildungslehre, besonders die Ableitung und Zusammensetzung der Substantiva und Adjectiva, und die Bildung der Lehnwörter. — Lectüre und Erklärung poëtischer und prosaischer Stücke. Charakteristik der epischen Dichtungsgattung und der Prosa. — Memorieren und Vortragen ausgewählter Gedichte. Monatlich ein Aufsatz. 2 St. w.

f) IV. slovenische Abtheilung für Slovenen der VII. und VIII. Class

(Schülerzahl im I. Sem.: 12, im II. Sem.: 11.)

Altslovenische Formenlehre und Erklärung glagolitischer und cyrillischer Denkmäler. — Einiges aus den slavischen Alterthümern und Übersicht der altslovenischen Literatur. — Anfänge der neuslovenischen Literatur und Lectüre der neuslovenischen Denkmäler aus dem X—XVI. Jahrhundert. — Monatlich ein Aufsatz. 2 St. w. *Dr. J. Ske*

Die Unterrichtssprache der vier slovenischen Abtheilungen slovenisch.

C. Kalligraphie.

(Schülerzahl im I. Sem.: 75, im II. Sem.: 70.)

Der Schreibunterricht beschränkte sich auf die Einübung der Current-Lateinschrift mit besonderer Berücksichtigung der Körper-, Feder- und Hefthalt Zugleich wurde an der Schultafel vorgeschrieben. Beide Abtheilungen der I. Classe ha je eine Stunde wöchentlich Unterricht. Befreit waren im I. Semester 15, im II. Sem 16 Schüler auf Grund ihrer lobenswerten Schrift. *A. Meinga*

D. Stenographie.

I. Abtheilung. Schülerzahl im I. Sem.: 43, im II. Sem.: 35. — Wortbildung Wortkürzung. 2 St. w.

II. Abtheilung. Schülerzahl im I. Sem.: 21, im II. Sem.: 19. — Satzkürzung. 2 S *G. Flo*

E. Italienische Sprache.

(Schülerzahl im I. Sem.: 30, im II. Sem.: 23.)

Der Unterricht in der italienischen Sprache wurde in einem Curse ertheilt.

Erster oder niederer Curs: Laut- und Formenlehre nach der Grammatik von Dr. A. Mussafia. — Lectüre einiger leichter italienischer Bruchstücke aus demselben Buche. — Mündliche und schriftliche Übersetzungen aus beiden Sprachen. — Memorieren von Vocabeln von italienischen Sprichwörtern und von kleinen Lesestücken. — Sprechübungen an der Hand der Lectüre. — Monatlich eine Schulaufgabe. 2 St. w. *V. v. Slop.*

F. Zeichnen.

(Schülerzahl im I. Sem.: 60, im II. Sem.: 60.)

Dem Zeichenunterrichte standen 4 wöchentliche Unterrichtsstunden zur Verfügung; derselbe wurde in 5 Cursen (2 Abtheilungen) mit je 2 wöchentlichen Unterrichtsstunden parallel ertheilt.

Unterrichtsstoff: 1. Curs: Geometrische Figuren und Ornamente. — 2. Curs: Geometrische Körper; Flachornamente in Umrissen. — 3. Curs: Zusammengesetzte geometrische Körper und einfache Bautheile; classische polychrome Flachornamente. — 4. Curs: Bauglieder und Gefäße; Flachornamente verschiedener Stile. — 5. Curs: Architecturtheile, Gefäße, plastische Ornamente, Köpfe. *F. Schreyer.*

G. Gesang.

(Schülerzahl im I. Sem.: 81, im II. Sem.: 80.)

Der Gesangsunterricht wurde in drei Abtheilungen und 5 wöch. Stunden ertheilt.

Lehrstoff: I. Abtheilung: Übungen aus der Gesangslehre für die Unterclassen der Mittelschulen von Grell. 2 St. w. — II. Abtheilung: Gesangslehre von Grell nebst 2- und 3stimmigen Liedern von verschiedenen Meistern. 2 St. w. — III. Abtheilung: Gemischte Chorgesänge geistlichen und weltlichen Inhaltes. 1 St. w. *J. Reiter.*

VII.

Lehrmittelsammlungen.

A. Lehrerbibliothek.

(Custos: Prof. Joh. Gessler.)

Dieselbe wurde vermehrt:

1. Durch Schenkung. Archäologisch-epigraphische Mittheilungen aus Österreich, VII. Jg., Heft 1—2. — Ilg, Kunsthistorische Charakterbilder aus Österreich-Ungarn. — Prager Studien 1894, Heft 1—4. — Schröder und Röthe, Zeitschrift für deutsches Alterthum, alle vier Geschenk des hohen k. k. Ministeriums f. C. u. U. — Carinthia I. und II., Geschenk des historischen und naturhistorischen Vereines am Landesmuseum von Kärnten. — Mittheilungen des naturwissenschaftlichen Vereines für Steiermark, 1890. — Zeitschrift des deutschen und österreichischen Alpenvereines, Bd. XXIII.—XXV., beide Geschenk des Herrn k. k. Ober-Bergrathes R. Knapp. — Organisatorische Bestimmungen der technischen Hochschule in Wien, Geschenk ebenderselben. — Personalstand der Diöcese Gurk, Geschenk des f. b. Ordinariats-Kanzlei. — Scheffler, Die Naturgesetze, I.—IV. Theil, nebst 3 Supplementen; Scheffler, Die Grundlagen der Wissenschaft; Scheffler, Die Welt nach menschlicher Auffassung; alle drei Geschenk des Herrn Verfassers.

2. Durch Ankauf. *a)* Einheitliche Werke: Aus deutschen Lesebüchern, Bd. III.-V., Gera u. Leipzig, Th. Hoffmann. — Burgerstein-Netolitzky, Handbuch der Schulhygiene. — Hayeck, Handbuch der Zoologie. — Janssen, Geschichte des deutschen Volkes, Bd. VII. — Müller Ivan, Handbuch der classischen Alterthumswissenschaft, Bd. VI. — Müller Joh., Kosmische Physik. — Österreichisch-ungarische Monarchie in Wort und Bild. (Fortsetzung.) — Overbeck, Geschichte der griechischen Plastik, Bd. II. — Pastor, Geschichte der Päpste, Bd. II. — Serret, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. — Wetzer-Welte, Kirchenlexikon, Bd. I. — Wüllner, Experimentalphysik.

b) Zeitschriften (1895-er Jahrgänge): Deutsche Rundschau von Rodenberg — Globus, illustrierte Zeitschrift f. Länder- und Völkerkunde. — Lehrproben und Lehrgänge von Frick. — Mittheilungen der Centralcommission f. Erhaltung der Kunst- und Baudenkmale in Wien. — Mittheilungen der Geographischen Gesellschaft in Wien. — Österreichische Botanische Zeitschrift von Skofitz. — Österreichische Mittelschule. — Petermanns Geographische Mittheilungen. — Verhandlungen der Zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. — Verordnungsblatt des h. k. k. Ministeriums f. C. u. U. — Zeitschrift für die österreichischen Gymnasien. — Zeitschrift für das Realschulwesen. — Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht von Mach und Schwalbe. — Zoologischer Anzeiger von Carus.

Stand der Bibliothek am Schlusse des Schuljahres: 2150 Nummern.

B. Schülerbibliothek.

(Custos: Prof. A. Grillitsch.)

Dieselbe wurde vermehrt:

1. Durch Schenkung. J. Proschko: Geschichtliches aus Ungarn. — 27 slovenisch Bücher verschiedenen Inhaltes (von Prof. Dr. Sket). — Wettstein: Botanik.

2. Durch Ankauf. *a)* Einheitliche Werke: Griesinger: Im hohen Norden. — Henseler: Andreas Hofer. — F. Hoffmann: Der deutsche Jugendfreund (49. Bd.). — J. Proschko: Jugendheimat (9. Bd.). — Stahl: Die letzten Tage von Pompeji. — Trewend Jugendbibliothek (4 Bde.). — Verlagsgesellschaft Stuttgart: Der gute Kamerad. — Wildemuth: Jugendgarten (29. Bd.). — Blume: Deutsche Aufsätze. — Engelmann: Germani Sagenborn. — Freytag: Die Ahnen (6 Bde.). — Graesers Schulausgaben classischer Wer (je 12 Ex.): Laokoon; Wallenstein. — Koenig: Deutsche Literaturgeschichte. — May: D Schatz im Silbersee; In den Cordilleren; Old Surehand (2 Bde.). — Palleske: Die Kun des Vortrages. — Perktold: Bemerkungen zum 4. Bande des Lesebuches von Kummer u Stejskal (2 Ex.). — Strehl: Der deutsche Aufsatz. — Tempskys Schulausgaben classisch Werke: Hermannschlacht; Prinz Friedrich von Homburg; Maria Stuart; Nathan der Wei — Verne: Der Findling (2 Bde.); Meister Antifers Abenteuer (2 Bde.). — Weise: Uns Muttersprache. — Wörishoffer: Robert der Schiffsjunge. — Levstik: Zbrani spisi (5. B — Sket: Staroslovenska čitanka (4 Ex.). — Franzisci: Touristische Farbenskizzen. — Hi mann: Taschenatlas. — Hölders Verlag: Tagebuch meiner Reise um die Erde (I. Bd.). Mayer: Geschichte der österreichisch-ungarischen Monarchie für die Jugend (5 E — Simon: Aus Griechenland. — Sievers: Europa. — Smolle: Erzherzog Albrecht. Berger: Zwei anatomische Wandtafeln. — Dennert: Pflanzenmorphologie. — Eschner: I anatomische Wandtafeln. — Goering: Ausländische Culturpflanzen (7 Bilder). — Landsb Streifzüge durch Wald und Flur. — Marshall: Naturgeschichtliche Plaudereien und V träge. — Schlitzberger: Die einheimischen Schlangen (4 Tafeln s. Text). — Schub Naturgeschichte des Pflanzenreiches. — Villmorin: Blumengärtnerei. — Amicis: Maro Il Romanzo d'un Maestro (2 Bde.); Spagna. — Bersezio: Il cane del cieco. — Buch Leitfaden der Kunstgeschichte. — Falke: Geschichte des deutschen Kunstgewerbes. Fratelli Treves: Mondo Piccino. — Hauff: La Carovana. — Janitschek: Geschichte deutschen Malerei. — Lesage: Aventure di Gil Blas di Santillana. — Verlagsgesellsc Stuttgart: Das neue Universum (15. Bd.).

b) Zeitschriften und Lieferungswerke: Gehalten, resp. fortgesetzt wur Classischer Bilderschatz. — Deutscher Hausschatz. — Deutsche Rundschau f. Geogra und Statistik. — La Settimana. — Österreich-Ungarn in Wort und Bild. — Stenogr sche Lesehalle (2 Ex.). — Stenographische Correspondenz.

Stand der Schülerbibliothek am Schlusse des Schuljah Gruppe I. (Jugendschriften I.—IV. Classe) 1131 Stücke; Gruppe II. (Deutsche Sprache Literatur) 908 Stücke; Gruppe III. (Antike Sprachen und Literatur) 123 Stücke; Grupp (Slovenische Literatur) 220 Stücke; Gruppe V. (Geographie und Geschichte) 444 Stü Gruppe VI. (Mathematik und Physik) 61 Stücke; Gruppe VII. (Naturgeschichte) 142 Stü Gruppe VIII. (Zeitschriften etc.) 207 Stücke. Summe: 3236 Stücke.

C. Naturhistorisches Cabinet.

(Custos: Prof. Dr. K. Frauscher.)

Zuwachs: *a)* Durch Ankauf: 1 Modell des menschlichen Auges; 7 S exemplare von Wirbelthieren: Wiedehopf, Bachstelze, Nachtigall, Turteltaube, Grasf Wechselkröte, Flussbarsch; 20 Spirituspräparate aus der zoologischen Station von N 35 Stück Insecten; 10 Mineral-Species, darunter: Silber, Arsen, Rothgültigerz, g Turmalin etc.

b) Durch Schenkung: Vor allem sei hier die Schenkung einer Collection von 451 richtig bestimmten und geordneten Dipteren Kärntens erwähnt, welche Herr k. k. Gymn.-Prof. W. Tief in Villach unserem Gymnasium zuwendete und wofür ihm auch hier öffentlich der Dank ausgesprochen wird. — Ferner spendeten: Herr Prof. Norb. Lebinger: einen Prunkfasan ♂ und ♀, sowie einen Goldfasan ♀; Herr Prof. Al. Grillitsch: einen Flussuferläufer; Maier (III. a): einen Canarienvogel; Herr v. Dietrich: einen Moschusbeutel, Moschus und zwei Sepienschulpen; das Museum „Rudolfinum", Herr Prof. M. Brunlechner, Herr Ing. Berger, Križaj (VIII.) und Kommetter (III. b) verschiedene Mineralien; Attacus luna H. Klimsch (VII.); amerikanische Buprestiden Frl. E. Laurin.

Stand am Schlusse des Schuljahres: Stopfexemplare von Wirbelthieren 179, zoolog.-anatom. Modelle 18, Spirituspräparate 120, Arthropodensammlung 2081 Species; Mineraliensammlung: 235 Species in 1200 Handstücken; geognostisch-palaeontologische Sammlung: 527 Gesteine und Fossilien. Im übrigen keine Veränderung.

D. Physikalisches Cabinet.

(Custos: Prof. A. Webhofer.)

Zuwachs durch Ankauf: Spiralförmig gesprengte Flasche; Federwage nach Jolly; Modell der Frictionsrollen; Schiffslampe; Seifendruckapparat; Cartesianischer Taucher mit Druckkolben; Kautschukballon mit Absperrhahn; Pfeife mit Schuber; Photometer nach Ritchie; Schiffscompass; isolierter Conductor; Probescheibchen und Kügelchen; Quadrantenelektrometer nach Thomson; Wheatstones Brücke nach Siemens; Elektrothermometer; Siedepunktapparat; Modell des Dampfkolbens mit Schwungrad; Mittagslinie-Bestimmer nach Winkler; Chemikalien; Glassorten; Verbrauchsartikel.

Stand am Schlusse des Schuljahres: I. Zur Mechanik 142 Apparate. — I. Zur Chemie 29 Apparate und circa 200 Präparate. — III. Zur Wärme 46 Apparate. — V. Zum Magnetismus 24 Apparate. — V. Zur Elektricität 141 Apparate. — VI. Zur Akustik 0 Apparate. — VII. Zur Optik 103 Apparate. — VIII. Zur Astronomie 16 Apparate.

E. Geometrische Sammlung.

(Custos: Prof. A. Webhofer.)

Zuwachs durch Ankauf: Drei Modelle zur Demonstration der Supplementecken; Doppelpyramide aus Draht mit drei Blechpyramiden; Dreieck mit Griff; Transporteur.

Stand am Schlusse des Schuljahres: 14 Drahtmodelle, 13 Holzmodelle, 0 Zeichenrequisiten.

F. Geographisch-historische Sammlung.

(Custos: Prof. N. Lebinger.)

Zuwachs durch Ankauf: Kiepert, Politische Wandkarten: Frankreich, Russland, Nordamerika; Kiepert, Historische Wandkarten: Reiche der Macedonier und Perser, Alt-Gallien.

Stand am Schlusse des Schuljahres: *a)* Wandkarten, General- u. Specialkarten 87 Stück; *b)* Tabellen und Wandbilder 91 Stück; *c)* Plastische Karten 4 Stück; Atlanten 18 Stück; *e)* Globen 2 Stück; *f)* Tellurien 1 Stück.

G. Geräthe für den Turnunterricht.

(Custos: Prof. A. Lesky.)

Zu den in den Jahres-Programmen 1893 und 1894 ausgewiesenen Geräthen und Einrichtungsstücken kamen heuer infolge Anweisung eines außerordentlichen Credites von 300·— hinzu: 2 Matratzen mit Seegrasfüllung, 1 verstellbarer Barren sammt Brücke und Rollvorrichtung, 1 Sturmspringel sammt Sturmlaufbrett, 1 Schaukelreck, 40 Keulen, 1 Stemmhanteln von 16—46 *kg*, 1 Gabelhaken zum Auf- und Abhängen der Schwebegeräthe, 1 Waschapparat u. s. w.

H. Lehrmittel für den Zeichenunterricht.

(Custos: Zeichenlehrer F. Schreyer.)

Zuwachs durch Ankauf: Vorlagewerke: A. Anděl, „Das geometrische Ornament" und „Das polychrome Flachornament", 4 Hefte. — Modelle: Maske des Zeus von Pericoli, Maske des Moses von Michel Angelo, Büste des Merkur von Thorwaldsen, Kopf des Apollo vom Belvedere, Isiskopf und 18 Modelle antiker Thongefäße.

Stand am Schlusse des Schuljahres: 14 Vorlegewerke, 7 perspectivische Demonstrationsapparate, 7 Drahtmodelle, 45 Holzmodelle, 132 Gipsmodelle, worunter Bautheile, Gefäße, ornamentale und figurale Reliefs, Köpfe und Büsten, und 67 Stück sonstige Unterrichtsbehelfe.

I. Lehrmittel für den Gesangsunterricht.

(Custos: Musikvereins-Director J. Reiter.)

Zuwachs durch Ankauf: K. L. Drobisch, Deutsche Messe. — Geschenkt wurde: S. C. Nentwig, Kirchenlieder, und Roller, Chorgesangsschule (von der Manzschen Verlags-Buchhandlung in Wien).

Stand am Schlusse des Schuljahres: Schulen: 4; Messen: 2 für gemischten, 3 für Männerchor; Liedersammlungen: 6; Einzelne Chöre: 8 Männerchöre geistlichen, 67 Männerchöre weltlichen Inhaltes, 8 gemischte Chöre; Liederspiele: 1; Tongemälde: 1; Motetten: 1 Ex.

VIII.

Maturitätsprüfung.

a) Schriftliche Prüfung,

vorgenommen am 10. bis 15. Juni 1895.

Die Themen lauteten:

I. Aus dem Deutschen: „Das allmählige Anwachsen der Ostmark zu einem großen Staatengebilde ist in Grundzügen klarzulegen."

II. Aus der Mathematik: 1. „Bei einer Rundreise zahlte man für eine Fahrkarte III. Cl. 15 fl., für eine solche II. Cl. 22 fl.; wie viele Personen lösten Karten II. und Karten III. Cl., wenn der Cassier 1292 fl. einnahm und mit der II. Cl. mehr Personen fuhren als mit der III. Cl.?" — 2. „Ein Dreieck *a)* zu construieren, *b)* trigonometrisch aufzulösen aus $b = 26\,cm$, $ha = 16{\cdot}32\,cm$ und $hc = 24\,cm$." — 3. „Es soll an die Ellipse $9x^2 + 16y^2 = 144$ eine Tangente gezogen werden, welche von den positiven Coordinatenachsen gleiche Stücke abschneidet; wie lautet die Gleichung derselben, und welches sind die Coordinaten des Berührungspunktes?"

III. Aus dem Deutschen ins Lateinische: „Die Kraft des menschlichen Geistes. Es ist kein Zweifel, dass nur wenige das Ziel erreichen usw." (Aus Sedlmayer-Scheindler, Lat. Übungsbuch f. d. ob. Cl. d. Gymn. 1894, S. 53.)

IV. Aus dem Lateinischen ins Deutsche: „Turris erat vasto suspectu . . ." bis „ad fastigia iactant." (Vergil, Aen. lib. IX. v. 530—568 [Helenor und Lycus].)

V. Aus dem Griechischen: Platons Phaedon, S. 2, von „*Φαιδ. Τοῦτ' ἔστι τὸ πλοῖον . . .*" bis „*ἀεὶ πάντων ἥδιστον.*" (30 Zeilen 8°.)

VI. Aus dem Slovenischen: „Za ktere vzore nas navdušujejo staroklasiški satelji?" (Zu welchen Idealen begeistern uns die altclassischen Schriften?)

b) Verzeichnis der Abiturienten,

welche sich der schriftlichen Maturitätsprüfung unterzogen habe

1. Groltsch Johann aus Klagenfurt, 18 Jahre alt, vollendete die Gymnasialstudien in 8 Jahren. Gewählter Beruf: Theologie.
2. Guggenberger Johann aus Luggau, 21 J. alt, vollend. d. Gst. in 8 J. Gew. B.: Theologie.
3. Hafner Franz aus Altendorf b. Wolfsberg, 20 J. alt, vollend. d. Gst. in 8 J. Gew. B.: Theologie.
4. Hambrusch Josef aus Klagenfurt, 19 J. alt, vollend. d. Gst. in 9 J. Gew. B.: Technik.
5. Klimsch Hugo aus Ober-Ferlach, 20 J. alt, vollend. d. Gst. in 9 J. Gew. B.: Theologie.
6. Lahounig Blasius aus Pfarrdorf b. Prävali, 19 J. alt, vollend. d. Gst. in 8 J. Gew. B.:

7. Lindner Stephan aus Klagenfurt, 18 J. alt, vollend. d. Gst. in 8 J. Gew. B.: Jus.
8. Loigge Johann aus Griffen, 22 J. alt, vollend. d. Gst. in 9 J. Gew. B.: Theologie.
9. Marchart Vincenz aus Klagenfurt, 19 J. alt, vollend. d. Gst. in 8 J. Gew. B.: Eisenbahn.
0. Mühlbacher Johann aus Klagenfurt, 19 J. alt, vollend. d. Gst. in 9 J. Gew. B.: ?
1. Neuwirther Franz aus Oberhof b. Metnitz, 22 J. alt, vollend. d. Gst. in 8 J. Gew. B.: Theologie.
2. Novak Franz aus Graz in Steiermark, 19 J. alt, vollend. d. Gst. in 8 J. Gew. B.: Eisenbahn.
3. Paulitsch Michael aus Rieding b. Wolfsberg, 21 J. alt, vollend. d. Gst. in 8 J. Gew. B.: Theologie.
4. Pietschnigg Hubert aus Wolfsberg, 20 J. alt, vollend. d. Gst. in 8 J. Gew. B.: Theologie.
5. Puck Julius aus Klagenfurt, 18 J. alt, vollend. d. Gst. in 8 J. Gew. B.: Philosophie.
6. Randl Oskar aus Judenburg in Steierm., 18 J. alt, vollend. d. Gst. in 8 J. Gew. B.: Medicin.
7. Reibnegger Georg aus Gassarest b. Gurk, 21 J. alt, vollend. d. Gst. in 9 J. Gew. B.: Eisenbahn.
8. Reinlein Jakob, Freih. v., aus Villach, 18 J. alt, vollend. d. Gst. in 8 J. Gew. B.: Jus.
9. Reschian Matthias aus St. Urban ob Glanegg, 20 J. alt, vollend. d. Gst. in 8 J. Gew. B.: Jus.
0. Schiwitz Josef aus Gries b. Wolfsberg, 19 J. alt, vollend. d. Gst. in 8 J. Gew. B.: Theologie.
. Übersberger Johann aus Klagenfurt, 18 J. alt, vollend. d. Gst. in 8 J. Gew. B.: Philosophie.
. Vogl Hermann aus Mähr.-Neustadt in Mähren, 18 J. alt, vollend. d. Gst. in 8 J. Gew. B.: Beamter.
. Wouk Karl aus St. Johann b. Unter-Drauburg, 19 J. alt, vollend. d. Gst. in 8 J. Gew. B.: Medicin.
. Zenkl Josef aus Radsberg, 19 J. alt, vollend. d. Gst. in 8 J. Gew. B.: Militär.

c) Nachtrag,

betreffend das Jahr 1894.

Die mündliche Maturitätsprüfung im Sommertermine 1894 hat nach schluss des Schuljahres in den Tagen vom 6. bis 11. Juli unter dem Vorsitze des Herrn ndesschulinspectors Dr. Jos. Gobanz stattgefunden. Von den angemeldeten 36 Abi- ienten unterzogen sich dieser Prüfung 35, indem einer der Angemeldeten freiwillig on abstand. Von jenen 35 erhielten 2 ein Zeugnis der Reife mit Auszeichnung, nlich: Mosser Peter aus Lind ob Sachsenburg und Vogel Albin aus Klagenfurt; ein Zeugnis der einfachen Reife, nämlich: Bauer Hermann aus Tressdorf, ıas Rudolf aus Telfs in Tirol, Brunner Otto aus Ober-Millstatt, v. Forstner exander aus Assling in Krain, Heyn Theodor aus Klagenfurt, Hudelist Vin- ız aus St. Lorenzen, Kopper Johann aus Klagenfurt, Krainer Josef aus Klagen- . Läufer Friedrich aus Gernsbach im Großh. Baden, Michorl Albert aus Maria l, Neuner Otto aus Klagenfurt, Ott Franz aus Günselsdorf in N.-Ö., Pfundner rmann aus Wolfsberg, Pollak Emil aus Mähr.-Ostrau in Mähren, Rassler Oskar St. Johann a. Brückl, Raunegger Franz aus Wolfsberg, Rettl Josef aus Klagen- , Rosenberg Eduard aus Klagenfurt, Samitz Josef aus St. Peter b. Klagenfurt, ıerz Silvio aus Klagenfurt, Siber Rudolf aus Wien in N.-Ö., Supersperger dreas aus Spittal a. d. Drau, Thaller Max aus Pulst, Tschikof Peter aus Spittal Drau, Wallisch Josef aus Glandorf, Wölwich Victor aus Klagenfurt und chen Josef aus St. Jakob im Rosenth. — Zur Wiederholungsprüfung aus je einem enstande wurden 6 zugelassen.

Die mündliche Herbst-Maturitätsprüfung, bei welcher ein Externist aus ı Gegenständen und 6 Abiturienten aus je einem Gegenstande geprüft wurden, hat r dem Vorsitze des Herrn Landesschulinspectors Dr. Joh. Zindler am 20. September : stattgefunden. Es erhielten hiebei alle 7 Examinanden ein Zeugnis der einfachen ², nämlich: Domenig Otto, Mlinar Alois, Müller Ferdinand, Schlick ·itz, Zarfl Victor, Zsák Friedrich und der Externist Križaj August. — ıaben demnach von den 36 öffentlichen Schülern der VIII. Classe des Schulj. 1893/94 bis auf einen, d. i. 97 %, ihr Ziel erreicht.

IX.

Chronik des Gymnasiums.

1894.

Die Aufnahmsprüfungen wurden ordnungsgemäß am 15. und 16. Juli (I. Cl.), bezw am 17. September (I.—VIII. Cl.), die Wiederholungs- und Nachtragsprüfungen am 17. Se tember abgehalten.

Das Schuljahr 1894/95 ward Dienstag den 18. September mit dem heil. Geistamt welches von dem hochw. Dom- und Stadtpfarrer Herrn Guido Bittner celebriert wurd eröffnet. An demselben Tage wurde den Schülern die Disciplinarordnung verlesen u erläutert und die Stundeneintheilung mitgetheilt. Mittwoch den 19. September begann d regelmäßige Unterricht. Die Gesammtzahl der aufgenommenen Schüler betrug zu Anfa des Schuljahres 432; im Laufe desselben kamen noch 6 Schüler dazu.

Am 20. September fand unter dem Vorsitze des k. k. Landesschulinspectors Her Dr. Joh. Zindler die mündliche Herbst-Maturitätsprüfung statt, deren Ergebnis unt IX, *c* mitgetheilt wird.

Die Namenstage Sr. Majestät des Kaisers (4. October) und Ihrer Majestät der Kaise (19. November) wurden durch Festgottesdienste gefeiert, welchen Lehrkörper und Schü beiwohnten und welche von dem Dom- und Stadtpfarrer G. Bittner celebriert wurden.

Am 1. October, vormittags 11 Uhr, fand in der Sternallee die feierliche Enthüllu des Graf Enzenberg-Denkmales statt, woran sich auf ergangene Einladung der Lehrkörp und die Schülerschaft in Form von Abordnungen betheiligten.

Am 9. December starb nach längerer Krankheit der k. k. Schuldiener Sim Presslacher, welcher seit 1. April 1888 in dieser Eigenschaft thätig war. Eine ac Lungenentzündung, verbunden mit Emphysem, hat den noch verhältnismäßig jungen M dahingerafft. Seine Beerdigung fand am 11. December nachmittags unter Betheiligung Lehrkörpers, der Schülerschaft des Gymnasiums und zahlreichen Publicums statt. 13. December wurde für den Verstorbenen ein Trauergottesdienst in der Gymnasialkap abgehalten. Presslacher, welcher außer der trauernden Witwe auch zwei Kinder hinterl war ein sehr pflichteifriger, treuer und verlässlicher Diener. R. I. P.

1895.

An Presslachers Stelle wurde auf Grund des Gesetzes vom 19. April 1872, R.-G. Nr. 60, der ausgediente Unterofficier Ernst Glatzl ernannt. (L.-Sch.-R.-Erlass 24. Febr. 1895, Z. 316.)

Sonntag den 24. Februar, 11 Uhr 32 Min. vorm., traf der Separat-Eisenbahnzug der Leiche des in Arco verstorbenen Durchlauchtigsten Herrn Erzherzogs Albrec auf der Fahrt nach Wien begriffen, in Klagenfurt ein, aus welchem Anlasse auf All Befehl die Spitzen der Civilbehörden, darunter auch die Directoren der Mittelschulen, Ehrenbezeigung auf dem Südbahnhofe erschienen.

Donnerstag den 28. Februar, zwischen 8 und 9 Uhr, wurde für Weil. Erzher Albrecht in der Gymnasialkapelle ein Trauergottesdienst abgehalten.

Am 12. März starb Herr Karl L. F. Bauer, Superintendent der Wiener Di A. C., Pfarrer der evangelischen Gemeinde A. und H. C. in Klagenfurt, Mitglied des kärnt. Landesschulrathes und Religionslehrer der evangelischen Schüler des k. k. Gy siums. An der Einsegnung und Überführung der Leiche auf den Südbahnhof bethei sich der Lehrkörper und ein Theil der Schülerschaft des Gymnasiums. R. I. P.

Donnerstag den 28. März verschied in Bleiburg in den Armen seiner Mutter seit Beginn des Schuljahres an den Folgen von Gelenksrheumatismus krank gew Schüler der II. b Classe Johann Wank, ein sehr braver und hoffnungsvoller K Zu seinem Begräbnisse, welches am 30. März in Bleiburg stattfand, wurde ein Mitsc mit einem Blumenkranze, den ihm seine trauernden Freunde gewidmet hatten, entse Am 2. April wurde für Wank eine Seelenmesse gelesen. R. I. P.

Dienstag den 4. Juni ertrank im Wörthersee, und zwar in der Badeanstalt zu Wörth, der brave und fleißige Schüler der III. b Classe Ernst Zemme aus Gutt derselbe wurde am Donnerstag den 6. Juni, vormittags 9 Uhr, in Maria Wörth best Dem Leichenbegängnisse des Verunglückten wohnten bei: der Director, der Classenvo der III. b Classe mit allen Schülern dieser Classe und Abordnungen von je zwei Sch aus allen anderen Classen und Abtheilungen. Am 10. Juni wurde für Zemme eine S messe gelesen. R. I. P.

Die schriftlichen Maturitätsprüfungen fanden in der Woche vom 10.—15. Juni die mündlichen wurden vom 6. bis 9. Juli unter dem Vorsitze des Landesschulinsp Herrn Dr. Joh. Zindler abgehalten.

Die mündlichen Versetzungsprüfungen wurden vom 26. Juni bis 5. Juli abgehalten.

Der Unterricht in den freien Gegenständen wurde vom 19. September 1894 bis zum Ende des Schuljahres ertheilt.

Dem Schulgottesdienste und den vorgeschriebenen religiösen Übungen wohnten die katholischen Schüler (mit Ausnahme der Marianums-Zöglinge, welche mit schulbehördlicher Bewilligung ihren eigenen Gottesdienst in der Hauskapelle ihres Instituts-Gebäudes haben) in der Gymnasialkapelle regelmäßig bei, während die evangelischen Schüler den Gottesdienst in der evangelischen Pfarrkirche besuchten.

Der Schluss des Schuljahres erfolgte am Samstag den 13. Juli, nachdem in der Gymnasialkapelle ein feierlicher Dankgottesdienst abgehalten worden war.

X.

Verordnungen und Erlässe

der vorgesetzten Behörden von allgemeinem Interesse.

1.) Mit h. L.-Sch.-R.-Erlass vom 9. December 1894, Z. 3182, wird auf die Errichtung eines k. k. Turnlehrer-Bildungscurses in Graz aufmerksam gemacht. Theilnahme unentgeltlich. Aufnahmsbedingung: Maturitätszeugnis einer Mittelschule. Für Hörer der Philos. Facultät werden Stipendien von je 100 fl. pro Semester in Aussicht gestellt.

2.) Unterr.-Min.-Erlass vom 10. Februar 1895, Z. 29.852 ex 1894, gibt Weisungen Betreff der Behebung, Verwendung und Verrechnung der Jahresdotationen und Geldbeträge, soweit dieselben Staatsgelder betreffen. (L.-Sch.-R. v. 13. März 1895, Z. 403.)

3.) Unterr.-Min.-Erlass vom 12. März 1895, Z. 27.638 ex 1894, gibt neue Weisungen Betreff der Gesundheitspflege an den Mittelschulen. (L.-Sch.-R. v. 22. April 1895, Z. 672.)

4.) Unterr.-Min.-Erlass vom 19. Juni 1895, Z. 13.704, womit der hohe k. k. kärnt. Landesschulrath ermächtigt wurde, in Zukunft die Aufnahme solcher Schüler an das Gymnasium in Klagenfurt, deren Angehörige in Oberkärnten wohnen, in der Weise zu beschränken, dass deren Aufnahme (als neue Schüler) nur aus besonders rücksichtswürdigen Gründen, welche von Fall zu Fall im Wege der Gymnasialdirection in Klagenfurt dem k. k. Landesschulrathe darzulegen sind, gestattet wird. (L.-Sch.-R. v. 26. Juni 1895, Z. 1403.)

XI.

Maßnahmen zur Förderung der körperlichen Ausbildung und Kräftigung der Schüler.

Die Jugendspiele wurden namentlich im Herbste und Frühjahre eifrig betrieben. Der Spielplatz diente auch in diesem Jahre der östlich und unmittelbar hinter dem Gymnasium gelegene, von der hochlöbl. Gemeindevertretung diesem Zwecke gewidmete freie Platz, bezüglich dessen es nur sehr wünschenswert wäre, wenn derselbe behufs Anbringung entsprechender Adaptierungen der studierenden Jugend Kärntens dauernd überlassen würde. Spielleiter waren Gymnasiallehrer Albin Lesky und Supplent Dr. Eugen Giannoni. Die Spieltage waren: Montag nachmittags für I. a, I. b, II. a und II. b, Dienstag nachmittags für III. a, III. b, IV. a und IV. b, Donnerstag nachmittags für das Obergymnasium, welches auch heuer jedoch weniger als im Vorjahre an den Spielen betheiligte.

Die Schüler bekundeten reges Interesse an den Spielen und erschienen öfters auf dem Spielplatze, obwohl keinerlei Zwang ausgeübt wurde.

Von den 38 Spieltagen, welche die Witterungsverhältnisse vom September 1894 bis Ende Juni 1895 gestatteten, entfielen 13 auf den Herbst, 25 auf den Frühling und Sommer. An diesen Spieltagen waren zusammen 1334 Schüler erschienen, und zwar aus:

I. a	I. b	II. a	II. b	III. a	III. b	IV. a	IV. b	V.	VI.	VII.	VIII.	Summe
88	150	141	163	101	75	128	83	139	48	17	1	1334

Gespielt wurden: *a)* Ballspiele: Schlagball, Schleuderball, Kreisball, Stehball, Faustball, Grenzball, Kreisfußball, Wanderball, Fußball mit und ohne Aufnehmen. — *b)* Lauf- und Fangspiele: Barlaufen, Dritten abschlagen, Schwarzer Mann, Diebsfangen, Schlaglaufen, Türkenkopf. — *c)* Kampfspiele: Seilkampf, Ringender Kreis, Hahnenkampf, Kettenreißen.

Bei der Auswahl der Spiele wurde darauf gesehen, dass eine Reihe solcher Spiel geboten werde, die erfahrungsmäßig mit immer größerer Lust selbst von der reifere Jugend gespielt werden. Dies ist namentlich in hohem Maße bei den Ballspielen der Fall bei diesen wurden jedoch nur solche Spielregeln zugelassen, die jede Roheit ausschließe und sogenannte „Athempausen“ beanspruchen.

Bei der Leitung wurde in die Spielthätigkeit der Schüler nicht zu viel eingegriffe da nur dann das Spiel für jene einen großen Wert hat, wenn sie selber es verstehen, ohn viel Streit recht und gut zu spielen.

Der Eislaufverein „Wörthersee“ hat auch im letzten Winter den Schülern d Gymnasiums die Benützung der Eisbahnen im Lendcanal und auf dem Wörthersee gege Lösung einer Saisonkarte zu 2 fl. und eines Abzeichens zu 20 kr. gestattet. Von dies Begünstigung wurde ausgiebiger Gebrauch gemacht. Der Studenten-Unterstützung verein des hiesigen Gymnasiums hat 10 solche Saisonkarten gekauft und an die ärmst Schüler, welche sich über den Besitz von Schlittschuhen ausweisen konnten, vertheilt. Die Direction der Schwimmschul-Gesellschaft hat eine 50 %ige Preisermäßigu für das Bad und den Schwimmunterricht gewährt, sodass ein Bad im Wörthersee samr Wäsche und Schwimmunterricht 10 kr. kostet. Diese Begünstigung ist an Wochentag an keine bestimmte Zeit gebunden, an Sonn- und Feiertagen jedoch auf den Vormitt beschränkt. — Wer noch billiger baden will, kann dies auf der „Papiermühle“, d. i. in d Glanfurt, dem Ausflusse des Wörthersees thun, da Herr J. Weinländer, der Besitz dieser Badeanstalt, die Gymnasialschüler um 3 kr. baden lässt, wobei sie nur für die nöthi Wäsche selbst zu sorgen haben. Der Schwimmeister daselbst, Herr L. Koschat, hat si bereit erklärt, den Schülern des Gymnasiums um 10 kr., bezw. 15 kr. pro Lection Schwim unterricht zu ertheilen. — Die im Programme 1891, Seite 39, getroffene Vereinbarung r dem Ruderverein „Nautilus“, betreffend die Theilnahme der älteren Gymnasi schüler an den Ruderübungen, besteht fort.

XII.

Verzeichnis

sämmtlicher am Schlusse des Schuljahres vorhandenen Schüler.*

I. Classe A.

Antonitsch Alfons aus Ober-Ferlach.
Dietrich Wilhelm, Edl. v., aus Klagenfurt.
Domenig Franz aus Althofen.
Ehrlich Karl aus Wasendorf in Steierm.
Felsberger Hugo aus Schnesnitz b. Straßb.
Haag Anton aus Villach.
Hahn Ludwig aus Zellach b. Wolfsberg.
Haslinger Günther aus Windischgraz in Steiermark.
Herzog Franz aus St. Veit a. d. Gl.
Jabornegg Siegfried, Freih. v., a. Klagenfurt.
Kainbacher Josef aus Klagenfurt.
Kobalter Jakob aus St. Veit a. d. Gl.
*Krebitz Josef aus Kappel a. d. Drau.
Lamquet Karl aus Klagenfurt.
Löhner Leopold aus Judenburg in Steierm.
Mairhoffer Hubert aus Marburg in Steierm.
Malle Paul aus Ober-Ferlach.
Manndorff Rudolf, Freih. v., aus Wilten in Tirol.
Merlin Hermann aus St. Thomas a. Zeiselb.
Mischik (r. Marktl) Oskar aus Villach.
Oremus Karl aus Ebenthal.
Paternioner Johann aus Kohldorf b. Klgft.
Perkounig Rudolf aus Klagenfurt.
Petermann Friedrich aus St. Michael Rosegg.
Pirkenau Erich, Ritt. v., aus Ottmana
Pirker Josef a. Bergstein b. St. Margaret
Plasch Ludwig a. Waltendorf b. Tultsch
Raunecker Anton aus Klagenfurt.
Rogger Alois aus Maria Saal.
Rohrer Johann aus Klagenfurt.
Scherling Anton aus Lussnitz.
Sittner Karl aus Klagenfurt.
*Smoley Richard aus Klagenfurt.
Stauder Ludwig aus Wien in N.-Ö.
Struggl Philipp aus Klagenfurt.
Supersperg Anton aus Sachsenburg.
Vielkind Alfons aus Steindorf in Salz
Vörner Friedrich aus Eger in Böhme
*Wahrheit Karl aus St. Veit a. d. Gl.
*v. Webern Anton aus Wien in N.-Ö.
Webhofer Manfred aus Dornbirn in arlberg.
Wernisch Franz a. Stallhofen b. Oberv
Wiltschnik Rudolf aus Göriach im
Zinko Albert aus Wien in N.-Ö.

* Die Namen der Vorzugsschüler sind mit einem * versehen. Bei den in K Geborenen ist das Vaterland nicht angeführt.

I. Classe B.

Apih August aus Neutitschein in Mähren.
Billicsich Alfred aus Klagenfurt.
Brugger Rudolf aus Klagenfurt.
Brunner Peter aus Mairist b. St. Donat.
Eckert Josef aus Hollstadt in Baiern.
Feldkirchner Karl aus Klagenfurt.
Ferlitsch Vincenz aus St. Stephan a. d. Gail.
Fillafer Anton aus Raibl.
Fresacher Walther aus Gmünd.
Grafenauer Ernst aus Maria am See.
Groinigg Friedrich aus Weitensfeld.
Hafner Jakob aus Weizelsdorf im Rosenth.
Hasslitzer Franz a. Premersdorf b. Pusarnitz.
Hölbling David a. St. Stephan a. Krappfeld.
Horner Ferdinand aus Griffen.
Hueter Eduard aus Lind ob Sachsenburg.
Karner Edmund aus Ober-Goggau b. Tarvis.
Klampferer Thomas aus Hüttenberg.
Kofler Franz aus Hagenegg b. Eisenkappel.
Kottnik Franz aus Dobriach b. Gutenstein.
Krauthauf Arthur aus Innsbruck in Tirol.
Laggner Peter aus Nigglai b. Sachsenburg.
Pichler Josef aus Pusarnitz.
Popotnik Stephan aus St. Stephan a. d. Gail.
Rieder Leo aus Knittelfeld in Steiermark.
Safran Johann aus St. Urban b. Feldkirchen.
Scharwitzl Valentin aus Wudmat b. Lind ob Velden.
Schmölzer Martin aus Gmünd.
Schneider Arnold aus Gmünd.
Schneider Josef aus Villach.
Schöffmann Franz aus Meiselding.
Steinwender Roman aus Althofen.
Sturm Markus aus St. Peter b. Grafenstein.
Suttner Peter aus Feldkirchen.
Tscharre Valentin aus St. Georgen a. Sandh.
Ulbing Thomas aus Föderlach.
Umschaden Norbert aus Lölling.
Widowitz Johann aus Priedl b. Gurnitz.
Winkler Hermann aus Wolfsberg.
Wintschnig Daniel aus Sirnitz.
Wirnsperger Georg aus Feistritz b. Feldkirchen.
Zoff Alois aus Klein St. Paul. (42)

II. Classe A.

egus Johann aus Glanhofen.
apelari Johann aus Bleiburg.
berwein Ignaz aus Moos bei Bleiburg.
berwein Karl aus Moos bei Bleiburg.
hrenfeldner Karl aus Bleiburg.
erro Emanuel, Ritt. v., aus Bruck a. d. M. in Steiermark.
ilipowsky Heinrich aus Prävali.
lorian Friedrich aus Obervellach im Möllth.
rank Lorenz aus Radelsdorf b. Pulst.
erschak Gottfried aus Schwarzenbach.
rimschitz August aus Klagenfurt.
ercele Gregor aus Ludmannsdorf.
lebschar Albert aus Friedlach.
orak Cyrill aus Wilten in Tirol.
ssenitschnig Gotthard aus Klagenfurt.
assnik Franz aus Villach.
tzel Robert aus Wien in N.-Ö.
chner Max aus Klagenfurt.
Malle Johann aus Klagenfurt.
Mayrhofer Karl aus St. Veit a. d. Gl.
Millonig Ignaz aus Eisenerz in Steierm.
Ozbič Franz aus Klagenfurt.
Rachoy Rudolf aus Judendorf in Steierm.
Reichel Walther aus Klagenfurt.
v. Riebler Karl aus Klagenfurt.
Sääf Robert, Ritt. v., aus Wels in Ob.-Öst.
*Sannegger Josef aus St. Andrä im Lavantth.
Spitaler Alfons aus St. Veit a. d. Gl.
Steffler Johann aus Kreuzen.
*Sulzer Simon aus Jakling im Lavantth.
Toriser Friedrich aus Perchau in Steierm.
Traun Wilhelm aus Klagenfurt.
Walter Alexander aus Veresmart b. Felvincz in Siebenbürgen.
Wank Valentin aus St. Sebastian.
Warto Ernst aus Bleiberg.
Zeilinger Karl aus Himmelberg. (36)

II. Classe B.

rtlmae Leopold aus Stockenboi.
heim Anton aus Spittal a. d. Dr.
niaux René aus Klagenfurt.
khart Johann aus Qualkowitz in Mähren.
iberger Jakob aus Simmerlach.
iß Christoph aus Hermagor.
hs Günther aus Klagenfurt.
iss August aus Eberstein.
an Julius aus Villach.
iser Karl aus Reisach.
unig Paul aus Waidisch.
nsch Odo aus Ob.-Ferlach.
nmetter Josef aus Klagenfurt.
kner Valentin aus Radsberg.
Lavsékar Bartholomäus aus Freudenberg b. Timenitz.
Lutschounig Johann aus St. Margarethen ob Waidisch.
Meixl Peter aus Ariach.
Messner Franz aus Timenitz.
Pacher Albert aus Globasnitz.
Piko Simon aus Schwarzenbach.
Pridonigg Arnold aus Wolfsberg.
*Purtscher Adolf aus Klagenfurt.
*Reinprecht Ludwig aus Steyer in Ob.-Öst.
*Riedl Robert aus Freistadt in Ob.-Öst.
Sekoll Johann aus Eberndorf.
Sluga Ludwig aus Lengenfeld in Krain.

*Sommeregger Franz aus Oberdorf b. Spittal a. d. Dr.
Thaler Alois aus Lind ob Sachsenburg.
Weiß Rudolf aus Klagenfurt.
Wenger Max aus Ober-Vellach.
Wester Wilhelm aus Bruck a. d. Mur in Steiermark.
Wriesnig Alois aus Klagenfurt. (32)

III. Classe A.

Achatz Oswald aus Klagenfurt.
Berger Ernst aus Briesen in Böhmen.
Egartner Friedrich aus Klagenfurt.
Egger Maximilian aus Millstatt.
v. Ehrenwerth Eugen aus Heft.
Eisner Karl aus Parenzo im Küstenland.
Graber Georg aus Pörtschach am See.
Grafoner Otto aus Klagenfurt.
Grass Arnold aus St. Veit a. d. Gl.
Greilach Ferdinand aus Klagenfurt.
Guggenberger Josef aus Mauthen.
Huber Victor aus Spittal a. d. Dr.
Just Josef aus Ober-Ferlach.
*Koller Ewald aus Feldkirchen.
Krainz Ferdinand aus Klagenfurt.
Maier Wunibald aus Kumpitz in Steier
Maurer Hubert aus Scheifling in Steier
Oberrauner Josef aus Schüttbach.
*Patterer Anton aus Kirchbach.
Reimann Adolf aus Lieding.
Sadjak Andreas aus Rinkolach.
Silatschek Karl aus Villach.
Stangl Markus aus Dobrava b. Ferlach.
Walder Franz aus Stattenberg b. St. Urb
Watzinger Josef aus Gmünd.
v. Zenegg Emerich aus Arnoldstein.
*Zussner Matthias aus Bleiberg. (27)

III. Classe B.

Apollonar Anton aus Wien in N.-Ö.
Clementschitsch Friedrich aus Klagenfurt.
Gressel Karl aus Treffen in Krain.
Gritschacher Franz aus St. Peter im Holz.
Hofer Anton aus Tieschen in Steierm.
Hoyos Josef, Graf, a. Bukarest in Rumänien.
Kommetter Victor aus Klagenfurt.
Kosjek Josef aus St. Peter b. Klagenfurt.
Krappinger Robert aus Guttaring.
Lausegger Johann aus Graz in Steierm.
Lenzatti Arthur aus Venedig in Italien.
Müller Franz aus Wieting.
Némec Hugo, Edl. v., aus Graz in Steierm.
Pridonigg Franz aus Wolfsberg.
*Rainer Hugo aus St. Ruprecht b. Klage
Schneeweiß Ferdinand aus Klagenfurt.
Schwarz Reinhold aus Waiern.
*Streiner Balthasar aus Grades.
Supersperg Ernst aus Sachsenburg.
Tindl Emerich aus St. Veit a. d. Gl.
Treffer Ignaz aus Viktring.
Tschinkowitz Markus aus Ferlach.
Verhounig Valentin aus Gurk.
Wedam Maximilian aus Saifnitz.
Wolte Lukas a. St. Margarethen ob Waid
(2

IV. Classe A.

Achatz Friedrich aus Globasnitz.
Glinig Ignaz aus Schilterndorf b. Bleiburg.
*Happenhofer Hermann aus Linz in Ob.-Ö.
Hausner Johann aus Waltersdorf in Mähren.
Hofbauer Robert aus Klagenfurt.
Hueter Ferdinand aus Lind ob Sachsenburg.
Kaiser Rudolf aus Weißkirchen in Steierm.
Knolz Josef aus Ober-Drauburg.
Košičik Hugo aus Völkermarkt.
Krammer Ernst aus Aich b. Grafenstein.
Laure Franz aus Fischering im Lavantth.
Leberl Friedrich aus Klagenfurt.
Manhart Eduard aus Klagenfurt.
Nowotny Hugo aus Wittingau in Böhmen.
Nussbaumer Hubert aus Klagenfurt.
Oberweger Albert aus Würmlach.
Pehr Heinrich aus Klagenfurt.
*Pflanzl Josef aus Rohitsch in Steierm
Pokorny Albert aus Klagenfurt.
Posch Andreas aus St. Francisci b. Tr
*Rossmann Jakob aus St. Georgen a. S
Schütz Rudolf aus Klagenfurt.
*Skubl Michael aus Bleiburg.
Stramer Otto aus Kötschach.
Sturm Lorenz aus Schmieddorf b. St. Jo
a. Brückl.
Suete Anton aus Reichersdorf.
Teul Anton aus St. Andrä in der Eb
b. Seeland.
Trutschnig Kilian aus Olsach b. Spit
Ullmann Ludwig aus Wien in N.-Ö

IV. Classe B.

Birnbacher Walther aus Klagenfurt.
Brandenburger Adolf aus Cilli in Steierm.
Brunlechner Max aus Klagenfurt.
Eichberger Rudolf aus Bleiburg.
Feinig Josef aus Suetschach.
Gottschey Karl aus Bleiburg.

Harzer Franz aus Seegraben in Steierm.
Hiltl Alfons aus Maria i. d. Wüste in Steierm.
Hopfgartner Heinrich aus Flattach.
Ibounig Johann aus Rosegg.
Kogelnik Johann aus Unter-Klanz b. Gutenstein.
Lakomy Hermann aus Klagenfurt.
Manner Julius aus Heft.
Nedoschill Erwin aus Greifenburg.
Nußbaumer Johann aus Gmünd.
Pamperl Robert aus Klagenfurt.
Pippan Franz aus Klagenfurt.
Pirkenau Günther, Ritt. v., aus Ottmanach.
Schildenfeld Rudolf, Ritt. v., aus Cilli in Steierm.
Sereinigg Peter aus Weitzelsdorf b. Unterbergen.
Spitzer Johann aus Petschnitzen b. Rosegg.
Steinwender Matthias aus Ober-Eberndorf b. Maria-Rojach.
Sturm Sebastian aus Schönberg in Steierm.
Ternouschnigg Franz aus Klagenfurt.
Tschebull Anton aus Gutenstein.
*Wedenik Hermann aus Tainach.
Winkler Oskar aus Wolfsberg.
Writz Franz aus Bleiburg. (28)

V. Classe.

Amberger Franz aus Althofen.
Bittner Rudolf aus Olchovce in Galizien.
Brugger Gustav aus Maria Saal.
Burger Rudolf, Ritt. v., aus Klagenfurt.
Czerny Emil aus Feistritz-Pulst.
Dreo Karl aus Gablern.
Gaugl Felix aus Voitsberg in Steierm.
Hohanz Hubert aus Klagenfurt.
Hornik Friedrich aus Pfarrdorf b. Prävali.
K. Grebmer Leopold aus Spittal a. d. Dr.
Hussger Balthasar aus Zwickenberg.
Hiltl Camillo aus Maria Rast in Steierm.
Hoinig Johann aus Haberberg.
Holzer Moriz aus Gersdorf.
Hornbök Johann aus St. Johann i. Rosenth.
Hübner Raimund aus Klagenfurt.
Jabornegg Alfred, Freih. v., aus Klagenfurt.
Jaritz Friedrich aus Klagenfurt.
Jarkovič Franz aus Ober-Loibach b. Bleiburg.
Jatholnik Thomas aus Leopoldskirchen.
Jatziantschitsch Richard aus Cilli in Steierm.
Jinski Rudolf aus Klagenfurt.
Jlaus Johann aus Kötschach.
Julmer Anton aus Klein-St. Veit.
Jasser Franz aus Langsteg.
Jnasi Josef aus Feistritz im Rosenthale.
Jobisser Leo aus Tiffen.
Mätzler Adolf aus Gottschee in Krain.
Maier Josef aus Penzlberg b. Winklern.
Meingast Friedrich aus Klagenfurt.
Mikl Simon aus Kreuth.
Mörtl Johann aus Klagenfurt.
Nagl Victor aus Klagenfurt.
Nowotny Friedrich aus Wittingau in Böhm.
Oggertschnig Leopold aus Retschach.
*Oremus Alois aus Winklern b. Klagenfurt.
Passegger Josef aus Feldkirchen.
Peterka Hugo aus Straßburg.
Rotter Ruppert aus Petzen b. Schwarzenb.
Schober Hermann aus Döllach im Möllth.
Schwarz Siegfried aus Waiern.
Seifritz Friedrich aus Sielach.
Semmelrock Franz aus Klagenfurt.
Sereinig Johann aus Schlatten b. St. Jakob im Rosenthale.
*Thaler Johann aus Raknitz bei Lind ob Sachsenburg.
Treven Karl aus Klagenfurt.
*Webhofer Bruno aus Dornbirn in Vorarlberg.
Weisinger Johann aus Weisach.
Weiß Franz aus Hürth in Steierm.
Will Florian aus Gurk.
Wölwich Alois aus Wolfsberg.
Zankl Anton aus Gablern.
Zernatto Guido aus Treffen. (53)

VI. Classe.

Ibounig Johann aus Bleiburg.
Kožič Franz aus Schwarzenbach.
Kglnig Stephan aus Kolbnitz.
Kma Johann aus Klagenfurt.
Kagassnig Johann aus Augsdorf b. Velden.
Kerwein Franz aus Moos bei Bleiburg.
Ehrenwerth Alfred aus Heft.
Krlich Alois aus Saifnitz.
Krlich Lambert aus Saifnitz.
Kspieler Rudolf aus Wien in N.-Ö.
Kgstler Gottfried aus Greifenburg.
Kmk Gabriel aus Pubersdorf.
Kif Stephan aus Buchbrunn.
Kyos Ladislaus, Graf, aus Graz in Steierm.
Kßnig Johann aus Witsch b. Tigring.
Kmig Oswald aus Rechberg.
Kch Eduard, Ritt. v., aus Klagenfurt.
*Koschaker Paul aus Klagenfurt.
Kuri Robert aus Villach.
Laßnig Karl aus Sachsenburg.
Lessiak Primus aus Köttmannsdorf.
Maisterl Robert aus Bleiburg.
Meglitsch Heinrich aus Kohldorf b. Völkerm.
Neuwirth Victor aus Feldkirchen.
Oberweger Johann aus Würmlach.
*Ohrfandl Günther aus Klagenfurt.
Oitzinger Raimund aus Kadutschen b. Bleiberg.
*Pichler Adolf aus Ober-Drauburg.
Pichler Richard aus Spittal a. d. Dr.
Pirker Anton aus St. Georgen ob Villach.
Pliemitscher Anton aus Sittenberg b. Klein-St. Paul.
Presslauer Josef aus Stranig im Gailth.

*Reischl Hubert aus Judenburg in Steierm.
Schoffnegger Ferdinand aus Unter-Wuchel b. Grafenstein.
Suklitsch Josef aus Ferlach.
Tscharre Paul aus Klagenfurt.
Uarch Josef aus Kirschentheuer.
Ure Josef aus Kohldorf b. Klagenfurt.
Waltl Josef aus Liescha.
Weinländer Josef aus St. Ruprecht bei Klagenfurt. (40)

VII. Classe.

Arneitz Johann aus Ledenitzen b. Rosegg.
Auernig Raimund aus Emberg b. Greifenb.
Bauer Rudolf aus Tressdorf.
*Blaas Hermann aus Telfs in Tirol.
Cyvín Josef aus Klagenfurt.
Ebert Josef aus Kremsbrücken.
Eichholzer Vincenz aus Völkermarkt.
*Ferjančič Josef aus Klagenfurt.
Fuchs Julius aus Pilsen in Böhmen.
Grafenauer Heinrich aus Klagenfurt.
Ibounig Franz aus Rosegg.
Kakl Matthäus aus Selpritsch b. Velden.
Kernler Albert aus Obervellach im Möllth.
Klimsch Edgar aus Ferlach.
Koch Jakob aus Thörl.
Koller Robert aus Feldkirchen.
*Kuschej Jakob aus Unterloibach b. Bleiburg.
Lucerna Roman aus Semlin in Slavonien.
Mahrhofer Johann aus Grafenstein.
Mente Max aus Miss.
Mikeln Simon aus Dobrova b. Unter-Drau
Nedoschill Karl aus Marburg in Steierm
Pflügl Josef aus Völkermarkt.
Pitter Hermann aus Vöslau in N.-Ö.
Pörtsch Matthias aus Ebriach.
Pschenitschnik Bartholomäus aus Tribej Unter-Drauburg.
Reinsperger Valentin aus Metnitz.
*Schader Alois aus Amlach b. Weisach.
Schmautzer Josef aus Guttenstein.
Stefan Josef aus Würmlach.
Strelli Florian aus Triest im Küstenlan
Tertnik Johann aus Landstraß in Krain
Trübswasser Ludwig aus Völkermarkt.
Vogel Robert aus Klagenfurt. (34

VIII. Classe.

Groltsch Johann aus Klagenfurt.
Guggenberger Johann aus Luggau.
Hafner Franz aus Altendorf b. Wolfsberg.
Hambrusch Josef aus Klagenfurt.
Klimsch Hugo aus Ferlach.
Lahounig Blasius aus Pfarrdorf b. Prävali.
Lindner Stephan aus Klagenfurt.
Loigge Johann aus Griffen.
Marchart Vincenz aus Klagenfurt.
Mühlbacher Johann aus Klagenfurt.
Neuwirther Franz aus Oberhof b. Metnitz.
Novak Franz aus Graz in Steiermark.
Paulitsch Michael aus Rieding b. Wolfsb.
*Pietschnig Hubert aus Wolfsberg.
*Puck Julius aus Klagenfurt.
Randl Oskar aus Judenburg in Steiern
Reibnegger Georg aus Gassarest b. Gu
Reinlein Jakob, Freih. v., aus Villach.
Reschian Matthias aus St. Urban ob Glan
Schiwitz Josef aus Gries b. Wolfsberg.
*Übersberger Johann aus Klagenfurt.
Vogl Hermann aus Mährisch-Neustadt
Wouk Karl aus St. Johann b. Unter-D burg in Steiermark.
Zenkl Josef aus Radsberg. (2

* * *

Anmerkung. Während des Schuljahres sind ausgetreten oder gestorbe

I. a Classe: Glančnik Friedrich aus Völkermarkt, Hammer-Purgstall rich, Freih. v., Privatist, aus Hainfeld b. Feldbach in Steiermark, Krainer Johan Klagenfurt, Schmon Johann aus Rauth b. Keutschach.

I. b Classe: Einspieler Martin aus Suetschach, Jaroljimek August aus nigg b. Trifail in Steiermark, Koller Egon aus Klagenfurt, Kratzer Alois aus Kl furt, Lindner Karl aus Arnoldstein, Stefan Stephan aus St. Daniel im Gailthale.

II. b Classe: Drobesch Primus aus Pirk bei Möchling, Hierländer Ma Gmünd, Otto Matthias aus Gassarest b. Gurk, Pietschnig Simon aus Wolfsberg, V Johann aus Bleiburg (†).

III. b Classe: Zemme Ernst aus Guttaring (†).

V. Classe: Clementschitsch Franz aus Klagenfurt, Feldner Alois aus V Kotzmuth Friedrich aus Pettau in Steiermark, Pitter Ernst aus Vöslau in N.-Ö.

VI. Classe: Dörflinger Max aus Feldkirchen, Grün Max aus Klage Kolenz Josef aus Prävali.

VII. Classe: Kneß Matthäus aus St. Jakob im Rosenthale.

XIII.

Statistik der Schüler.

	Classe												Zusammen
	I.		II.		III.		IV.		V.	VI.	VII.	VIII.	
	a	b	a	b	a	b	a	b					
1. Zahl.													
Zu Ende 1893/94	40	42	28	27	31[1]	30	30	31	52	39	24	36	410[1]
Zu Anfang 1894/95	47	48	36	36	26	26	27	28	56	43	35	24	432
Während des Schulj. eingetreten	1	—	—	1	1	—	2	—	1	—	—	—	6
Im ganzen also aufgenommen	48	48	36	37	27	26	29	28	57	43	35	24	438
Darunter:													
Neu aufgenommen, und zwar:													
aufgestiegen	41	42	3	2	1	—	5	—	4	1	2	2	103*
Repetenten	—	—	1	—	—	3	—	—	—	—	—	—	4
Wieder aufgenommen, u. zw.:													
aufgestiegen	—	—	31	34	23	20	22	26	50	41	31	22	300
Repetenten	7	6	1	1	3	3	2	2	3	1	2	—	31
Während des Schulj. ausgetreten	4	6	—	5	—	1	—	—	4	3	1	—	24
Schülerzahl zu Ende 1894/95	44	42	36	32	27	25	29	28	53	40	34	24	414
Darunter:													
Öffentliche Schüler	44	42	36	32	27	25	29	28	53	40	34	24	414
Privatisten	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2. Geburtsort (Vaterland).													
Stadt Klagenfurt	10	3	8	6	5	3	7	6	11	5	4	7	75
Land Kärnten	23	35	20	21	18	15	16	17	34	32	23	13	267
Nieder- und Oberösterreich	3	—	2	2	—	1	2	—	—	1	1	—	12
Steiermark (32) u. Salzburg (1)	5	1	4	1	2	3	2	5	4	2	1	3	33
Krain und Küstenland	—	—	—	1	1	1	—	—	1	—	2	—	6
Tirol und Vorarlberg	2	1	1	—	—	—	—	—	1	—	1	—	6
Böhmen, Mähren und Schlesien	1	1	—	1	1	—	2	—	1	—	1	1	9
Galizien und Bukowina	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	1
Ungarische Länder	—	—	1	—	—	—	—	—	—	1	—	—	2
Deutschland	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
Italien	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	1
Rumänien	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	1
Summe	44	42	36	32	27	25	29	28	53	40	34	24	414
3. Muttersprache.													
Deutsch	42	32	32	24	24	24	23	23	45	30	25	22	346
Slovenisch	2	10	4	8	2	1	6	5	8	10	9	2	67
Italienisch	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	1
Summe	44	42	36	32	27	25	29	28	53	40	34	24	414
4. Religionsbekenntnis.													
Katholisch des lat. Ritus	43	42	34	31	26	24	28	28	52	39	33	24	404
Evangelisch Augsb. Conf.	1	—	2	1	1	1	1	—	1	1	1	—	10
Summe	44	42	36	32	27	25	29	28	53	40	34	24	414

* 4 weitere Schüler der I. Cl. haben von der gewährten Aufnahme keinen Gebrauch gemacht.

	Classe I. a	I. b	II. a	II. b	III. a	III. b	IV. a	IV. b	V.	VI.	VII.	VIII.	Zusammen
5. Lebensalter (bis 31. Dec. 1895 gerechnet).													
11 Jahre haben vollendet	6	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	9
12 „ „ „	22	7	4	3	—	—	—	—	—	—	—	—	36
13 „ „ „	8	18	9	14	3	5	—	—	—	—	—	—	57
14 „ „ „	7	11	11	8	11	6	5	3	—	—	—	—	62
15 „ „ „	1	3	10	7	7	7	8	7	5	—	—	—	55
16 „ „ „	—	—	2	—	4	5	7	12	20	5	—	—	55
17 „ „ „	—	—	—	—	2	2	6	3	16	13	4	—	46
18 „ „ „	—	—	—	—	—	—	2	2	10	11	9	7	41
19 „ „ „	—	—	—	—	—	—	1	—	1	7	10	8	27
20 „ „ „	—	—	—	—	—	—	—	1	1	2	6	4	14
21 „ „ „	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	3	3	8
22 „ „ „	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	2	4
Summe	44	42	36	32	27	25	29	28	53	40	34	24	414
6. Nach dem Wohnorte der Eltern.													
Ortsangehörige	17	7	10	9	6	5	9	11	15	8	10	9	116
Auswärtige	27	35	26	23	21	20	20	17	38	32	24	15	298
Summe	44	42	36	32	27	25	29	28	53	40	34	24	414
7. Classification.													
a) **Zu Ende des Schuljahres 1894/95:**													
I. Fortgangsclasse mit Vorzug	4	1	7	6	3	2	4	3	5	6	4	3	48
I. Fortgangsclasse	23	30	24	20	16	15	21	16	32	19	23	21	260
Zu e. Wiederhol.-Prüf. zugelassen	9	5	2	3	6	5	2	7	6	9	3	—	57
II. Fortgangsclasse	1	3	2	—	2	2	1	—	5	4	4	—	24
III. „	7	3	1	—	—	1	1	2	5	1	—	—	21
Zu einer Nachtragsprüf. krankheitshalber zugelassen	—	—	—	3	—	—	—	—	—	1	—	—	4
Summe	44	42	36	32	27	25	29	28	53	40	34	24	414
b) **Nachtrag zum Schuljahre 1893/94:**													
Wiederhol.-Prüf. waren bewilligt	7	5	4	4	2	2	5	5	2	7	3	—	4
Entsprochen haben	5	3	4	2	1	2	4	5	2	7	3	—	3
Nicht entsprochen haben (od. nicht erschienen sind)	2	2	—	2	1	—	1	—	—	—	—	—	
Nachtragsprüf. waren bewilligt	—	—	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	
Entsprochen haben	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
Nicht entsprochen haben	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
Nicht erschienen sind	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	
Darnach ist das Endergebnis für 1893/94:													
I. Fortgangsclasse mit Vorzug	7	7	5	1	3	3	4	6	7	5	2	2	7
I. Fortgangsclasse	24	28	19	20	24[1]	22	22	23	38	31	20	34	3
II. „	7	5	2	3	4	5	3	2	6	3	2	—	
III. „	2	2	2	2	—	—	1	—	1	—	—	—	
Ungeprüft blieben	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	
Summe	40	42	28	27	31[1]	30	30	31	52	39	24	36	4

	Classe												Zusammen
	I.		II.		III.		IV.		V.	VI.	VII.	VIII.	
	a	b	a	b	a	b	a	b					
8. Geldleistungen d. Schüler.													
Das Schulgeld zu zahlen waren verpflichtet:													
im 1. Semester	38	35	16	9	13	15	15	11	21	23	20	11	227
im 2. Semester	30	15	16	10	15	15	11	11	22[1]	23	16	11	195[1]
Zur Hälfte waren befreit:													
im 1. Semester	—	—	1	—	—	—	—	1	2	1	—	—	5
im 2. Semester	1	1	—	—	—	—	1	1	2	2	1	—	9
Ganz befreit waren:													
im 1. Semester	6	10	20	27	13	11	13	17	35	20	15	13	200
im 2. Semester	14	27	20	23	12	11	18	17	31	17	18	13	221
Das **Schulgeld** betrug im ganzen:													
im 1. Semester . . . . fl.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3367·50
im 2. Semester . . . . „	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2857·50
Zusammen . fl.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	6225·—
Die **Aufnahmstaxen** betrugen . fl.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	233·10
„ **Lehrmittelbeiträge** betrugen „	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	438·—
„ **Schülerbiblioth.-Beiträge** betr. „	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	437·—
„ **Taxen f. Zeugnisduplicate** „ „	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4·—
Summe . fl.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1112·10
Hiezu Jugendspiel-Beiträge . „	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	115·60
9. Besuch des Unterrichtes in den relativ obligaten und nicht obligat. Gegenständen im II. Sem.													
Zweite Landessprache (Slovenisch):													
I. Vorbereitungscurs	—	—	—	—	1	—	1	2	3	—	1	—	8 } 12
II. „	—	—	—	—	—	—	—	—	2	1	—	1	4 }
I. slovenische Abtheilung	2	10	4	9	—	—	—	—	2	1	2	—	30* } 73
II. „ „	—	—	—	—	2	1	6	5	—	—	—	—	14
II. „ „	—	—	—	—	—	—	—	—	8	10	—	—	18
IV. „ „	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	9	2	11
Italienische Sprache: I. Curs	—	—	—	—	—	—	—	—	3	12	8	—	23
Kalligraphie	39	31	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	70
Stenographie: I. Curs	—	—	—	—	—	—	10	7	14	4	—	—	35 } 54
II. „	—	—	—	—	—	—	—	—	10	5	2	2	19
Freihandzeichnen: I. Curs	11	5	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	18 } 60
II. „	2	—	6	3	2	2	—	—	—	—	—	—	15
III. „	—	—	—	—	3	2	1	3	—	1	—	—	10
IV. „	—	—	—	—	—	—	2	1	2	1	—	—	6
V. „	—	—	—	—	—	—	—	—	5	3	—	3	11
Gesang: I. Curs	14	8	3	2	4	—	—	—	—	—	—	—	31 } 80
II. „	4	1	7	4	1	5	5	2	1	2	—	—	32
III. „	—	—	—	—	—	—	—	—	4	8	3	2	17
10. Stipendien.													
Anzahl der Stipendien	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	56
Anzahl der Stipendisten	—	2	1	4	4	1	3	8	10	9	9	4	55
Gesammtbetrag der Stipendien	—	120 fl. — kr.	52 fl. 50 kr.	366 fl. — kr.	385 fl. 20 kr.	58 fl. — kr.	97 fl. — kr.	607 fl. 40 kr.	998 fl. — kr.	690 fl. 75 kr.	663 fl. — kr.	500 fl. — kr.	4537 fl. 85 kr.

* Darunter 6 Deutsche.

XIV.

Locales Unterstützungswesen.

A. Schulgeldbefreiungen.

Im I. Semester waren von 427 zur Zeit der Schulgeldzahlung vorhandenen öffen lichen Schülern 200 oder 46·83 % von der Zahlung des Schulgeldes ganz und 5 Schül oder 1·17 % halb befreit (zusammen 47·42 % ganz befreit).

Im II. Semester waren von 416 zur Zeit der Schulgeldzahlung vorhandenen öffen lichen Schülern 221 oder 53·12 % von der Zahlung des Schulgeldes ganz und 9 Schül oder 2·15 % halb befreit (zusammen 54·2 % ganz befreit).

B. Stiftungen (Stipendien).

Der Gesammtbetrag aller 56 Stipendien erreichte am Schlusse des Schuljahres Höhe von 4537 fl. 85 kr. Da sich dieser Betrag auf 55 Stiftlinge vertheilt, so bezieht Stipendist durchschnittlich im Jahre 82 fl. 49 kr. (im Vorjahre 85 fl. 63 kr.). Verlie wurden: 2 von dem kärntn. Landesausschuss, 48 von der k. k. Landesregierung in Kärnt 2 von der k. k. Landesregierung in Krain, je 1 von der k. k. Statthalterei in Steierm Niederösterreich, Böhmen und 1 vom h. k. k. Finanzministerium.

a) Die vom **kärntn. Landesausschusse** verliehenen Stipendien sind:

1 *Fortschnigg* zu 160 fl. (Emberger Jakob II. b Cl.);
1 *Fortschnigg* zu 200 fl. (Puck Julius VIII. Cl.).

b) Die von der **k. k. kärntn. Landesregierung** verliehenen Stipendien sind:

2 *Aspernig* zu je 59 fl. (Hornbök Johann V., Pschenitschnig Bartholomäus VII. Cl.);
1 *Bourde, Fb. Otto de la*, zu 58 fl. (Kosjek Josef III. b Cl.);
1 *Caciancig* zu 87 fl. (Katziantschitsch Richard V. Cl.);
3 *Eberndorfer* zu je 22 fl. (Sekoll Joh. II. b, Pörtsch Matthias VII. Cl., 2 cumuliert)
1 *Gutsmann-Weub* zu 64 fl. (Frank Gabriel VII. Cl.);
1 *Hainschitz* zu 102 fl. (Auernig Raimund VII. Cl.);
1 *Herzog* zu 92 fl. 40 kr. (Kogelnik Johann IV. b Cl.);
1 *v. Jauritsch* zu 64 fl. (Schader Alois VII. Cl.);
5 *Kaiser Ferdinand* zu je 105 fl. (Kuri Rob. VI., Grafenauer Heinr. VII., Kuschej Jak. Strelli Florian VII. und Übersberger Johann VIII. Cl.);
1 *Freih. v. Koller* zu 33 fl. (Neuwirth Victor VI. Cl.);
1 *Kometter* zu 77 fl. (Ibounig Johann IV. b Cl.);
2 *Korpitsch* zu je 56 fl. (Schoffnegger Ferdinand VI., Mahrhofer Johann VII. Cl.);
1 *Löschnigg* zu 92 fl. (Greif Stephan VI. Cl.);
1 *Mazigoi* zu 23 fl. (Mikeln Simon VII. Cl.);
1 *v. Metnitz Ursula* zu 84 fl. (Grass Arnold III. a Cl.);
1 *Mikl* zu 163 fl. 80 kr. (Mikl Simon V. Cl.);
1 *Mitsch* zu 52 fl. 50 kr. (Ehrenfeldner Karl II. a Cl.);
1 *Moser Jakob* zu 105 fl. (Lakomy Hermann IV. b Cl.);
1 *Nagele* zu 67 fl. 20 kr. (Greilach Ferdinand III. a Cl.);
2 *Orasch* zu je 60 fl. (Scharwitzl Valentin I. b, Ulbing Thomas I. b Cl.);
1 *Paulitsch, Fb. Jak.*, zu 89 fl. 25 kr. (Suklitsch Josef VI. Cl.);
1 *Paulitsch Jak., Gurker Consist.*, zu 58 fl. (Skubl Michael IV. a Cl.);
1 *Pillath* zu 107 fl. (Lahounig Blasius VIII. Cl.);
1 *Pistumber* zu 134 fl. (Egger Max III. a Cl.);
3 *Rohrmeister Jakob* zu je 104 fl. (Pacher Albert II. b, Tschebull Anton IV. b, I Oswald VI. Cl.);
1 *Schäffer v. Thalheim* zu 75 fl. (Frh. v. Jabornegg Alfred V. Cl.);
1 *Schwarz Maria* zu 88 fl. (Marchart Vincenz VIII. Cl.);
1 *Staudegger* zu 83 fl. (Writz Franz IV. b Cl.);
1 *Stief v. Kränzen* zu 59 fl. (Oremus Alois V. Cl.);
1 *Turkowitzer* zu 52 fl. 50 kr. (Pirker Anton VI. Cl.);
2 *Welzer* zu je 24 fl. (Laure Franz IV. a, Harzer Franz IV. b Cl.);
1 *Freih. v. Wenkheim* zu 95 fl. (Pichler Richard VI. Cl.);

Witzeling zu 67 fl. 20 kr. (Will Florian V. Cl.);
Zeissler Franz zu je 15 fl. (Krammer Ernst IV. a, Steinwender Matthias IV. b Cl.);
Zwischenberger zu 57 fl. (Maier Josef V. Cl.).

c) Von der k. k. Landesregierung in **Krain** wurden verliehen:
Omerza zu 30 fl. (Mätzler Adolf V. Cl.);
Schildenfeld (Familienstipendium) zu 107 fl. (Schildenfeld Rudolf, Ritt. v., IV. b Cl.).

d) Von den k. k. Statthaltereien in **Steiermark, Niederösterreich** und **Böhmen** urden verliehen:
J. Löschnigg (Convictsfond) zu 100 fl. (Zankl Anton V. Cl.);
Czech Rosalia zu 300 fl. (Gobanz Hubert V. Cl.);
Tamisch Jak. zu 80 fl. (Eckhart Johann II. b Cl.).

e) Vom **h. k. k. Finanzministerium** wurde verliehen:
Handstipendium aus dem Fonde der Gefällsstrafgelder-Überschüsse zu 100 fl. (Reimann Adolf III. a Cl.).

C. Studenten-Unterstützungsverein.

Vereinsjahr 1894/95.

a) Verzeichnis der p. t. Ehrenmitglieder und deren Beiträge.

rr	Abuja Matthias, Jur. Dr., Advocat und Landtagsabgeordneter in Klagenfurt	3 fl.
	Aichelberg Gustav, Jur. Dr. und k. k. Notar in Klagenfurt	5 „
	Aichelburg-Labia Leopold, Freih. v., Gutsbesitzer in Klagenfurt	5 „
	Bayer Michael, k. k. Baurath in Klagenfurt	2 „
	Beran Franz, Cassa-Assistent beim k. k. Landeszahlamt u. Stenograph in Klagenf.	2 „
	Birnbacher Karl, Med. Dr. und k. k. Sanitätsrath in Klagenfurt	2 „
	Birnbacher Victor, k. u. k. Major i. R. und Hausbesitzer in Klagenfurt	1 „
	Bittner Guido, Dom- und Stadtpfarrer in Klagenfurt	5 „
	Brugger Martin, Buchbindermeister in Klagenfurt	3 „
	Brunlechner August, Bergschul-Professor in Klagenfurt	1 „
	Burger Max, Ritt. v., Fabriksbesitzer in Klagenfurt	5 „
	v. Dietrich Wilhelm, Parfumeur und Spediteur in Klagenfurt	5 „
	Dumreicher Armand, Freih. v., Reichsrathsabgeordneter in Wien	10 „
	Dürr Karl, k. k. Gymnasial-Professor in Klagenfurt	2 „
	Edelmann, Dr. Ernst Ritt. v., Gutsbesitzer in Klagenfurt	5 „
	Edelmann Franz, Ritt. v., Gutsbesitzer etc. in Pichlern	5 „
	Egger Alfred, Apotheker etc. in Klagenfurt	5 „
	Erwein Josef, Jur. Dr., Herrenhaus-Mitglied u. Landeshauptmann von Kärnten in Klagenfurt	5 „
	Ferro Emanuel, Ritt. v., k. k. Hofrath und Finanz-Director in Klagenfurt	3 „
	Fiedler Alexander, Ingenieur und Director der Maschinenfabrik in Klagenfurt	2 „
	Filli Franz, Spenglermeister und Hausbesitzer in Klagenfurt	1 „
u	Fischer Susanna, Edle v., k. k. Statthaltereiraths-Witwe in Klagenfurt	2 „
r	Flora Gottfried, k. k. Gymnasial-Professor in Klagenfurt	1 „
	Fräss v. Ehrfeld Anton, Banquier in Klagenfurt	5 „
	Fräss v. Ehrfeld, Dr. Josef, Advocaturs-Concipient in Klagenfurt	2 „
	Frauscher Karl, Phil. Dr. und k. k. Gymnasial-Professor in Klagenfurt	1 „
u	Geistinger Marie, Realitätenbesitzerin in Klagenfurt	2 „
r	Gessler Johann, k. k. Gymnasial-Professor in Klagenfurt	1 „
	Gobanz Josef, Phil. Dr. und k. k. Landesschulinspector in Klagenfurt	2 „
	Goëss Graf Leopold, k. k. Landespräsident der Bukowina in Czernowitz	2 „
	Goëss Graf Zeno, Herrschaftsbesitzer und Landtagsabgeordneter in Klagenfurt	10 „
	Gotter, Dr. Michael, k. k. Statthaltereirath in Klagenfurt	2 „
	Grillitsch Alois, k. k. Gymnasial-Professor in Klagenfurt	1 „
	Gröbner August, Med. Dr., Frauen- und Kinderarzt in Klagenfurt	2 „
	Gruber Josef, städt. Polizeiarzt in Klagenfurt	2 „
	Güntner Johann, Landesbeamter in Klagenfurt	2 „
	Hann Franz, Phil. Dr. und k. k. Gymnasial-Professor in Klagenfurt	1 „
	Hauser Paul, Apotheker und Hausbesitzer in Klagenfurt	2 „
	Fürtrag	117 fl.

	Übertrag	117 fl
Herr	Herbert-Kerchnawe Ernst, Fabriksbesitzer in Klagenfurt	5
P. t. St.	Hermagoras-Buchdruckerei in Klagenfurt	5
Herr	Heyn Johannes, Buchhändler in Klagenfurt	2
„	v. Hibler Ivo, Jur. Dr., Advocat und Gemeinderath in Klagenfurt	2
„	Hillinger Karl, Ritt. v. Traunwald, k. k. Bergrath etc. in Klagenfurt	3
„	Hinterhuber Herm., k. k. Bergrath, kärnt. Landesausschuss etc. in Klagenfurt	2
„	Hock Gustav, Gutsbesitzer, kärnt. Landesausschuss etc. in Klagenfurt	1
Se. Excell.	Herr Graf Hoyos Ladislaus, k. u. k. Botschafter i. R. in Pörtschach	10
„	Huth Adolf, Vergolder und Kunsthändler in Klagenfurt	2
„	Jabornegg-Gamsenegg Markus, Freih. v., Landeskanzleidirector in Klagenfurt	1
„	Jäger, P. Gallus, Capitular des Benedictinerstiftes St. Paul in Klagenfurt	2
Frau	Janežič Auguste, Oberstabsarztens-Gattin in Klagenfurt	2
Herr	Jaritz Simon, Kaufmann in Klagenfurt	5
„	Josch Josef, Ritt. v., Med. Dr. und Fabriksarzt in Klagenfurt	3
Se. fb. Gnaden	Herr Kahn Josef, Theol. Dr., Fürstbischof von Gurk in Klagenfurt	20
Herr	Kern Siegfried, Piaristenordenspriester u. Bürgerschuldirector in Klagenfurt	2
„	Klebelsberg Johann, Edler v., k. k. Gymn.-Prof. i. R. in Bruneck in Tirol	2
„	Kleinmayr Ferdinand, Dr. u. Edler v., Buchhändler etc. in Klagenfurt	2
„	Knapp Rudolf, k. k. Oberbergrath in Klagenfurt	2
„	Kommetter Hermann, Apotheker etc. in Klagenfurt	5
„	Kopp Josef, k. k. Regierungsrath in Klagenfurt	2
„	Koschacker Theodor, Magistratsdirector in Klagenfurt	2
„	Krainer Josef, Kaufmann in Klagenfurt	2
„	Krassnig August, Med. Dr., k. k. Sanitäts- u. Regierungsrath in Klagenfurt	2
„	Kreutziger Ludwig, Edl. v., Vorstand der österr.-ung. Bank in Klagenfurt	2
Frau	v. Lang, Baronin Olga, Bergwerks- und Realitätenbesitzerin in Klagenfurt	3
Herr	Laschitzer Simon, k. k. Bibliotheks-Custos in Klagenfurt	2
„	Latzel Robert, Phil. Dr. und k. k. Gymnasial-Director in Klagenfurt	3
„	Lebinger Norbert, Capitular des Benedictinerstiftes St. Paul und k. k. Gymn.-Professor in Klagenfurt	5
Frau	Lemisch Fanny, Doctors-Witwe und Realitätenbesitzerin in Klagenfurt	10
Herr	Lemisch Josef, Jur. Dr., Advocat in Klagenfurt	3
„	Leon Friedrich, Buchhändler in Klagenfurt	2
„	Leopold Alfred, Med. Dr. und prakt. Arzt in Klagenfurt	2
„	Lesky Albin, k. k. Gymnasial-Professor in Klagenfurt	1
„	Löhner Robert, Jur. Dr., k. k. Landesgerichtsrath in Klagenfurt	2
„	Luggin Josef, Jur. Dr. und Rechtsanwalt etc. in Klagenfurt	2
„	Lucerna Johann, kön. Gerichtsrath i. R. in Klagenfurt	2
„	Mac Nevin o' Kelly Franz, Reichsfreih. v., k. k. Regierungsrath und Bezirkshauptmann in Klagenfurt	2
„	Madile Franz, Stadt-Baumeister und Hausbesitzer in Klagenfurt	2
„	Madile Otto, Chemiker und Hausbesitzer in Klagenfurt	2
„	Mätzler Jodok, k. k. Gymnasial-Professor in Klagenfurt	2
„	Maurer Ludwig, Kaufmann und Gemeinderath in Klagenfurt	2
„	Meingast Adalbert, k. k. Gymnasial-Professor in Klagenfurt	2
„	Menz Albert, Ritt. v., Jur. Dr. und Advocat in Klagenfurt	2
„	Meusburger, Dr. Eduard, k. k. Regierungsrath und Landes-Sanitätsreferent in Klagenfurt	2
Frau	Millesi, Edle v., Sparcassedirectors-Witwe in Klagenfurt	2
Herr	Mörtl Stephan, Hausbesitzer und Schneidermeister in Klagenfurt	2
„	Moro Max, Ritt. v., Fabriks- und Gutsbesitzer in Viktring	2
„	Mühlbacher Paul, Gutsbesitzer in Klagenfurt	2
„	Graf Mülinen, Dr. Paul, k. k. Regierungs-Secretär in Klagenfurt	2
„	Müller Valentin, Theol. Dr. und Dompropst etc. in Klagenfurt	2
„	Neuner Franz, Fabriksbesitzer in Klagenfurt	2
„	Neuner Julius, Fabriksbesitzer und Vicebürgermeister in Klagenfurt	2
Frau	Nussbaumer Ludmilla, Apothekerswitwe in Klagenfurt	2
Herr	Ohrfandl Anton, Privatier in Klagenfurt	2
„	Pamperl Josef, Realitäten- und Fabriksbesitzer in Klagenfurt	2
„	Pazdera Leopold, k. k. Religions-Professor am Gymnasium in Klagenfurt	2
Frau	Pichler Bertha, Med. Doctors-Gattin in Klagenfurt	2
Herr	Pokorny Alois, Hausbesitzer und Kaufmann in Klagenfurt	2
„	Posch Friedrich, Jur. Dr. und Bürgermeister in Klagenfurt	2
	Fürtrag	

	Übertrag	304 fl.
Herr	Purtscher Othmar, Med. Dr., Augenarzt in Klagenfurt	2 „
„	Rainer Victor, Ritt. v. Harbach, Fabriksbesitzer u. Reichsrathsabg. in Klagenfurt	5 „
„	Raunecker Anton, Buchhändler in Klagenfurt	2 „
„	Rhomberg Josef, Revisionsgeometer und Realitätenbesitzer in Klagenfurt	1 „
„	v. Riebler Karl, k. k. Notar in Klagenfurt	5 „
„	Rohrer Johann, Glasermeister und Glaswarenhändler in Klagenfurt	2 „
„	Röschnar Karl, Papierhändler und Druckereibesitzer in Klagenfurt	2 „
e. Durchl.	Herr Rosenberg Heinrich, Fürst zu, Herrschaftsbesitzer etc. in Klagenfurt	10 „
Herr	Rothauer J. M., Kaufmann und Gutsbesitzer in Klagenfurt	5 „
„	Satter Johann, k. k. Gymnasial-Professor in Gottschee	1 „
„	Scheinigg Johann, k. k. Gymnasial-Professor in Klagenfurt	1 „
„	Scheitz Benno, Capitular des Benedictinerstiftes St. Paul und emerit. k. k. Gymnasial-Professor in Klagenfurt	2 „
„	Scherz Moriz, Kaufmann in Klagenfurt	2 „
„	Schiberth Josef, Cafetier und Hausbesitzer in Klagenfurt	5 „
rau	Schiffner Antonia, Realitätenbesitzerin in Klagenfurt	2 „
err	Schildenfeld Friedrich, Edl. v., k. k. Landwehr-Oberstlieutenant in Klagenfurt	2 „
. Excell.	Herr Schmidt-Zabiérow Franz, Freih. v., k. k. Landespräsident von Kärnten in Klagenfurt	10 „
err	Schmued Ludwig, emerit. k. k. Gymnasial-Director in Salzburg	2 „
„	Seeland Ferdinand, k. k. Oberbergrath etc. in Klagenfurt	2 „
rau	v. Sina, Baronin Mary, Gutsbesitzerin in Klagenfurt	10 „
err	Sket Jakob, Phil. Dr. und k. k. Gymnasial-Professor in Klagenfurt	2 „
„	Smoley, Dr. Alois, k. k. Sanitätsrath und Primarius in Klagenfurt	5 „
„	Spinette Wladimir, Freih. v., k. u. k. Feldmarschall-Lieutenant i. R. in Klagenfurt	3 „
„	Spitzer, Dr. Alois, Gutsbesitzer in Mannsberg in Kärnten	3 „
„	Stanfel Anton, k. k. Regierungsrath etc. in Klagenfurt	1 „
„	Stuhlpfarrer Georg, k. k. Landeszahlamts-Official in Klagenfurt	2 „
„	Suda Franz, k. k. Forstrath und Forstinspector in Klagenfurt	2 „
„	Svoboda Franz, Phil. Dr., emerit. k. k. Gymnasial-Director in Graz	2 „
„	Tomantschger Josef, Montanbeamter i. R. in Klagenfurt	2 „
„	Traun Gustav, Jur. Dr. und Rechtsanwalt etc. in Klagenfurt	2 „
„	Tschauko, Dr. Peter, prakt. Arzt in Kirschentheuer	2 „
„	Ubl Karl, Jur. Dr. und Sparcasse-Director etc. in Klagenfurt	5 „
„	Vest, Dr. Johann, k. k. Notar etc. in Klagenfurt	5 „
„	Vogel Albin, Jur. Dr. und Rechtsanwalt etc. in Klagenfurt	2 „
„	Wallnöfer Anton, Haus- und Fabriksbesitzer in Klagenfurt	1 „
„	Wappis Ferdinand, Domcapitular etc. in Klagenfurt	3 „
„	v. Webern Karl, k. k. Oberbergrath in Klagenfurt	2 „
„	Webhofer Anton, k. k. Gymnasial-Professor in Klagenfurt	1 „
„	Weinländer Josef, Mühlenbesitzer in St. Ruprecht bei Klagenfurt	2 „
„	Zechner Philipp, Kunst- und Handelsgärtner in Klagenfurt	1 „
„	Zsák Ferdinand, Ingenieur und Fabriksbesitzer zu Poitschach	5 „
„	Zunzer Josef, Gutsbesitzer in Hirt	2 „
	Summe der Beiträge	432 fl.

b) Verzeichnis der Schülerbeiträge.

Es haben eingezahlt:

I. a Classe. Smoley 4 fl.; Antonitsch, Freih. v. Jabornegg, Rohrer, Struggl, ersperg je 2 fl.; v. Dietrich, Domenig, Ehrlich, Lamquet, Malle, Paternioner, Vebern, Webhofer je 1 fl.; Haslinger, Löhner, Merlin, Oremus, Petermann, erling, Wahrheit je 50 kr. Zusammen fl. **25·50**

I. b Classe. Billicsich, Eckert, Fresacher, Laggner, Pichler, Schneider old je 1 fl.; Schöffmann 60 kr.; Apih, Grafenauer, Groinigg, Hafner, Kofler, uthauf, Rieder, Safran, Scharwitzl, Steinwender, Umschaden, Winkler je 50 kr.; ner 20 kr. Zusammen fl. **12·80**

II. a Classe. v. Ferro, Jessenitschnig, Reichel, v. Riebler, Traun je 2 fl.; zel 1 fl. 50 kr.; Ehrenfeldner, Ozbič, v. Sääf, Sanegger, Sulzer, Walter je 1 fl.; lari, Mayrhofer, Rachoy, Zeilinger je 50 kr. Zusammen fl. **19·50**

Fürtrag . fl. **57·80**

Übertrag . fl. 57·80

II. b Classe. Purtscher, Weiß je 2 fl.; Kömmetter, Messner je 1 fl. 50 kr.; Hann 1 fl. 10 kr.; Bartlmä, Eckhart, Fleiß, Ibounig, Klimsch, Lackner, Lutschounig, Reinprecht, Riedl, Sekoll, Sommeregger, Thaler je 1 fl.; Emberger, Fuchs, Hauser, Lavsekar, Wester, Wenger je 50 kr. Zusammen fl. 23·10

III. a Classe. Maurer, Silatschek je 2 fl.; Huber 1 fl. 50 kr.; Egartner, v. Ehrenwerth, Greilach, Just, Koller, Sadjak, Zussner je 1 fl.; Achatz, Guggenberger, Maier, Oberrauner, Stangl, Walder, Watzinger je 50 kr. Zusammen fl. 16·—

III. b Classe. Kommetter 4 fl.; Graf Hoyos, Lenzatti je 3 fl.; Lausegger, Némec, Supersperg je 2 fl.; Gressel, Schneeweiß je 1 fl. 50 kr.; Clementschitsch, Hofer, Streiner je 1 fl.; Schwarz, Treffer, Tschinkowitz, Zemmie je 50 kr. Zusammen fl. 24·—

IV. a Classe. Pokorny, Ullmann je 2 fl.; Glinig, Happenhofer, Hofbauer, Košičik, Nussbaumer je 1 fl.; Hausner Knolz, Laure, Pehr, Pflanzl, Skubl, Sturm, Suete, Trutschnig je 50 kr. Zusammen fl. 13·50

IV. b Classe. Pamperl 4 fl.; Birnbacher 2 fl.; Manner 1 fl. 50 kr.; Hiltl, Lakomy, Nedoschill, v. Schildenfeld, Tschebull, Winkler je 1 fl.; Eichberger, Steinwender, Wedenik je 50 kr. Zusammen fl. 15·—

V. Classe. v. Burger 3 fl.; Freih. v. Jabornegg, Kinski, Seifritz je 2 fl.; Gobanz, Jaritz, Meingast je 1 fl. 50 kr.; Bittner, Feldner, v. Grebmer, Hübner, Lasser, Mätzler, Oremus, Passegger, Thaler, Webhofer, Wölwich je 1 fl.; Amberger, Clementschitsch, Czerny, Gaugl, Hiltl, Hoinig, Holzer, Hornbök, Katholnig, Katziantschitsch, Klaus, Kulmer, Lobiser, Maier, Peterka, Rotter, Schober, Semmelrock, Weiß, Will je 50 kr. Zusammen fl. 34·5

VI. Classe. Engstler 3 fl.; Graf Hoyos, v. Josch, Koschaker je 2 fl.; Reischl 1 fl. 50 kr.; Ehrlich Alois, Ohrfandl, Pichler Adolf, Pichler Richard je 1 fl.; Dörflinger, v. Ehrenwerth, Einspieler, Greif, Maisterl, Presslauer, Schoffnegger, Suklitsch, Ure, Weinländer je 50 kr. Zusammen fl. 19·5

VII. Classe. Tertnik 5 fl.; Blaas, Kernler je 2 fl.; Koller 1 fl. 50 kr.; Bauer, Ferjančič, Fuchs, Kuschej, Lucerna, Mikeln, Nedoschill, Pörtsch, Strelli je 1 fl.; Klimsch, Mahrhofer, Mente, Pflügl, Pschenitschnik, Reinsperger, Schader, Trübswasser, Vogel je 50 kr. Zusammen fl. 24·

VIII. Classe. Mühlbacher 2 fl.; Guggenberger, Hafner, Hambrusch, Klimsch, Lindner, Marchart, Neuwirther, Paulitsch, Pietschnig, Puck, Reibnegger, Schiwitz, Übersberger je 1 fl.; Loigge, Novak, Reschian je 50 kr. Zusammen fl. 16·

In allen Classen und Abtheilungen zusammen . fl. 243·

c) Bericht über die Bibliothek des Vereines.

(Erstattet von dem Verwalter derselben *Prof. A. Meingast.*)

Stand im Vorjahre	1128	Lehrbücher,	25	Atlanten f. Geogr.
Neu angekauft wurden	193	„	—	„ „
Geschenkt wurden	15	„	—	„ „
Summe .	1336	Lehrbücher,	25	Atlanten f. Geogr.
Als unbrauchbar wurden entfernt .	129	„	—	„ „
Verbleiben .	1207	Lehrbücher,	25	Atlanten f. Geogr.

Die Geschenke rühren her vom verstorbenen Prof. Dr. Purtscher und von Schül der Anstalt selbst und solchen, welche im Vorjahre derselben angehört haben. — Von ausgewiesenen Lernbehelfen wurden 902 Lehrbücher und 24 geogr. Atlanten an 232 Sch während des ganzen Schuljahres zur Benützung überlassen, und zwar:

	I.		II.		III.		IV.		V.	VI.	VII.	VIII.	Sumr
	a	b	a	b	a	b	a	b					
Lehrbücher	60	73	59	85	62	35	50	44	104	124	120	86	90
Geogr. Atlanten	6	9	3	2	1	1	2	—	—	—	—	—	2
Zahl der belehnten Schüler .	16	28	18	25	14	10	17	11	25	25	26	17	23

d) Rechenschaftsbericht

›r die am 20. April 1895 zu gunsten des Unterstützungsvereines durch Studierende des Obergymnasiums im Stadttheater veranstaltete

Wohlthätigkeits-Vorstellung.

›geben wurde: 1.) Der Nachtwächter, Posse von Th. Körner; 2.) Wallensteins Lager von F. Schiller, in der Schulausgabe.]

a) **Einnahmen.**

Erlös für die Eintrittskarten	fl.	442·80
Überzahlungen, und zwar von den Herren: Fürstbischof Dr. J. Kahn (10 fl.), Landespräsident F. Freih. v. Schmidt-Zabièrow (5 fl.), General A. v. Horsetzky (5 fl.), Prof. P. B. Scheitz (5 fl.), Director Dr. J. Brandl (fl. 1·60), von mehreren Unbekannten (zus. fl. 19·01)	„	45·61
Erlös für Theaterzettel	„	2·64
Summe	fl.	**491·05**

b) **Ausgaben.**

Für Wägen	fl.	12·20
Für den Regisseur u. Inspicienten, die Aufwärterin u. Souffleuse	„	70·—
„ „ Theatermeister, Friseur, Garderobier, die Statisten u. Diener	„	45·89
Verschiedene andere Auslagen	„	30·74
Summe	fl.	**158·83**

Somit ist das **Reinerträgnis** . fl. **332·22**

Hiefür wird allen, welche zum Gelingen des Unternehmens beigetragen haben, der ›indlichste Dank ausgesprochen, namentlich auch dem hochlöbl. Gemeinderathe der ›t Klagenfurt für die unentgeltliche Überlassung des Theaters (s. auch „Klgft. Ztg." › 26. April 1895, S. 903).

Rechnung für den Fond des Studenten-Unterstützungsvereines

vom 1. Juli 1894 bis 30. Juni 1895.

I. Einnahmen.

Cassarest aus dem Vorjahre	fl.	338·33
Beiträge der Ehrenmitglieder	„	432·—
Beiträge der Schüler	„	243·90
Geschenk des h. kärnt. Landtages (II. Rate f. 1894 u. I. Rate f. 1895)	„	100·—
Geschenk der löblichen kärnt. Sparcasse	„	500·—
Zinsen v. d. Spareinlagen (fl. 354·19) u. d. Wertpapieren (fl. 12·20)	„	366·39
Zinsen vom Rečičkyschen Legate	„	—·—
Erlös für Legitimationskarten (zu 2 kr.)	„	3·18
„ „ ein von Herrn P. Thaler geschenktes Fechtzeug	„	8·—
Reinertrag einer Wohlthätigkeitsvorstellung durch Studierende	„	332·22
Rest nach einer Kranzspende des Lehrkörpers für den † Schuldiener Presslacher	„	1·—
Rest nach einer Kranzspende der II. a und II. b Classe für den † Schuldiener Presslacher	„	1·60
Widmung der Marianums-Zöglinge statt einer Kranzspende f. d. † Schüler Zemme Ernst III. b	„	16·—
Widmung des Herrn Johann Gusell	„	100·—
Summe	fl.	**2442·62**

Übertrag der Einnahmen . fl. 2442·

II. Ausgaben.

1.	Anschaffung von Lehrbüchern, Atlanten etc. (fl. 217·24), sowie Einbinden (fl. 1·50)	fl. 218·74
2.	Für die an 75 Schüler vertheilten Kleider (Röcke, Beinkleider) .	„ 473·70
3.	Für die an 27 Schüler vertheilten Schuhe	„ 135·—
4.	Für 1573 Speisemarken der Volksküche zu 13 kr. (an 18 Schüler)	„ 204·49
5.	An 90 Schüler bar ausgezahlt (für Schulgeld u. a.)	„ 384·—
6.	Neue Spareinlage (fl. 332·22 + fl. 354·19)	„ 686·41
7.	Regie (Stempel, Briefmarken, Drucksorten, Danksagungen, Porti etc.)	„ 10·91
8.	Eislauf-Saisonkarten zu 2 fl. für 10 Schüler	„ 20·—
9.	Vereinsdiener (Eincassieren der Mitgliedsbeiträge etc.)	„ 15·—
10.	Turnschuhe für 7 dürftige Schüler	„ 4·45
	Summe .	fl. 2152

III. Cassarest . . . . . fl. 289

IV. Vermögensstand (am 30. Juni 1895).

1.	2 Stück 1860er Staatslose, Serie 12.264, Gew.-Nr. 6, und Serie 17.900, Gew.-Nr. 16, im Nennwerte von je 100 fl. (Coursw. zusamm. fl. 325) .	fl. 20
2.	1 Stück Einheitl. Notenrente vom J. 1868, Nr. 118.397, im Nennwerte von	„ 10
3.	1 Einlagsb. d. kärnt. Sparcasse Nr. 42.417 im Werte von	„ 254
4.	1 „ „ „ „ „ 46.619 (Rečičkysches Legat) im Werte von	„ 3
5.	1 „ „ „ „ „ 63.531 im Werte von	„ 254
6.	1 „ „ „ „ „ 64.964 „ „ „	„ 254
7.	1 „ „ „ „ „ 105.658 „ „ „	„ 135
8.	1 „ „ „ „ „ 115.769 (s. Progr. v. J. 1889, S. 39) im W. v.	„ 10
9.	1 „ „ „ „ „ 150.088 im Werte von	„ 33
10.	Der sub III ausgewiesene Cassarest im Betrage von	„ 28
11.	Gegenw. Wert der Bibliothek nach Abschreib. von fl. 217·24 Entwertung	„ 60
12.	Wert des Inventars (haups. Antheil an der Wertheimschen Casse) . . .	„ 6
13.	Activforderungen seit 1883, nach Abzug der (1892 und 1893) zurückgezahlten oder (1894) als uneinbringlich abgeschriebenen Darlehen . .	„ 5
	Summe .	fl. 10.76

Voranstehende Rechnung wurde von den unterzeichneten Ausschussmitgliedern Grund der entsprechenden Belege revidiert und ziffermäßig richtig befunden.

Klagenfurt, im Juni 1895.

Übersberger Johann, Schüler der VIII. Cl. — Reischl Hubert, Schüler der VI. Cl.
Blaas Hermann, Schüler der VII. Cl. — Webhofer Bruno, Schüler der V. Cl

Allen Freunden und Gönnern des Vereines wird hiemit im Namen der unterstützten Gymnasialschüler der wärmste Dank ausgesprochen.

XV.

Kundmachung,

betreffend das Schuljahr 1895/96.

A. Das nächste Schuljahr wird Mittwoch den 18. September
)5 um 8 Uhr morgens mit dem hl. Geistamte im Fest- und Kapellen-
le des Gymnasial-Gebäudes eröffnet werden; diesem Hochamte haben
katholischen Schüler beizuwohnen. Nach dem Gottesdienste begeben
ı die Schüler in ihre Classen, wo ihnen von den Classenvorständen
Disciplinarordnung erläutert und die Stundeneintheilung mitgetheilt
den wird.

Schüler, welche in die erste Classe aufgenommen werden wollen,
ssen das zehnte Lebensjahr zurückgelegt haben oder es noch im
ıfe dieses Kalenderjahres zurücklegen. Sie haben den ordnungsmäßig
gefertigten Geburts- oder Taufschein und den Schulausweis
er ein Frequentationszeugnis) mitzubringen. Doch bleibt bei
Entscheidung über die Aufnahme die gut bestandene Aufnahmsprüfung
gebend, welche aus der deutschen Unterrichtssprache und dem Rechnen
iftlich und mündlich, aus Religion nur mündlich vorgenommen wird.
dieser Prüfung werden folgende Anforderungen gestellt:

) Jenes Maß von Wissen aus der Religionslehre, welches in den vier ersten Jahrescursen der Volksschule erworben werden kann.

) Fertigkeit im Lesen und Schreiben der deutschen Sprache und der lateinischen Schrift. Kenntnis der Elemente aus der Formenlehre und Fertigkeit im Analysieren einfach bekleideter Sätze; Bekanntschaft mit den Regeln der Orthographie und richtige Anwendung derselben.

) Übung in den vier Grundrechnungsarten in ganzen Zahlen.

Die mündliche Prüfung aus der Unterrichtssprache und dem Rechnen
n jedem Schüler erlassen werden, welcher seine Reife in diesen Gegen-
den bei der schriftlichen Prüfung durch mindestens „befriedigende"
stungen und im Volksschulzeugnisse mindestens durch die Noten „gut"
gethan hat; desgleichen können Schüler, deren Religionsnote aus dem
ten Schuljahre der Volksschule nicht geringer als „gut" ist, von der
fung aus der Religionslehre befreit werden.

Für diese Aufnahmsprüfung zum Eintritt in die erste
sse sind zwei Termine bestimmt. Der erste fällt auf den 15. und
Juli; der zweite in den Anfang des neuen Schuljahres, d. i. auf den
ınd 17. September. In jedem dieser Termine wird über die Aufnahme
iltig entschieden. Eine Wiederholung der Aufnahmsprüfung, sei es
lerselben oder an einer anderen Lehranstalt, ist unzulässig.

Die Aufnahmswerber haben sich in Begleitung ihres Vaters oder
en Stellvertreters am 14. oder 15. Juli, beziehungsweise am 15. oder
September zwischen 8 bis 12 Uhr vormittags und (ausgenommen
ıtags) von 3 bis 6 Uhr nachmittags in der Directionskanzlei des
ınasiums, I. Stock, zu melden und sich mit dem Geburts- oder
ıfscheine und dem Volksschulzeugnisse auszuweisen. Schüler,
he nur häuslichen oder Privat-Unterricht in den Volksschul-
enständen genossen haben, brauchen bloß den Geburts- oder Tauf-

schein beizubringen. Ohne legal ausgefertigten Geburts- od
Taufschein kann kein Schüler aufgenommen werden, sow
auch spätere Anmeldungen nicht berücksichtigt werd
können. Jeder neue Aufnahmswerber hat eine Aufnahmstaxe von 2
10 kr., einen Lehrmittel- und Schülerbibliotheks-Beitrag von 2 fl. und ein
Jugendspiel-Beitrag von 50 kr.,[1] im ganzen also 4 fl. 60 kr. zu erlege
Diese Beträge werden zurückgestellt, wenn der aufzunehmende Schü
die Prüfung nicht besteht.

Die schriftliche Prüfung beginnt am 15. und 16. Juli, beziehentli
am 16. September um 9 Uhr vormittags, zu welcher die eingeschrieben
Schüler die nöthigen Schreiberfordernisse mitzubringen haben. I
mündliche Prüfung beginnt an denselben Tagen um 3 Uhr nachmittags

Die Aufnahme von Schülern, welche von fremden Anstalten komm
und in die Classen II.—VIII. neu eintreten wollen, sowie die Anme
dung der dem Gymnasium bereits angehörigen Schül
findet am 16. und 17. September von 8 bis 12 Uhr vormittags und
3 bis 6 Uhr nachmittags statt. Jene werden in der Directionskanz
diese im Lehrzimmer der III. Classe, Abtheil. A, aufgenommen.

In die höheren Classen neu eintretende Schüler haben ih
Geburts- oder Taufschein, sowie die beiden letzten, mit der Abgangsclau
versehenen Semestralzeugnisse beizubringen, 4 fl. 60 kr. an Gebüren
entrichten und, wenn sie sich einer Aufnahmsprüfung unterziehen müs
auch 12 fl. Prüfungstaxe zu zahlen, während die der Anstalt bereits
gehörigen Schüler 2 fl. 50 kr. als Lehrmittel-, Bibliotheks- und Juge
spiel-Beitrag zu erlegen haben.[1]

Die Aufnahmsprüfungen für die II.—VIII. Classe, sowie die Wie
holungs- und Nachtragsprüfungen werden am 16. und 17. Septem
zwischen 8 bis 12 Uhr vormittags und von 3 bis 6 Uhr nachmittags
genommen werden. Die betreffenden Schüler haben sich in den L
zimmern jener Classen einzufinden, in welche sie aufsteigen wollen.

Mit h. Unterr.-Min.-Erlass vom 19. Juni 1895, Z. 13.704, wurde
h. k. k. kärnt. Landesschulrath ermächtigt, in Zukunft die Aufnah
solcher Schüler an das Gymnasium in Klagenfurt, de
Angehörige in Oberkärnten wohnen, in der Weise zu besch
ken, dass deren Aufnahme (als neue Schüler) nur aus besonders r
sichtswürdigen Gründen, welche von Fall zu Fall im Wege der Gymna
Direction in Klagenfurt dem k. k. Landesschulrathe darzulegen sind,
stattet wird. (L.-Sch.-R. v. 26. Juni 1895, Z. 1403.)

Diejenigen Schüler, welche gemäß § 32, P. 1, der Disciplinarordn
die Anstalt zu verlassen haben, können ihre an den hohen k. k. Lan
schulrath gerichteten Gesuche um Belassung an der Anstalt bis 20.
in der Directionskanzlei überreichen.

B. Das Schulgeld beträgt für jedes Semester 15 fl. und ist
den Schülern der II. bis VIII. Classe in den ersten sechs Woc
desselben mittels Schulgeldmarken, die im k. k. Landeszahlamt
Klagenfurt zwischen dem 8. und 25. eines jeden Monates gekauft w

[1] Unbemittelten Schülern wird der Jugendspiel-Beitrag zurückgegeben.

nen, zu entrichten. Diejenigen Schüler, welche beim Vorhandensein vorgeschriebenen Bedingungen die Befreiung von der Zahlung Unterrichtsgeldes anstreben, haben ihre Gesuche in den ersten ht Tagen eines jeden Semesters bei der Direction einreichen. Dem Gesuche muss das Zeugnis des letzten Semesters, dann Armutszeugnis, das nicht älter ist als ein Jahr, und, wenn der Schüler on einmal vom Schulgelde befreit war, auch das bezügliche Befreiungsret beiliegen.

Die öffentlichen Schüler der I. Classe haben im I. Semester Schulgeld spätestens im Laufe der ersten drei Monate (nach inn des Schuljahres) zu zahlen. Es kann ihnen aber diese Zahlung zum Schlusse des I. Semesters gestundet werden,

) wenn ihnen in Bezug auf sittliches Betragen und Fleiß eine der beiden ersten Noten der vorgeschriebenen Notenscala und in Bezug auf den Fortgang in allen obligaten Lehrgegenständen mindestens die Note „befriedigend" zuerkannt wird, und

) wenn sie ihre Dürftigkeit gehörig ausweisen.

Um die Stundung des Schulgeldes zu erlangen, hat der beende Schüler der I. Classe in den ersten acht Tagen des uljahres bei der Gymnasial-Direction ein (ungestempeltes) Gesuch iberreichen, welches mit einem nicht vor mehr als einem Jahre vom einde- und Pfarramte ausgestellten Zeugnisse über die Vermögensältnisse belegt sein muss. Solche Schüler, welche zwei Monate nach Beginne des Unterrichtes den unter *a)* genannten Bedingungen nicht prechen, erhalten ihre Gesuche zurück und haben bis zum Ende des en Schulmonates, d. i. bis Mitte December, das ganze Schulgeld (15 fl.) zu ichten, widrigenfalls sie die Anstalt verlassen müssen. Ebenso haben nigen Schüler, welchen die Zahlung des Schulgeldes bis zum Schlusse I. Semesters zwar gestundet ward, welche aber den gewöhnlichen ngungen für die Schulgeldbefreiung am Ende des Semesters nicht nhaltlich entsprechen, noch vor Beginn des II. Semesters das Schulzu zahlen. — Jenen Schülern der I. Classe, welche im I. Semester Zeugnis der ersten Classe mit Vorzug erhalten haben, kann hr Ansuchen von der Landesschulbehörde die Rückzahlung des für I. Semester entrichteten Schulgeldes bewilligt werden, wenn sie für II. Semester die Schulgeldbefreiung erlangt haben.

Klagenfurt, am 13. Juli 1895.

Dr. Robert Latzel,
k. k. Gymnasial-Director.

L. Lichtenstein. *Überreicht vom Verfasser.*

ÜBER DIE ZWEIMALIGE INTEGRATION VON FUNKTIONEN ZWEIER REELLER VERÄNDERLICHEN.

Von

Leon Lichtenstein
in Berlin.

Aus den Sitzungsberichten der Berliner Mathematischen Gesellschaft.
X. Jahrgang. 3. Stück. Sitzung vom 25. Januar 1911.
Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Sonderabdruck aus den Sitzungsberichten der Berliner Mathematischen Gesellschaft.
Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Über die zweimalige Integration von Funktionen zweier reeller Veränderlichen.

Von Leon Lichtenstein in Berlin.

1. In den folgenden Zeilen sollen einige Sätze über die Integration eines bestimmten Integrals in bezug auf einen Parameter, die ich vor kurzem an einer anderen Stelle veröffentlicht habe, ergänzt und erweitert werden.[1])

Es sei (P) irgendeine im Endlichen gelegene lineare meßbare Menge von Punkten. Ich bezeichne im folgenden mit

$$\int_L^{(P)} \varphi(x)\,dx \text{ und } \int_{x_1 L}^{x_2} \varphi(x)\,dx$$

die über die Menge (P) oder das Intervall

(1) $$x_1 \leqq x \leqq x_2$$

erstreckten Lebesgue'schen Integrale. Es sei (N) irgendeine in dem Intervalle (1) gelegene Menge vom Maße (mesure) Null, $C(N)$ die zu (1) gehörige Komplementärmenge von (N). Da die Punkte von (N) in eine abzählbar unendlich große Anzahl von Intervallen von beliebig kleiner Gesamtlänge eingeschlossen werden können, so liegen in jedem noch so kleinen Teilintervalle von (1) unendlich viele Punkte von $C(N)$.

Es sei $\varphi(x)$ eine in $C(N)$ erklärte beschränkte Funktion. Wir wählen im Innern des Intervalles (1) eine beliebige Folge wachsender Größen

$$x^{(2)},\ x^{(3)},\ \ldots,\ x^{(n-1)}$$

und setzen der Gleichförmigkeit der Bezeichnung wegen

$$x^{(1)} = x_1,\quad x^{(n)} = x_2.$$

1) Vgl. Über die Integration eines bestimmten Integrals in bezug auf einen Parameter, Göttinger Nachrichten. 1910.

Nunmehr bilden wir den Ausdruck

$$S_n = \sum_{i=2}^{n} (x^{(i)} - x^{(i-1)})\, \psi(\xi_{i-1}), \tag{2}$$

worin $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ beliebige entsprechend in den Intervallen

$$(x^{(1)}, x^{(2)}), (x^{(2)}, x^{(3)}), \ldots, (x^{(n-1)}, x^{(n)})$$

gelegene Punkte von $C(N)$ bedeuten. Es sei σ der größte aller Werte $x^{(2)} - x^{(1)}$ $x^{(3)} - x^{(2)}, \ldots, x^{(n)} - x^{(n-1)}$. Nähert sich S_n bei verschwindendem σ einer von der speziellen Wahl der Werte $\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_{n-1}$ unabhängigen Grenzwert so sagen wir: $\psi(x)$ ist in der Menge $C(N)$ im Riemannschen Sinne integrierbar. Den Grenzwert selbst bezeichnen wir mit $\int_{C(N)} \psi(x)\, dx$.

Wir denken uns jetzt $\psi(x)$ in den Punkten der Menge N beliebig definier Die nunmehr in dem ganzen Intervalle (1) erklärte Funktion $\psi(x)$ brauc daselbst (auch wenn sie beschränkt ist) nicht notwendig im Riemannsch Sinne integrierbar zu sein. *Sie ist es aber sicher* (auch wenn sie nicht b schränkt ist) *im Sinne von Herrn Lebesgue. Es ist*

$$\int_{C(N)} \psi(x)\, dx = \int_{L}^{C(N)} \psi(x)\, dx = \int_{x_1}^{x_2} {}_{L}\psi(x)\, dx.^{1}) \tag{3}$$

---

1) Vgl. Lebesgue, Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions pri tives, p. 112. Herr Lebesgue beweist, daß jede in dem Intervalle (1) im Riema schen Sinne integrierbare Funktion daselbst auch im Lebesgueschen Sinne tegrierbar ist. Der Beweis der Beziehung (3) läßt sich, in Anlehnung an die trachtungen von Herrn Lebesgue, wie folgt führen:

Die Funktion $\psi(x)$ ist zunächst, wie gesagt, nur in $C(N)$ erklärt. Ohne e Einschränkung der Allgemeinheit können wir $\psi(x) > a > 0$ voraussetzen. Man weist nun, wie bei Lebesgue p. 23—29, daß die Gesamtheit derjenigen Punkte $C(N)$, in denen die Funktion $\psi(x)$ unstetig ist, eine Menge N_1 vom Maße N bildet. Nunmehr sei $\psi(x)$ in allen Punkten von (N) gleich Null gesetzt. Es α eine beliebige positive Zahl. Betrachten wir die Menge $E(\alpha \gtreqless \psi(x))$ derjeni Punkte von (1), in denen $\psi(x) \geqq \alpha$ ist. Die Häufungsstellen dieser Menge s wenn sie der Menge $E(\alpha \leqq \psi(x))$ selbst nicht angehören, entweder Punkte N_1 oder Punkte der Menge N. Bis auf eine Menge vom Maße Null ist die Menge $E(\alpha \leqq \psi(x))$ abgeschlossen (fermée), mithin sicher meßbar. Das Inte $\int_L \psi(x)\, dx = \int_L^{C(N)} \psi(x)\, dx$ ist also vorhanden. Daß dieses Integral dem Riemanns Integrale $\int^{C(N)} \psi(x)\, dx$ gleich ist, läßt sich wie folgt zeigen: Wir teilen das Interva in $n-1$ Teilintervalle $(x^{(i-1)}, x^{(i)})$, $(x^{(1)} = x_1, x^{(n)} = x_2)$ ein. Es sei M_i obere, m_i die untere Grenze von $\psi(x)$ in dem Intervalle $(x^{(i-1)}, x^{i})$. Das Int $\int_L \psi(x)\, dx$ bleibt unverändert, wenn wir vorübergehend $\psi(x)$ in den zu $(x^{i-}$ gehörigen Punkten der Menge N gleich m_i setzen. Nunmehr finden wir die gleichheitsbedingung

$$\sum m_i (x^{(i)} - x^{(i-1)}) \gtreqless \int_L \psi(x)\, dx \leqq \sum M_i (x^{(i)} - x^{(i-1)}).$$

I. *Es sei jetzt $f(x, y)$ eine für alle x in der Menge $C(N)$ und alle y in einer im Endlichen gelegenen meßbaren Menge (M) erklärte beschränkte Funktion von x und y. Die Funktion $f(x, y)$ möge in bezug auf y im Riemannschen, in bezug auf y im Lebesgueschen Sinne integrierbar sein.*

Alsdann ist das Integral $\int_{(M)}^{C(N)} f(x, y)\,dx$ in (M) im Lebesgueschen Sinne, das Integral $\int_{L}^{(M)} f(x,y)\,dy$ in der Punktmenge $C(N)$ im Riemannschen Sinne integrierbar. Ferner ist

$$\int_{L}^{(M)} dy \int_{(M)}^{C(N)} f(x, y)\,dx = \int_{(M)}^{C(N)} dx \int_{L}^{(M)} f(x, y)\,dy.^{1}) \tag{4}$$

Der Beweis läßt sich ganz wie in meiner vorhin zitierten Arbeit durchführen.

Es ist

$$\int_{(M)}^{C(N)} f(x, y)\,dx = \lim_{\delta = 0} [f(\xi_1, y)(x^{(2)} - x^{(1)}) + f(\xi_2, y)(x^{(3)} - x^{(2)}) + \ldots + f(\xi_{n-1}, y)\,(x^{(n)} - x^{(n-1)})], \tag{5}$$

worin $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ beliebige in den Intervallen $(x^{(1)}, x^{(2)})$, $(x^{(2)}, x^{(3)}), \ldots,$ $(x^{n-1}, x^{(n)})$ gelegene Werte der Menge $C(N)$ bedeuten. Der eingeklammerte Ausdruck stellt nun eine in (M) im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion von y dar. Da überdies

$$|f(\xi_1, y)(x^{(2)} - x^{(1)}) + \ldots + f(\xi_{n-1}, y)(x^{(n)} - x^{(n-1)})| \leqq (x_2 - x_1) \cdot \text{obere Grenze von } |f(x, y)| \tag{6}$$

bei unbegrenzt wachsendem n nähern sich die beiden Summen derselben Grenze $\int_{(N)}^{} \psi(x)\,dx$. Hiermit ist aber die Beziehung (3) bereits bewiesen.

Man kann leicht Funktionen $\psi(x)$ angeben, die so beschaffen sind, daß $\int_{(N)}^{} \psi(x)\,dx$ existiert, während $\int_{x_1}^{x_2} \psi(x)\,dx$ nicht vorhanden ist. Es sei z. B. N die Menge aller rationalen Punkte des Intervalles (1), $\psi(x)$ in $C(N)$ gleich einer beliebigen stetigen positiven Funktion, in N aber gleich Null. Offenbar ist $\int_{(N)}^{C(N)} \psi(x)\,dx$ vorhanden. Da aber $\psi(x)$ in (1) total diskontinuierlich ist, so ist $\int_{x_1}^{x_2} \psi(x)\,dx$ nicht vorhanden. So ist die bekannte Funktion, die in allen rationalen Punkten den Wert Null, in allen übrigen Punkten aber den Wert 1 hat, in dem Intervalle (1) im Riemannschen Sinne nicht integrierbar. Das Integral $\int_{(N)}^{C(N)} \psi(x)\,dx$ ist aber vorhanden und gleich $x_2 - x_1$. Denselben Wert hat auch das Integral $\int_{x_1 L}^{x_2} \psi(x)\,dx$.

1) Daß das Integral $\int_{y_1 L}^{y_2} f(x, y)\,dy$ im Riemannschen Sinne integrierbar ist, falls $f(x, y)$ im Gebiete $x_1 \leqq x \leqq x_2$, $y_1 \leqq y \leqq y_2$ in bezug auf x im Riemannschen, in bezug auf y im Lebesgueschen Sinne integrierbar ist, ist zuerst von Herrn H. W. Young auf anderem Wege bewiesen worden. Vgl. H. W. Young, On parametric integration, Monatshefte für Mathematik und Physik, 1910, S. 125—149.

ist, so ist nach einem bekannten Satze von Herrn Lebesgue die Funktion $\int_{C(N)} f(x,y)\,dx$ in (M) im Lebesgueschen Sinne integrierbar. Ferner ist

$$(7)\quad \int_{(M)} dy \int_{C(N)} f(x,y)\,dx = \lim_{\delta=0}\Big[(x^{(2)}-x^{(1)})\int_{(M)} f(\xi_1,y)\,dy + (x^{(3)}-x^{(2)})\int_{(M)} f(\xi_2,y)\,dy + \cdots + (x^{(n)}-x^{(n-1)})\int_{(M)} f(\xi_{n-1},y)\,dy\Big] = \int_{C(N)} dx \int_{(M)} f(x,y)\,dy.$$

Es ist zu beachten, daß man bei der Bildung des Riemannschen Integrals $\int_{C(N)} dx\Big[\int_{(M)} f(x,y)\,dy\Big]$ die Teilpunkte $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ aus den Punkten der Menge $C(N)$ zu wählen hat.[1])

2. Es möge jetzt vorübergehend $F(x,y)$ eine in dem Gebiete $x_1 \leqq x \leqq x_2$, $y_1 \leqq y \leqq y_2$ erklärte beschränkte Funktion bedeuten, die sowohl in bezug auf x, als auch in bezug auf y im Lebesgueschen Sinne integrierbar ist. Wann sind die beiden Integrale

$$(8)\qquad \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1 L}^{x_2} F(x,y)\,dx \quad \text{und} \quad \int_{x_1 L}^{x_2} dx \int_{y_1 L}^{y_2} F(x,y)\,dy$$

vorhanden?

Unsere Entwicklungen geben eine (wenn auch keine definitive) Antwort auf diese Frage.

Ist $F(x,y)$, als Funktion von x betrachtet, abgesehen von einer Menge (Q) der Werte von y vom Maße Null, in dem Gebiete $C(N)$, worin N eine Menge der Werte x vom Maße Null bezeichnet, im Riemannschen Sinne integrierbar, so sind die beiden Integrale (8) vorhanden (und einander gleich).

In der Tat ist im vorliegenden Falle nach (3)

$$\int_{L}^{C(Q)} dy \int_{C(N)} F(x,y)\,dx = \int_{L}^{C(Q)} dy \int_{x_1 L}^{x_2} F(x,y)\,dx = \int_{y_1 L}^{y_2} dy \int_{x_1 L}^{x_2} F(x,y)\,dx,$$

$$\int_{C(N)} dx \int_{L}^{C(Q)} F(x,y)\,dy = \int_{C(N)} dx \int_{y_1 L}^{y_2} F(x,y)\,dy = \int_{x_1 L}^{x_2} dx \int_{y_1 L}^{y_2} F(x,y)\,dy.$$

Hieraus und aus der Gleichung (4) folgt

$$\int_{y_1 L}^{y_2} dy \int_{x_1 L}^{x_2} F(x,y)\,dx = \int_{x_1 L}^{x_2} dx \int_{y_1 L}^{y_2} F(x,y)\,dy.$$

---

1) Es sei R irgendeine in (1) gelegene überall dichte Menge. Man kann über R erstreckte Riemannsche Integral ebenso, wie vorhin für die Menge (M) definieren und erhält durch ganz analoge Betrachtungen die Beziehung

$$\int_{(R)} dx \int_{(M)} f(x,y)\,dy = \int_{(M)} dy \int_{(R)} f(x,y)\,dx.$$

unserer Aussage kann man natürlich die Variablen x und y miteinander rtauschen.

Aus dem Satze I ergibt sich leicht der folgende Satz:

II. *Es sei Q eine Menge vom Maße Null in dem Intervalle*

$$y_1 \leqq y \leqq y_2.$$

sei $f(x, y)$ eine für alle x in $C(N)$ und alle y in $C(Q)$ erklärte beschränkte nktion von x und y. Die Funktion $f(x, y)$ möge sowohl in bezug auf x, auch in bezug auf y im Riemannschen Sinne integrierbar sein. Alsdann $\int^{C(N)} f(x,y)\,dx$ *in $C(Q)$ und* $\int^{C(Q)} f(x, y)\,dy$ *in $C(N)$ im Riemannschen Sinne grierbar. Ferner ist*

$$\int^{C(Q)} dy \int^{C(N)} f(x,y)\,dx = \int^{C(N)} dx \int^{C(Q)} f(x,y)\,dy.$$

Dem Satze I zufolge sind in der Tat die beiden Integrale

$$\int_L^{C(N)} f(x,y)\,dx = \int^{C(N)} f(x,y)\,dx \text{ und } \int_L^{C(Q)} f(x,y)\,dy = \int^{C(Q)} f(x,y)\,dy$$

prechend in $C(Q)$ und $C(N)$ im Riemannschen Sinne integrierbar. ıer ist

$$\int^{C(Q)} dy \int^{C(N)} f(x,y)\,dx = \int^{C(Q)} dy \int_L^{C(N)} f(x,y)\,dx = \int_L^{C(N)} dx \int^{C(Q)} f(x,y)\,dy = \int^{C(N)} dx \int^{C(Q)} f(x,y)\,dy.$$

M und Q *vom Inhalte* (étendue) Null, so erhält man, wie man leicht ieht, einfacher

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int^{C(Q)} f(x,y)\,dy = \int_{y_1}^{y_2} dy \int^{C(N)} f(x,y)\,dx.$$

bei sind die Integrale $\int^{C(Q)} f(x,y)\,dy$ und $\int^{C(N)} f(x,y)\,dx$ zu beschränkten, in Punkten der Intervalle (1) und (9) erklärten Funktionen von x oder y ızt zu denken.

Ist $f(x, y)$, als Funktion *zweier Variabeln* aufgefaßt, im Lebesgueschen integrierbar, so existieren, wie man weiß, die beiden Integrale

$$\int_{y_1 L}^{y_2} dy \int_{x_1 L}^{x_2} f(x,y)\,dx \text{ und } \int_{x_1 L}^{x_2} dx \int_{y_1 L}^{y_2} f(x,y)\,dy$$

ind einander gleich:

$$\int_{y_1 L}^{y_2} dy \int_{x_1 L}^{x_2} f(x,y)\,dx = \int_{x_1 L}^{x_2} dx \int_{y_1 L}^{y_2} f(x,y)\,dy.^{1})$$

1) Vgl. Fubini, Sugli integrali multipli, Rendiconti dell r. Acc. dei Lincei, p. 608—614, de la Vallée Poussin, Réduction des intégrales doubles de

Ist $f(x,y)$ in dem Gebiete

$$(14) \qquad x_1 \leqq x \leqq x_2, \quad y_1 \leqq y \leqq y_2$$

für alle x in bezug auf y und für alle y in bezug auf x im Riemannsche Sinne integrierbar, so folgt aus dem Satze von Herrn W. H. Young (vg die Fußnote 1) auf der S. 57), daß die beiden Integrale

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx \text{ und } \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy$$

existieren. Hieraus und aus der Beziehung (13) folgt nunmehr, daß

$$(15) \qquad \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy.^{1})$$

Unsere Betrachtungen ergeben ein weiter reichendes Resultat, *ohne irgen etwas über die Existenz des Integrals* $\iint_L f(x,y)\,dx\,dy$ *vorauszusetzen.*

Nun aber umgekehrt:

Es sei $\varphi(x,y)$ eine in dem Gebiete (14) erklärte beschränkte Funktio die sowohl in bezug auf x, als auch in bezug auf y im Riemannsch Sinne integrierbar ist. Genügen diese Voraussetzungen für die Existenz d Doppelintegrals $\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1 L}^{x_2} \varphi(x,y)\,dx\,dy$? Unsere Entwicklungen geben auf die Frage keine Antwort.

3. Für die weiteren Betrachtungen haben wir den folgenden Hilfssatz nöt Es sei

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

eine Folge positiver, beschränkter, im Lebesgueschen Sinne integrierbar Funktionen, die in dem Intervalle (1) gegen eine nicht notwendig beschrän Funktion $f(x)$ konvergieren. Die Funktion $f(x)$ ist meßbar.[2])

Das Integral

$$\int_{x_1 L}^{x_2} f(x)\,dx$$

Lebesgue. Application à la définition des fonctions analytiques, Bull. de l'Ac roy. de Belgique, 1910, p. 768—798. Es ist hierbei zu bemerken, daß im l gemeinen für eine gewisse Menge der Werte y vom Maße Null das Inte $\int_{x_1 L}^{x_2} f(x,y)\,dx$ nicht existiert. Diese Werte sind bei der Bildung des Integ $\int_{y_1 L}^{y_2} dy \int_{x_1 L}^{x_2} f(x,y)\,dx$ auszuschließen. Analoges ist über das Integral $\int_{x_1 L}^{x_2} dx \int_{y_1 L}^{y_2} f(x,y)\,dy$ zu merken.

1) Vgl. W. H. Young, On a Change of Order of Integration in an m proper Repeated Integral, Transactions of the Cambridge Philosophical Soc 1910, p. 361—376 (siehe insbesondere p. 361—362).

2) Vgl. Lebesgue, loc. cit. p. 111.

; stets vorhanden, wenn auch nicht notwendig endlich. Es sei

$$f_1(x) \leqq f_2(x) \leqq f_3(x) \leqq \ldots \leqq f(x).$$

sdann ist stets

$$\lim_{n=\infty} \int_{x_1 L}^{x_2} f_n(x)\, dx = \int_{x_1 L}^{x_2} f(x)\, dx.^{1})$$

(6)

e Sätze I und II lassen sich auf uneigentliche Integrale übertragen.

Es sei $\psi(x)$ eine in der Menge $C(N)$ erklärte, nicht beschränkte Funktion. mögen $N_1, N_2, \ldots N_k, \ldots$ und $M_1, M_2, \ldots M_k, \ldots$ zwei Reihen unbegrenzt wachsender positiver Zahlen bedeuten. Wir führen eine unendliche he von Funktionen durch folgende Festsetzungen ein. Es ist $\psi_k(x) = \psi(x)$ allen Punkten, in denen $-M_k \leqq \psi(x) \leqq N_k$; ferner ist $\psi_k(x) = N_k$, wenn $\psi(x) > N_k$, $\psi_k(x) = -M_k$, wenn $\psi(x) < -M_k$. Nunmehr definieren wir Anlehnung an Herrn de la Vallée Poussin das uneigentliche Integral

$$\int^{C(N)} \psi(x)\, dx$$

durch die Gleichung

$$\int^{C(N)} \psi(x)\, dx = \lim_{k=\infty} \int^{C(N)} \psi_k(x)\, dx. \tag{17}$$

rbei wird vorausgesetzt, daß die Funktionen $\psi_k(x)$ im Riemannschen ne integrierbar sind und daß der Grenzwert (17) existiert und von der nderen Wahl der Größen N_k und M_k unabhängig ist. Dieses uneigentliche Integral wird im folgenden durch den unten angehängten Buchstaben V nnzeichnet.

III. *Es sei $f(x)$ eine für alle x in $C(N)$ und alle y in $C(Q)$ erklärte t negative nicht beschränkte Funktion, die folgende Eigenschaften hat:*

Für alle y in $C(Q)$ ist das Integral $J_2(y) = \int_V^{C(N)} f(x,y)\, dx$ vorhanden.

Für alle x in $C(N)$ ist das Integral $J_1(x) = \int_V^{C(Q)} f(x,y)\, dy$ vorhanden.

Es wird behauptet:

$J_1(x)$ und $J_2(y)$ sind entsprechend in $C(N)$ und $C(Q)$ meßbare Funktionen x und y.

Die beiden Integrale

$$\int_L^{C(Q)} J_2(y)\, dy = \int_L^{C(Q)} dy \int_V^{C(N)} f(x,y)\, dx$$

$$\int_L^{C(N)} J_1(x)\, dx = \int_L^{C(N)} dx \int_V^{C(Q)} f(x,y)\, dy$$

1) Vgl. W. H. Young, On a Change of Order etc., p. 362—363.

sind stets zugleich endlich oder bestimmt unendlich. Im ersteren Falle sind si einander gleich.

$$\int_L^{C(Q)} dy \int_V^{C(N)} f(x,y)\,dx = \int_L^{C(N)} dx \int_V^{C(Q)} f(x,y)\,dy.^{1}) \tag{20}$$

Es sei, wie oben, gesetzt:

$$f_k(x,y) = f(x,y), \text{ wenn } f(x,y) \leqq N_k,$$
$$f_k(x,y) = N_k, \text{ sobald } f(x,y) > N_k.$$

Dem Satze II zufolge sind die beiden Integrale

$$\int^{C(N)} f_k(x,y)\,dx \quad \text{und} \quad \int^{C(Q)} f_k(x,y)\,dy$$

entsprechend in den Mengen $C(Q)$ und $C(N)$ im Riemannschen, somit fortiori im Lebesgueschen Sinne integrierbar. Es ist ferner

$$\int_L^{C(Q)} dy \int^{C(N)} f_k(x,y)\,dx = \int_L^{C(N)} dx \int^{C(Q)} f_k(x,y)\,dy. \tag{21}$$

Die Integrale

$$\int^{C(N)} f_k(x,y)\,dx, \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

stellen eine in der Menge $C(Q)$ konvergente Reihe meßbarer Funktionen d

Die Grenzfunktion $\int_V^{C(N)} f(x,y)\,dx$ ist in $C(Q)$ meßbar. Desgleichen

$\int_V^{C(Q)} f(x,y)\,dy$ in $C(N)$ meßbar. Die Integrale $\int^{C(N)} f_k(x,y)\,dx$ stellen in $C($

eine konvergente monoton wachsende Reihe von Funktionen dar. Dem zul betrachtetem Hilfsatze zufolge ist

$$\lim_{k=\infty} \int_L^{C(Q)} dy \int^{C(N)} f_k(x,y)\,dx = \int_L^{C(Q)} dy \lim_{k=\infty} \int^{C(N)} f_k(x,y)\,dx = \int_L^{C(Q)} dy \int_V^{C(N)} f(x,y)\,dx. \tag{22}$$

Hieraus und aus der Gleichung (21) ergibt sich nunmehr

$$\int_L^{C(Q)} dy \int_V^{C(N)} f(x,y)\,dx = \lim_{k=\infty} \int_L^{C(N)} dx \int^{C(Q)} f_k(x,y)\,dy = \int_L^{C(N)} dx \lim_{k=\infty} \int^{C(Q)} f_k(x,y)\,dy = \tag{23}$$
$$= \int_L^{C(N)} dx \int_V^{C(Q)} f(x,y)\,dy.$$

---

1) Vgl. den entsprechenden Satz von Herrn W. H. Young, On a Cl usw. p. 373.

Da die Mengen N und Q vom Maße Null sind, so kann man in ihnen en in (23) zu integrierenden Funktionen beliebige Werte geben und einfacher chreiben:

$$\int_{y_1 L}^{y_2} dy \int_{x_1 L}^{x_2} f(x,y)\,dx = \int_{x_1 L}^{x_2} dx \int_{y_1 L}^{y_2} f(x,y)\,dy. \tag{24}$$

Da $f(x, y)$ nicht negativ ist, so sind die beiden Integrale (24) zugleich ndlich, oder bestimmt unendlich.[1])

Es sei nunmehr $f(x, y)$ nicht mehr $\geqq 0$. Die Aussage des Satzes III t alsdann wie folgt abzuändern.

IV. *Die Integrale*

$$J_1(x) = \int_V^{C(Q)} f(x,y)\,dy,$$

$$J_2(y) = \int_V^{C(N)} f(x,y)\,dx$$

d in $C(N)$ und $C(Q)$ meßbare Funktionen von x und y. Hat eins der beiden tegrale

$$\int_L^{C(Q)} dy \int_V^{C(N)} |f(x,y)|\,dx \quad \text{und} \quad \int_L^{C(N)} dx \int_V^{C(Q)} |f(x,y)|\,dy \tag{5}$$

en bestimmten endlichen Wert, so haben auch die beiden Integrale

$$\int_L^{C(N)} J_1(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_L^{C(Q)} J_2(x)\,dy \tag{5}$$

timmte endliche Werte und sind einander gleich.[2])

Es sei

$$f^{(1)}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{wenn } f > 0, \\ 0, & \text{wenn } f \leqq 0, \end{cases}$$

$$f^{(2)}(x,y) = \begin{cases} -f(x,y), & \text{falls } f < 0, \\ 0, & \text{falls } f \geqq 0. \end{cases}$$

Wir finden

$$f(x,y) = f^{(1)}(x,y) - f^{(2)}(x,y) \quad \text{und} \quad |f(x,y)| = f^{(1)}(x,y) + f^{(2)}(x,y).$$

Die Integrale (25) haben einen endlichen Wert. Offenbar haben die grale, die man erhält, wenn man in (25) für $|f(x, y)|$ entsprechend

---

1) Der Satz III gilt unverändert, wenn die Funktion $f(x, y)$ Werte beiderlei eichens annimmt, jedoch einer der beiden Ungleichheitsbedingungen $f(x,y) > -m$, $f(x, y) < n$, in denen m und n gewisse endliche Größen bedeuten, genügt.

2) Vgl. hierzu W. H. Young, On a Change usw. S. 363—364.

$f^{(1)}(x, y)$ und $f^{(2)}(x, y)$ einsetzt, dieselbe Eigenschaft. Dem Satze III zu folge ist

$$(29)\quad \begin{cases} \int_L^{C(N)} dx \int_V^{C(Q)} f^{(1)}(x, y)\, dy = \int_L^{C(Q)} dy \int_V^{C(N)} f^{(1)}(x, y)\, dx, \\ \int_L^{C(N)} dx \int_V^{C(Q)} f^{(2)}(x, y)\, dy = \int_L^{C(Q)} dy \int_V^{C(N)} f^{(2)}(x, y)\, dx. \end{cases}$$

Hieraus und aus (28) folgt schließlich

$$(30)\quad \int_L^{C(N)} dx \int_V^{C(Q)} f(x, y)\, dy = \int_L^{C(Q)} dy \int_V^{C(N)} f(x, y)\, dx.$$

Der Satz IV gilt, wie man sich leicht überzeugt, stets, wenn das Integ $\int_V^{C(N)} |f(x, y)|\, dx$ eine in $C(Q)$ beschränkte Funktion von y, oder das Integ $\int_V^{C(Q)} |f(x, y)|\, dy$ eine in $C(N)$ beschränkte Funktion von x darstellt.[1])

Durch eine geringfügige Abänderung des vorhin angewandten Bew verfahrens erhält man den folgenden Satz:

V. *Die in dem Gebiete* (14) *erklärte nicht beschränkte Funktion* $f(x, y)$ n *für alle* y *in* $C(Q)$ *das uneigentliche Integral* $\int_V^{C(N)} f(x, y)\, dx$ *und für alle* $C(N)$ *das Lebesguesche Integral* $\int_{y_1 L}^{y_2} f(x, y)\, dy$ *besitzen.*

Hat eins der beiden Integrale

$$(31)\quad \int_{y_1 L}^{y_2} dy \int_V^{C(N)} |f(x, y)|\, dx \quad \text{und} \quad \int_{x_1 L}^{x_2} dx \int_{y_1 L}^{y_2} |f(x, y)|\, dy$$

einen bestimmten endlichen Wert, so haben die beiden Integrale

$$(32)\quad \int_{y_1 L}^{y_2} dy \int_V^{C(N)} f(x, y)\, dx \quad \text{und} \quad \int_{x_1 L}^{x_2} dx \int_{y_1 L}^{y_2} f(x, y)\, dy$$

bestimmte endliche Werte und sind einander gleich.

---

1) Vergleiche den Satz III meines Aufsatzes in den Göttinger Nachri An jener Stelle habe ich vorausgesetzt, daß die *beiden* Integrale $\int_{x_1 V}^{x_2} |f(x,$ und $\int_{y_1 V}^{y_2} |f(x, y)|\, dy$ beschränkte Funktionen darstellen.

Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn eins der beiden Integrale

33) $$\int_V^{C(N)} |f(x,y)|\,dx \quad \text{und} \quad \int_{y_1 L}^{y_2} |f(x,y)|\,dy$$

ine beschränkte Funktion von y oder von x darstellt.

Hat die Funktion $f(x,y)$ eine endliche untere oder endliche obere Grenze, o sind die beiden Integrale (32) *stets entweder endlich und einander gleich, der bestimmt unendlich.*

4. Wir geben nunmehr den folgenden Satz an[1]):

VI. *Es sei $f(x,y)$ eine in dem Gebiete*

34) $$x_1 \gtrless x,$$
$$y_1 \gtrless y \leqq y_2$$

klärte nicht notwendig beschränkte Funktion, die folgende Eigenschaften hat:

Für alle y in $C(Q)$ und alle $X \geqq x_1$ sind die Integrale

5) $$\begin{cases} \int_{x_1 V}^{X} f(x,y)\,dx, \quad \int_V^{C(Q)} f(x,y)\,dy, \\ \int_{x_1 V}^{\infty} |f(x,y)|\,dx = \lim_{X=\infty} \int_{x_1 V}^{X} |(f(x,y)|\,dx \end{cases}$$

rhanden. Hat eins der beiden Integrale

6) $$\int_{x_1 L}^{\infty} dx \int_V^{C(Q)} |f(x,y)|\,dy = \lim_{X=\infty} \int_{x_1 L}^{X} dx \int_V^{C(Q)} |f(x,y)|\,dy \quad \text{und} \quad \int_{y_1 L}^{y_2} dy \int_{x_1 V}^{\infty} |f(x,y)|\,dx$$

en bestimmten endlichen Wert, so sind die beiden Integrale

7) $$\int_{x_1 L}^{\infty} dx \int_V^{C(Q)} f(x,y)\,dy \quad \text{und} \quad \int_L^{C(Q)} dy \int_{x_1 V}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

handen und einander gleich.

Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn es eine Zahl M gibt, sodaß für alle $> x_1$ und alle y in (34)

8) $$\int_{x_1 V}^{X} |f(x,y)|\,dx < M$$

Nimmt die Funktion $f(x,y)$ für alle $X \geqq x_1$ und alle y in $C(Q)$ nur die rte eines Vorzeichens an, so haben die beiden Integrale (37) *bestimmte liche Werte und sind einander gleich, oder sie sind bestimmt unendlich.*

---

1) Vgl. zu V und VI die Sätze IV und V meiner Göttinger Arbeit, sowie Sätze von Herrn H. W. Young, On a Change of Order . . ., S. 363—369.

Es möge zunächst das Integral

$$\int_{x_1}^{\infty} dx \int_{L}^{C(Q)} \int_{V} |f(x,y)|\, dy \tag{39}$$

einen endlichen Wert haben. Damit ist stillschweigend gesagt, daß das Integr

$$\int_{x_1}^{X} dx \int_{L}^{C(Q)} \int_{V} |f(x,y)|\, dy \tag{40}$$

eine beschränkte Funktion von X darstellt. Dem Satze III zufolge ist dah

$$\int_{x_1}^{X} dx \int_{L}^{C(Q)} \int_{V} |f(x,y)|\, dy = \int_{L}^{C(Q)} dy \int_{x_1}^{X} \int_{V} |f(x,y)|\, dx, \tag{41}$$

somit

$$\int_{x_1}^{\infty} dx \int_{L}^{C(Q)} \int_{V} |f(x,y)|\, dy = \lim_{X=\infty} \int_{L}^{C(Q)} dy \int_{x_1}^{X} \int_{V} |f(x,y)|\, dx. \tag{42}$$

Das Integral

$$\int_{x_1}^{X} \int_{V} |f(x,y)|\, dx$$

ist eine in $C(Q)$ monoton wachsende Funktion von X. Daher ist

$$\int_{x_1}^{\infty} dx \int_{L}^{C(Q)} \int_{V} |f(x,y)|\, dy = \lim_{X=\infty} \int_{L}^{C(Q)} dy \int_{x_1}^{X} \int_{V} |f(x,y)|\, dx = \int_{L}^{C(Q)} dy \left[\lim_{X=\infty} \int_{x_1}^{X} \int_{V} |f(x,y)| \right.$$

$$= \int_{L}^{C(Q)} dy \int_{x_1}^{\infty} \int_{V} |f(x,y)|\, dx.^{1}) \tag{43}$$

Es möge jetzt zweitens der Ausdruck

$$\int_{L}^{C(Q)} dy \int_{x_1}^{\infty} \int_{V} |f(x,y)|\, dx \tag{44}$$

einen endlichen Wert haben. Dem Satze III zufolge ist für alle X

$$\int_{L}^{C(Q)} dy \int_{x_1}^{X} \int_{V} |f(x,y)|\, dx \tag{45}$$

vorhanden und endlich, oder bestimmt unendlich. Im vorliegenden Fall

---

1) Bei der Ausführung des Grenzprozesses ist für X eine beliebige diskreter positiver ins Unendliche wachsender Zahlen einzusetzen.

'45) für alle X gewiß endlich, andernfalls das Integral (44) a fortiori un-ndlich groß sein würde. Wir finden daher

$$\int_L^{C(Q)} dy \int_{x_1 V}^{\infty} |f(x,y)|\,dx = \lim_{X=\infty} \int_L^{C(Q)} dy \int_{x_1 V}^{X} |f(x,y)|\,dx =$$

(46)

$$= \lim_{X=\infty} \int_{x_1 L}^{X} dx \int_V^{C(Q)} |f(x,y)|\,dx = \int_{x_1 L}^{\infty} dx \int_V^{C(Q)} |f(x,y)|\,dx.$$

Es ist nun nicht schwer einzusehen, daß in jedem der beiden soeben etrachteten Fälle a fortiori die beiden Integrale (37) existieren und einander leich sind.

Es möge schließlich $f(x, y)$ nur Werte eines Vorzeichens annehmen; es ei z. B. $f(x, y) \geqq 0$, somit $f(x, y) = |f(x, y)|$. Es ist dann einleuchtend, daß ie Integrale (37) nur entweder endlich, oder bestimmt unendlich sein können. st ein Integral endlich, so ist, wie wir bereits gesehen haben, auch das andere ntegral endlich. Hieraus folgt bereits, daß die Integrale (37) nur beide zu-leich unendlich groß sein können.

Es sei nun zum Schluß bemerkt, daß der vorstehende Satz auch dann och gültig bleibt, wenn man als das Gebiet der Variablen x nicht die Strecke $_1, +\infty)$, sondern eine Punktmenge annimmt, die so beschaffen ist, daß ihre $(x_1, +\infty)$ gehörige Komplementärmenge in jedem in (x_1, ∞) enthaltenen eilintervalle vom Maße Null ist.

5. Es sei $f_1(x), f_2(x), \ldots$ eine unendliche Folge von Funktionen, die entrechend in den in (1) gelegenen Gebieten $C(N_1)$, $C(N_2)$, ... vom Maße $-x_1$ im Riemannschen Sinne integrierbar sind und daselbst den Ungleich-itsbedingungen

$$|f_k(x)| < m, \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

rin m eine gewisse positive Größe bedeutet, genügen. In dem Gebiete $N_1 + N_2 + \cdots)$ mögen die Funktionen $f_k(x)$ gegen eine Grenzfunktion $(x) = \lim_{k=\infty} f_k(x)$ konvergieren. In Anlehnung an die bekannte Klassifikation n Herrn Baire kann man die Funktion $f^{(1)}(x)$ als eine Funktion der Klasse I' eichnen. Die in der Menge $C(N_1 + N_2 + \cdots)$ vom Maße $x_2 - x_1$ definierte nktion $f^{(1)}(x)$ ist daselbst beschränkt.

Es sei $f_k^{(1)}(x)$, $(k = 1, 2, \ldots)$, eine unendliche Folge von Funktionen Klasse I', die entsprechend in den Gebieten $C(N_k')$, $(k = 1, 2, \ldots)$, vom Be $x_2 - x_1$ definiert sind und daselbst einer Ungleichheitsbedingung

$$|f_k^{(1)}(x)| < m', \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

ügen. In dem Gebiete $C(N_1' + N_2' + \cdots)$ mögen diese Funktionen gegen e Grenzfunktion $f^{(2)}(x) = \lim_{k=\infty} f_k^{(1)}(x)$ konvergieren. Die Funktion $f^{(2)}(x)$ ge eine Funktion der Klasse II' heißen.

So geht man weiter. Offenbar sind die Funktionen aller Klassen im besgueschen Sinne integrierbar. Alle beschränkten Funktionen der Baire-en Klassifikation sind unter den hier betrachteten Funktionen enthalten.

Es läßt sich nunmehr ein Kriterium für die Integration eines Lebesgue schen Integrals in bezug auf einen Parameter angeben, das über das in den Satze I angegebene hinausgeht.

VII. *Es sei $f(x, y)$ eine für alle Werte von x in $C(N)$ und alle y in $(M$ definierte beschränkte Funktion, die folgende Eigenschaften hat:*

Als Funktion von x aufgefaßt, gehört $f(x, y)$ einer bestimmten Klasse vo der Ordnung ν' an. Als Funktion von y aufgefaßt, ist $f(x, y)$ schlechthin i Lebesgueschen Sinne integrierbar.

Es wird behauptet:

Die Integrale

$$\int_L^{(M)} f(x, y)\,dy \quad \text{und} \quad \int_L^{C(N)} f(x, y)\,dx$$

sind im Lebesgueschen Sinne integrierbar. Ferner ist

$$\int_L^{C(N)} dx \int_L^{(M)} f(x, y)\,dy = \int_L^{(M)} dy \int_L^{C(N)} f(x, y)\,dx. \tag{47}$$

Wir beweisen, daß, wenn diese Behauptungen für alle Funktionen d Klasse $\nu' - 1$ gelten, sie auch für Funktionen der Klasse ν' gültig bleibe Es sei also für alle x in $C(N)$ und alle y in (M)

$$f(x, y) = \lim_{k=\infty} f_k(x, y), \quad |f_k(x, y)| < m_0.$$

Offenbar sind die Funktionen

$$\int_L^{C(N)} f(x, y)\,dx = \lim_{k=\infty} \int_L^{C(N)} f_k(x, y)\,dx$$

und

$$\int_L^{(M)} f(x, y)\,dy = \lim_{k=\infty} \int_L^{(M)} f_k(x, y)\,dy$$

im Lebesgueschen Sinne integrierbar. Nach der Voraussetzung ist

$$\int_L^{C(N)} dx \int_L^{(M)} f_k(x, y)\,dy = \int_L^{(M)} dy \int_L^{C(N)} f_k(x, y)\,dx, \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{48}$$

daher auch

$$\lim_{k=\infty} \int_L^{C(N)} dx \int_L^{(M)} f_k(x, y)\,dy = \int_L^{C(N)} dx \lim_{k=\infty} \int_L^{(M)} f_k(x, y)\,dy = \int_L^{C(N)} dx \int_L^{(M)} f(x, y)\,dy =$$

$$= \lim_{k=\infty} \int_L^{(M)} dy \int_L^{C(N)} f_k(x, y)\,dx = \int_L^{(M)} dy \lim_{k=\infty} \int_L^{C(N)} f_k(x, y)\,dx = \int_L^{(M)} dy \int_L^{C(N)} f(x, y)\,dx. \tag{49}$$

)a nun nach I die zu beweisende Behauptung für Funktionen $f(x, y)$, die in $'(N)$ im Riemannschen Sinne integrierbar sind, gilt, so gilt sie allgemein ir Funktionen aller Klassen.

Der soeben bewiesene Satz läßt sich sinngemäß auf die Integrale nicht eschränkter Funktionen übertragen.

Die Betrachtungen dieser Arbeit, insbesondere die Sätze I und II dürften ir die Theorie der *linearen Integralgleichungen* nicht ohne Interesse sein.

Es sei

$$\varphi(s) = \int_{a\,L}^{b} K(s,t)\,\varphi(t)\,dt + f(s) \tag{50}$$

ne lineare nicht homogene Integralgleichung. Wir beschränken uns auf den nfachsten Fall und nehmen die Funktionen $f(s)$ und $K(s,t)$ als beschränkt ı. In der Regel werden folgende Voraussetzungen gemacht: $K(s,t)$ stetig, $s)$ im Lebesgueschen Sinne integrierbar. *Es genügt vorauszusetzen: $K(s,t)$ s Funktion von s für alle t in $C(Q)$ und als Funktion von t für alle s in $C(N)$:tsprechend in den Punktmengen $C(N)$ und $C(Q)$ im Riemannschen Sinne tegrierbar, $f(s)$ im Lebesgueschen Sinne integrierbar.*[1])

In der Tat kommt es bei der ersten Iteration darauf an, die Zulässigkeit ır Vertauschung der Integrationsfolge

$$\int_{a\,L}^{b} dt \int_{a\,L}^{b} K(s,t)K(t,t_1)f(t_1)dt_1 = \int_{a\,L}^{b} dt_1 \int_{a\,L}^{b} K(s,t)\,K(t,t_1)\,f(t_1)\,dt \tag{51}$$

chzuweisen. Dem Satze I zufolge ist

$$\int^{C(N+Q)} dt \int_{L}^{C(Q)} K(s,t)K(t,t_1)f(t_1)dt_1 = \int_{L}^{C(Q)} dt_1 \int^{C(N+Q)} K(s,t)K(t,t_1)f(t_1)dt. \tag{52}$$

erfür kann man augenscheinlich die zu beweisende Beziehung (51) setzen.

Der erste iterierte Kern

$$K^{(1)}(s,t) = \int^{C(N+Q)} K(s,r)K(r,t)\,dr = \int_{a\,L}^{b} K(s,r)K(r,t)dr \tag{53}$$

nach II in bezug auf s in $C(N)$, in bezug auf t in $C(Q)$ im Riemannschen ne integrierbar, hat somit genau dieselben Eigenschaften wie der Kern $s,t)$ selbst.

---

1) Es wird hier $a = x_1 = y_1$, $b = x_2 = y_2$ angenommen.

Herrn Prof. Dr F. Auerbach
mit den besten Grüssen
von
H. Pipping

Zur Frage von der Bedeutung der Fehlerrechnung bei der harmonischen Analyse von Curven.

Von

Ernst Lindelöf,
Helsingfors.

Bonn, 1901.
Separat-Abdruck aus dem Archiv für die ges. Physiologie Bd. 87.
Verlag von Emil Strauss.

Zur Frage von der Bedeutung der Fehlerrechnung bei der harmonischen Analyse von Curven.

Von

Ernst Lindelöf, Helsingfors.

Im 86. Bande dieses Archivs (S. 92—102) bringt Professor Hermann die genannte Frage wieder zur Sprache und wendet sich diesmal speciell gegen den Beweis, womit ich versucht habe, Pipping's Auffassung von der Bedeutung seiner Fehlerrechnung mathematisch zu rechtfertigen. Hermann glaubt in meinem Beweise eine „unzulässige Ausdehnung der Wahrscheinlichkeitsrechnung" nachweisen zu können. Ich werde unten zeigen[1]), dass ich nichts Anderes vorausgesetzt habe als die von Laplace und Gauss begründeten und seither allgemein angenommenen Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, und dass Hermann's Einwände fast alle auf einer unklaren und ungenauen Auffassung dieser Principien beruhen.

1. Um eine grössere Klarheit der Darstellung zu erzielen, bin ich genöthigt, auf die classische Anwendung der „Methode der kleinsten Quadrate" kurz zurückzugreifen. Es sei vorläufig irgend eine periodische Curve gegeben, von der man im Voraus weiss, dass sie aus einer endlichen Anzahl einfacher Schwingungen zusammengesetzt ist, so dass ihre Gleichung in der Form

$$y = a_0 + a_1 \cos\varphi + \cdots + a_\mu \cos\mu\varphi + b_1 \sin\varphi + \cdots + b_\mu \sin\mu\varphi$$

1) Ich entwickle hier ausführlicher den Gedankengang, den ich in meinen früheren Aufsätzen über diesen Gegenstand (Acta Societatis Scientiarum Fennicae tom. 20 Nr. 11 p. 63 ff. — Lindelöf und Pipping, Ueber die Berechnung der Beobachtungsfehler bei der Ausmessung von Klangcurven. Dieses Archiv Bd. 85 S. 59—64) nur angedeutet habe. Inzwischen habe ich in einer in den „Acta" der Finnländischen Societät der Wissenschaften (tom. 29) demnächst erscheinenden Abhandlung (Ueber die Ermittelung der Genauigkeit der Beobachtungen bei der Analyse periodischer Erscheinungen und in der Methode der kleinsten Quadrate) die vorliegende Frage von rein mathematischem Standpunkte aus behandelt und, wie der Titel angibt, die Resultate viel verallgemeinert.

geschrieben werden kann, wenn die Wellenlänge gleich 2π gesetzt wird. Diese Länge theilen wir in n $(> 2\mu + 1)$ gleiche Abschnitte und messen die den Theilungspunkten entsprechenden Ordinaten der Curve. Die Messung gibt die Werthe $y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}$. Zur Bestimmung der $m = 2\mu + 1$ unbekannten Constanten der Curve dienen die n $(> m)$ Gleichungen

$$v_k \equiv -y_k + a_0 + \sum_1^{\mu} a_i \cos kiz + \sum_1^{\mu} b_i \sin kiz = 0 \ (k = 0,1,\cdots,n-1),$$

wo $z = \frac{2\pi}{n}$ gesetzt ist; dieselben sind, wegen der Beobachtungsfehler, unter einander im Allgemeinen nicht verträglich.

Nach der Methode der kleinsten Quadrate hat man nun aus den obigen Gleichungen die Unbekannten so zu bestimmen, dass die Summe $\sum_{i=0}^{n-1} k_i^2 v_i^2$ ein Minimum wird, wo k_i die Präcision der Messung der Ordinate y_i bezeichnet. Um die Analogie mit den weiteren Entwicklungen deutlicher hervortreten zu lassen, nehme ich an, dass die Präcision für alle Messungen denselben Werth k hat. Dann haben wir einfach das Minimum der Summe $\sum_{i=0}^{n-1} v_i^2$ zu suchen, und die Rechnung ergibt sofort für die zu bestimmenden Constanten die Werthe

$$(1) \quad a_0 = \frac{1}{n} \Sigma y_i; \ a_k = \frac{2}{n} \Sigma y_i \cos kiz; \ b_k = \frac{2}{n} \Sigma y_i \sin kiz,$$

d. h. genau dieselben Werthe, die bei der gewöhnlichen harmonischen Analyse der Curve erhalten werden. Bezeichnen wir die entsprechenden Werthe der v_i oder die bei unserer Constantenbestimmung „übrig bleibenden Fehler" mit δ_i, so ist

$$(2) \qquad \Sigma \delta_i^2 = \Sigma y_i^2 - \frac{n}{2} \left\{ 2 a_0^2 + \sum_1^{\mu} (a_i^2 + b_i^2) \right\}$$

der Minimalwerth der Summe Σv_i^2.

Um die Genauigkeit der Messungen zu ermitteln, müssen wir nach Gauss' Vorgang[1]), die Summe $\Sigma \delta_i^2$ durch die Beobachtungsfehler ausdrücken. Bezeichnen wir diese mit $\Delta_0, \Delta_1, \cdots, \Delta_{n-}$ und setzen wir

$$\Delta a_0 = \frac{1}{n} \Sigma \Delta_i; \ \Delta a_k = \frac{2}{n} \Sigma \Delta_i \cos kiz; \ \Delta b_k = \frac{2}{n} \Sigma \Delta_i \sin kiz,$$

1) Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, Art.

wobei $y_i + \Delta_i$ den wahren Werth der entsprechenden Ordinate bezeichnet, $a_k + \Delta a_k$ und $b_k + \Delta b_k$ die wahren Werthe der entsprechenden Constanten, so bestehen die Gleichungen

$$\Delta_k = -y_k + a_0 + \Delta a_0 + \sum_1^{\mu} (a_i + \Delta a_i) \cos kiz + \sum_1^{\mu} (b_i + \Delta b_i) \sin kiz,$$

und wenn wir dieselben von den Gleichungen

$$\delta_k = -y_k + a_0 + \sum_1^{\mu} a_i \cos kiz + \sum_1^{\mu} b_i \sin kiz$$

abziehen und die erhaltenen Gleichungen quadriren und addiren, finden wir sofort die gesuchte Relation:

$$(3) \qquad \Sigma \delta_i^2 = \Sigma \Delta_i^2 - \frac{n}{2}\left\{2 \Delta a_0^2 + \sum_1^{\mu} (\Delta a_i^2 + \Delta b_i^2)\right\}.$$

Hier hat nun die linke Seite einen bestimmten numerischen Werth (2); die rechte enthält die uns völlig unbekannten, bei der Ordinatenmessung wirklich stattgefundenen Beobachtungsfehler.

Um aus der Relation (3) die Genauigkeit der Messungen ermitteln zu können, wenden wir das von Gauss eingeführte Princip[1]) an, welches sich in folgenden Worten kurz ausdrücken lässt:

Es soll die Function der Beobachtungsfehler, die in der Gleichung (3) nach rechts steht, durch ihren (a priori zu erwartenden) wahrscheinlichen Werth ersetzt werden.

Da Hermann von dem für die ganze Wahrscheinlichkeitsrechnung fundamentalen Begriff des wahrscheinlichen oder mittleren Werthes einer Grösse keine klare Auffassung zu haben scheint (man vergleiche seine Auseinandersetzungen S. 97—101, die mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung überhaupt wenig oder nichts zu thun haben), bin ich genöthigt, die Definition dieses Begriffes, die von Gauss mit aller Klarheit aufgestellt worden ist[2]), hier kurz wiederzugeben.

Es seien x, x', x'', $\cdots$ die bei verschiedenen Messungen gemachten Beobachtungsfehler, $\varphi(x)$, $\varphi'(x')$, $\varphi''(x'')$, $\cdots$ die Functionen, welche die Wahrscheinlichkeiten derselben repräsentiren,

1) l. c. Art. 38.
2) l. c. Art. 12—16.

$F(x, x', x'', \cdots)$ irgend eine Function dieser Fehler; der wahrscheinliche Werth von F ist dann durch den Ausdruck

$$W[F] = \int F(x, x', x'', \cdots)\, \varphi(x)\, \varphi'(x')\, \varphi''(x'') \cdots dx\, dx'\, dx'' \cdots$$

definirt, wo nach x, x', x'', $\cdots$ von $-\infty$ nach $+\infty$ zu integriren ist (der Kürze halber werde ich mich künftig des Symbols $W[F]$ bedienen, um den wahrscheinlichen Werth irgend welcher Function F der Beobachtungsfehler zu bezeichnen). Speciell findet man, wenn a, a', a'' beliebige Constanten sind und $\varphi(x) = \varphi(-x)$, $\varphi'(x') = \varphi'(-x')$, $\cdots$ angenommen wird,

$$W[(ax + a'x' + a''x'' + \cdots)] = 0,$$
$$W[(ax + a'x' + a''x'' + \cdots)^2] = a^2 m^2 + a'^2 m'^2 + a''^2 m''^2 + \cdots,$$

wo m, m', m'', $\cdots$ die für die verschiedenen Beobachtungen charakteristischen mittleren Fehler bedeuten. Hieraus folgen nun unmittelbar die Werthe, die ich für $W[\Delta a_k^2]$ und $W[\Delta b_k^2]$ angegeben habe, und welche Hermann meiner Erfindung zuschreibt.

Indem ich für weitere Ausführungen über diesen Gegenstand auf das interessante Lehrbuch von J. Bertrand[1]) verweise, will ich hier nur noch bemerken, dass Gauss selbst ausdrücklich betont[2]), dass in der obigen Definition die Functionen φ, φ', φ'', $\cdots$ und somit auch die Präcisionen der einzelnen Beobachtungen verschieden sein dürfen. Unberechtigt und von Hermann eigenmächtig eingeführt ist die Beschränkung der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Fälle, wo „dieselbe Grösse mehrmals unter vergleichbaren Präcisionsbedingungen direct oder indirect gemessen ist". Eine derartige Beschränkung würde übrigens die bis jetzt gelläufige Anwendung dieser Rechnung auf viele wichtige und interessante Fragen (z. B. in der Astronomie) unmöglich machen.

Kehren wir zu der Gleichung (3) zurück, um den wahrscheinlichen Werth des rechten Membrums zu berechnen. Wenn der für alle Messungen gleich gross angenommene mittlere Fehler mit ε bezeichnet wird, ist

$$W[\Delta a_0^2] = \frac{1}{n}\varepsilon^2,\quad W[\Delta a_k^2] = \frac{2}{n}\varepsilon^2,\quad W[\Delta b_k^2] = \frac{2}{n}\varepsilon^2,$$

und der gesuchte wahrscheinliche Werth ergibt sich hieraus sofort gleich $(n-m)\,\varepsilon^2$. Indem wir, gemäss dem oben citirten Gauss

1) Calcul des Probabilités. Paris 1888.
2) l. c. Art. 16.

schen Princip, diesen Ausdruck mit der linken Seite der Gleichung (3) identificiren, erhalten wir die bekannte Formel

$$\varepsilon^2 = \frac{\Sigma \delta_i^2}{n-m}, \tag{4}$$

welche auch Hermann glaubt billigen zu können, obgleich fast alle seine Einwände, wenn sie stichhaltig wären, gerade diejenigen Voraussetzungen beeinträchtigen würden, die derselben als Grundlage dienen.

Um die Zuverlässigkeit der eben erhaltenen Formel näher zu prüfen, berechnen wir mit Gauss[1]) den mittleren Fehler η, den man zu befürchten hat, wenn man die rechte Seite von (3) mit ihrem wahrscheinlichen Werth ersetzt, also die durch die Gleichung

$$\eta^2 = W\left[\left(\Sigma \Delta_i^2 - \frac{n}{2}\left\{2\,\Delta a_0^2 + \sum_1^{n''}(\Delta a_i^2 + \Delta b_i^2)\right\} - (n-m)\,\varepsilon^2\right)^2\right]$$

definirte Grösse. Mit Rücksicht auf die S. 610 gemachte Bemerkung findet man leicht $\eta = \sqrt{2\,(n-m)} \cdot \varepsilon^2$,

welcher Werth sonst auch direct der Abhandlung von Gauss entnommen werden kann. Der bei dem Werthe (4) von ε^2 zu befürchtende mittlere Fehler ist also

$$\frac{\eta}{n-m} = \sqrt{\frac{2}{n-m}} \cdot \varepsilon^2,$$

und dieser Werth ist demnach um so genauer, je grösser die Zahl $n-m$ ist.

2. Ich gehe jetzt zu dem von mir schon früher behandelten Fall über, wo eine beliebige periodische Curve vorgelegt ist, von deren Eigenschaften a priori nichts bekannt ist. Ich hebe ausdrücklich hervor, dass es uns ganz gleichgültig ist, in welcher Weise diese Curve erhalten worden ist, und dass folglich etwaige Fehler des zur Aufzeichnung derselben angewandten Apparates auf unsere Resultate gar keinen Einfluss haben können.

Zur besseren Orientirung will ich die Fragestellung, sowie die Bezeichnungen nochmals kurz angeben. Nach Fourier's Theorem kann die Ordinate der Curve durch eine trigonometrische Reihe ausgedrückt werden:

$$y = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 \cos\varphi + \bar{a}_2 \cos 2\varphi + \cdots + \bar{b}_1 \sin\varphi + \bar{b}_2 \sin 2\varphi + \cdots$$

Es bedeuten also hier $\bar{a}_i$, $\bar{b}_i$ die wahren Werthe der Coëfficienten. Da wir von der Anzahl dieser Coëfficienten im Voraus nichts wissen, kann von der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate jetzt

1) l. c. Art. 39.

keine Rede sein. Wir schlagen daher das bei der harmonischen Analyse gewöhnliche Verfahren ein, indem wir aus den n gemessenen Ordinaten $y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}$, n Constanten mittelst der Gleichungen

$$y_i = a_0 + a_1 \cos iz + \cdots + a_{\frac{n}{2}} \cos \frac{n}{2} iz + b_1 \sin iz + \cdots$$

$$+ b_{\frac{n}{2}-1} \sin \left(\frac{n}{2} - 1\right) iz \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1)$$

bestimmen. (Wir nehmen an, dass die Zahl n gerade ist.) Dieselben geben uns sofort

$$(5) \qquad \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{n} \Sigma y_i; & a_k &= \frac{2}{n} \Sigma y_i \cos kiz, \\ a_{\frac{n}{2}} &= \frac{1}{n} \Sigma (-1)^i y_i; & b_k &= \frac{2}{n} \Sigma y_i \sin kiz, \end{aligned}$$

und die mit diesen Constanten construirte Gleichung

$$(6) \quad y = a_0 + a_1 \cos \varphi + \cdots + a_{\frac{n}{2}} \cos \frac{n}{2} \varphi + b_1 \sin \varphi + \cdots$$

$$+ b_{\frac{n}{2}-1} \sin \left(\frac{n}{2} - 1\right) \varphi$$

liefert uns eine Approximation der gegebenen Curve.

Es fragt sich nun, ob das Resultat unserer Analyse uns erlaubt, irgend etwas über die Genauigkeit der Messungen auszusagen. Im Allgemeinen wird dies natürlich nicht möglich sein, wohl aber in denjenigen Fällen, die wir eben betrachten wollen, wo die ermittelte Reihe (6) eine gute Convergenz aufzuweisen hat. Als Beispiel eines solchen Falles erlaube ich mir die von Pipping und mir in unseren letzten Aufsatze besprochene Vocalanalyse hier wieder anzuführen, diesmal mit genauerer Angabe der Constantenwerthe. Es waren $n = 4$ Ordinaten gemessen, und die Rechnung ergab folgendes Resultat:

$a_0 = -20{,}19$			
$a_1 = -1{,}88$	$b_1 = +3{,}86$	$a_{13} = -0{,}06$	$b_{13} = -0{,}10$
$a_2 = +16{,}92$	$b_2 = +20{,}09$	$a_{14} = +0{,}20$	$b_{14} = -0{,}02$
$a_3 = +7{,}42$	$b_3 = +40{,}54$	$a_{15} = +0{,}03$	$b_{15} = +0{,}16$
$a_4 = -2{,}75$	$b_4 = +13{,}50$	$a_{16} = +0{,}06$	$b_{16} = +0{,}04$
$a_5 = -3{,}40$	$b_5 = +5{,}50$	$a_{17} = +0{,}07$	$b_{17} = +0{,}18$
$a_6 = +0{,}90$	$b_6 = +0{,}98$	$a_{18} = +0{,}02$	$b_{18} = -0{,}10$
$a_7 = -0{,}17$	$b_7 = -0{,}20$	$a_{19} = +0{,}05$	$b_{19} = +0{,}10$
$a_8 = +0{,}31$	$b_8 = -0{,}04$	$a_{20} = -0{,}30$	$b_{20} = 0{,}00$
$a_9 = +0{,}21$	$b_9 = -0{,}05$	$a_{21} = +0{,}01$	$b_{21} = -0{,}08$
$a_{10} = -0{,}12$	$b_{10} = +0{,}06$	$a_{22} = +0{,}30$	$b_{22} = +0{,}09$
$a_{11} = -0{,}05$	$b_{11} = +0{,}37$	$a_{23} = -0{,}07$	$b_{23} = +0{,}10$
$a_{12} = -0{,}08$	$b_{12} = +0{,}12$	$a_{24} = -0{,}31$	

Dass dieses Resultat auf gute Messungen deutet, dürfte dem Sachkundigen auf den ersten Blick klar sein. Wir stellen uns hier die Aufgabe, dies mittelst Anwendung der Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu erläutern.

3. Wir nehmen an, dass unter den berechneten Constanten (5) diejenigen, deren Index grösser ist als μ $(< \frac{n}{2})$, so klein sind, dass es sich vermuthen lässt, dass sie hauptsächlich den Beobachtungsfehlern ihre Existenz verdanken. Indem wir diese Constanten ganz weglassen, erhalten wir folgende approximative Gleichung für unsere Curve:

$$y = a_0 + a_1 \cos\varphi + \cdots + a_\mu \cos\mu\varphi + b_1 \sin\varphi + \cdots + b_\mu \sin\mu\varphi.$$

Für $\varphi = 0,\ z,\ 2z,\ \cdots$ gibt uns dieselbe natürlich nicht mehr die beobachteten Ordinatenwerthe, sondern es bleiben übrig die Fehler

$$(7) \qquad \delta_k = -y_k + a_0 + \sum_1^\mu a_i \cos kiz + \sum_1^\mu b_i \sin kiz,$$

deren Quadratsumme wieder durch die Formel (2) gegeben ist. Für die Beobachtungsfehler $\Delta_0,\ \Delta_1,\ \cdots,\ \Delta_{n-1}$ gelten wieder die Gleichungen

$$(8) \qquad \Delta_k = -y_k + A_0 + \sum_1^{\frac{n}{2}} A_i \cos kiz + \sum_1^{\frac{n}{2}-1} B_i \sin kiz,$$

wo wir der Kürze halber

$$A_0 = \bar{a}_0 + \bar{a}_n + \bar{a}_{2n} + \cdots; \quad A_k = \bar{a}_k + \bar{a}_{n-k} + \bar{a}_{n+k} + \cdots$$
$$A_{\frac{n}{2}} = \bar{a}_{\frac{n}{2}} + \bar{a}_{\frac{3n}{2}} + \bar{a}_{\frac{5n}{2}} + \cdots; \quad B_k = \bar{b}_k - \bar{b}_{n-k} + \bar{b}_{n+k} - \cdots,$$

geschrieben haben. Setzen wir weiter

$$(9) \qquad \begin{aligned} \Delta a_0 &= \frac{1}{n} \Sigma \Delta_i, & \Delta a_k &= \frac{2}{n} \Sigma \Delta_i \cos kiz, \\ \Delta a_{\frac{n}{2}} &= \frac{1}{n} \Sigma (-1)^i \Delta_i, & \Delta b_k &= \frac{2}{n} \Sigma \Delta_i \sin kiz, \end{aligned}$$

so hat man, wie leicht zu sehen, für jeden Index i,

$$(10) \qquad A_i = a_i + \Delta a_i, \quad B_i = b_i + \Delta b_i,$$

so dass a_i und b_i sich folglich auf A_i und B_i reduciren, wenn sämmtliche Beobachtungsfehler verschwinden.

Aus (7) und (8) können wir nun, mit Hülfe der Gleichungen (9) und (10), zwischen den übrig bleibenden Fehlern und den Beobachtungsfehlern die Relation

$$\Sigma \delta_i^2 = \Sigma \Delta_i^2 - \frac{n}{2}\left\{2\,\Delta a_0^2 + \sum_1^{\mu}(\Delta a_i^2 + \Delta b_i^2)\right\}$$

$$(11) \qquad - n\left\{2\,A_{\frac{n}{2}}\,\Delta a_{\frac{n}{2}} + \sum_{\mu+1}^{\frac{n}{2}-1}(A_i\,\Delta a_i + B_i\,\Delta b_i)\right\}$$

$$+ \frac{n}{2}\left\{2\,A_{\frac{n}{2}}^2 + \sum_{\mu+1}^{\frac{n}{2}-1}(A_i^2 + B_i^2)\right\}$$

ableiten, deren Analogie mit der Relation (3) auf der Hand liegt, und welche die Grundlage der folgenden Untersuchung bildet. Für die linke Seite liefert unsere Analyse wieder einen bestimmten numerischen Werth (2); die rechte Seite enthält die unbekannten Beobachtungsfehler, sowie die gleichfalls unbekannten, aber festen Grössen A_i, B_i $(i < \mu)$.

4. Wir wollen jetzt die Relation (11) discutiren, indem wir wieder anfangs annehmen, dass die Präcision für sämmtliche Messungen dieselbe ist. Dem in der ersten Abtheilung eingeschlagenen Verfahren folgend, ersetzen wir erst die Summe der zwei ersten Glieder der rechten Seite durch ihren wahrscheinlichen Werth $(n—m)\,\varepsilon^2$. Diese Annahme hat natürlich hier genau dieselbe Berechtigung wie an der früheren Stelle, und der dabei zu befürchtende mittlere Fehler ist wie vorhin $\eta = \sqrt{2\,(n—m)}\cdot\varepsilon^2$.

Wir untersuchen jetzt den Einfluss der zwei letzten Glieder von (11), deren Summe wir der Kürze halber mit S bezeichnen wollen, und werden zeigen, dass, wenn $\frac{K}{\varepsilon}$ nicht zu klein ist,

$$K^2 = 2\,A_{\frac{n}{2}} + \sum_{\mu+1}^{\frac{n}{2}-1}(A_i^2 + B_i^2)$$

gesetzt, diese Summe sehr wahrscheinlich einen positiven Wert hat, und dass, welchen Werth K auch haben mag, der numerische Werth der Summe S, wenn sie negativ ausfällt, wahrscheinlich kleiner ist im Vergleich mit dem bei der obigen Annahme zu befürchtende Fehler.

Das erste Glied von S ist eine lineare Function der Beobachtungsfehler und der wahrscheinliche Werth desselben folglich gleich Null; das zweite Glied ist eine wesentlich positive Constante. Wir können hieraus schliessen, dass S wahrscheinlicher positiv als negativ ausfällt. Um eine genauere Entscheidung zu treffen, berechnen wir die

wahrscheinlichen Werth η'^2 des Quadrates des ersten Gliedes, welcher sich, mit Rücksicht auf die S. 610 gemachte Bemerkung, sofort gleich

$$\eta'^2 = 2\,n\,K^2\,\varepsilon^2$$

ergibt.

Das zweite Glied der betrachteten Summe ist gleich $\frac{n}{2}K^2$, und das Verhältniss desselben zu η' wird folglich

$$\frac{n}{2}K^2 : \eta' = \frac{K}{2\,\varepsilon}\sqrt{\frac{n}{2}}.$$

Da nun, wie leicht zu zeigen ist, jede lineare Function von Beobachtungsfehlern hinsichtlich der Wahrscheinlichkeit ihrer Werthe das Gauss'sche Fehlergesetz befolgt, wenn dieses für die Fehler selbst gilt, was wir hier annehmen wollen, können wir aus dem obigen Verhältniss, mit Hülfe einer Tabelle[1]) über die Werthe des Integrals $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\,dt$, für jeden bestimmten Werth von $\frac{K}{\varepsilon}$ sofort die Wahrscheinlichkeit davon berechnen, dass das erste Glied von S $< -\frac{n}{2}K^2$ und somit S selbst negativ ausfällt. Diese Wahrscheinlichkeit nimmt sehr rasch ab, wenn die Werthe von n und $\frac{K}{\varepsilon}$ wachsen. Wenn $n = 48$ (die Zahl der gemessenen Ordinaten in der Mehrzahl von Pipping's Messungen), ist sie z. B.

für $\frac{K}{\varepsilon} =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{2}$	2
gleich	0,11	0,033	0,0072	0,00012	0,0000005.

Die Richtigkeit des ersten Theiles unserer oben ausgesprochenen Behauptung ist also erwiesen. Um den zweiten Theil derselben zu beweisen, suchen wir die Wahrscheinlichkeit, dass $S < -\nu\eta$ ausfällt. Dieselbe hängt natürlich von dem Werth des Quotienten $\frac{K}{\varepsilon}$ ab, hat aber, wenn $\frac{K}{\varepsilon}$ alle möglichen positiven Werthe durchläuft, ein leicht anzugebendes Maximum, das bei wachsendem ν sehr rasch abnimmt. In unserem Beispiele erhält man z. B., wenn man $\mu = 6$ setzt und der Grösse ν der Reihe nach die Werthe

1) Eine solche findet man z. B. am Schlusse des Lehrbuches von Bertrand. Das Argument, womit man einzugehen hat, ist gleich dem obigen Verhältniss durch $\sqrt{2}$ dividirt.

$$\nu = \tfrac{1}{4} \quad \tfrac{1}{2} \quad 1 \quad \tfrac{3}{2} \quad 2$$

ertheilt, für die betreffende Wahrscheinlichkeit die Maximalwerthe

0,07 0,02 0,002 0,0002 0,00002,

die für

$$\frac{K}{\varepsilon} = 0{,}30 \quad 0{,}42 \quad 0{,}59 \quad 0{,}72 \quad 0{,}84$$

erreicht werden. Wenn $K > \varepsilon$ ist, findet sich für die Wahrscheinlichkeit, dass $S < -\frac{1}{4}\eta$ ausfällt, schon eine kleinere Zahl als 0,004.

Wir schlagen jetzt noch eine zweite Darstellungsweise ein, indem wir, dem Gauss'schen Principe genau folgend, die Summe S_1 aller derjenigen Glieder der rechten Seite von (11), die von den Beobachtungsfehlern abhängen, mit ihrem wahrscheinlichen Werth, der gleich $(n-m)\,\varepsilon^2$ ist, identificiren und die hierbei zu befürchtenden mittleren Fehler η'' berechnen. Die Rechnung ergibt sofort

$$\eta''^2 = W\,[(S_1 - (n-m)\,\varepsilon^2)^2] = 2\,(n-m)\,\varepsilon^4 + 2\,n\,K^2\,\varepsilon^2 = \eta^2 + \eta'^2.$$

Wir fragen hier nach der Wahrscheinlichkeit, dass die rechte Seite von (11) kleiner als $(n-m)\,\varepsilon^2$, d. h. $S_1 - (n-m)\,\varepsilon^2$ kleiner als $-\frac{n}{2}K$ ausfällt, und betrachten zu diesem Zwecke, in Analogie mit der vorigen Darstellung, das Verhältniss $\frac{n}{2}\,K^2 : \eta''$. Dasselbe wächst sehr rasch bei $\frac{K}{\varepsilon}$, und wir können hieraus schliessen, dass die betrachtete Wahrscheinlichkeit mit wachsendem $\frac{K}{\varepsilon}$ rasch abnimmt.

In unserem Beispiel würde sich, unter der Voraussetzung, dass die Grösse $S_1 - (n-m)\,\varepsilon^2$ dem Gauss'schen Fehlergesetze Folge leistet, die betreffende Wahrscheinlichkeit für

$$\frac{K}{\varepsilon} = \tfrac{3}{4} \quad 1 \quad \tfrac{3}{2} \quad 2$$

gleich 0,1 0,03 0,0007 0,000003

ergeben. Die genannte Voraussetzung ist allerdings nicht streng erfüllt, und die ermittelten Zahlen können folglich nicht genau sein. Sie geben uns jedoch, wie wir uns anderweitig überzeugt haben, eine richtige Vorstellung von der Grössenordnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit.

Wenn man ferner nach der Wahrscheinlichkeit davon fragt, dass das rechte Membrum von (11) um eine gegebene Quantität kleiner ausfällt als $(n-m)\,\varepsilon^2$, stellt es sich heraus, dass dieselbe

ringer ist als die Wahrscheinlichkeit, dass dasselbe Ergebniss für das rechte Membrum der Formel (3) stattfindet. Diese Thatsache, die für unseren Zweck allein schon genügend ist, habe ich in der S. 597 citirten Abhandlung mit aller Strenge bewiesen.

Wir fassen das Ergebniss unserer Untersuchung mit folgenden Worten zusammen:

Wenn von den Eigenschaften einer gemessenen periodischen Curve a priori nichts bekannt ist, dürfen wir den Ausdruck $\frac{\Sigma \delta_i^2}{n-m}$ als eine obere Grenze für das Quadrat des mittleren Messungsfehlers annehmen und also

$$\varepsilon^2 \leq \frac{\Sigma \delta_i^2}{n-m} \tag{12}$$

setzen; und zwar verdient dieses Resultat jedenfalls dasselbe Vertrauen wie die bei der classischen Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate allgemein angewandte Formel (4).

5. Um einfache Rechnungen und genaue Resultate zu erzielen, haben wir in unserer Darstellung bis jetzt fortwährend angenommen, dass die Präcision für sämmtliche Messungen denselben Werth hat. Diese Annahme kann in der Praxis selbstverständlich nicht erfüllt sein, da die Präcision, wie auch Hermann richtig bemerkt, z. B. mit der Steilheit der Curve variiren muss. Es lässt sich aber leicht zeigen, dass das obige Resultat auch im Falle verschiedener Präcisionen eine Gültigkeit behält, wenn wir unter ε^2 das arithmetische Mittel der Quadrate der bei den einzelnen Messungen zu erwartenden mittleren Fehler verstehen.

In der That, wenn $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots \varepsilon_{n-1}$ diese mittleren Fehler bezeichnen, findet sich, nach einer einfachen Rechnung:

$$W\left[\Sigma \Delta_i^2 - \frac{n}{2}\left\{2\,\Delta a_0^2 + \sum_1^{\mu}(\Delta a_i^2 + \Delta b_i^2)\right\}\right] = (n-m)\left(\frac{\Sigma \varepsilon_i^2}{n}\right),$$

und wenn wir daher

$$\varepsilon^2 = \frac{\varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2 + \cdots + \varepsilon_{n-1}^2}{n}$$

setzen und auf die Relation (11) das Gauss'sche Princip anwenden, gelangen wir gerade zu der Ungleichung (12).

Die Grössen η, η', η'', die uns über den Grad von Zuverlässigkeit der verschiedenen oben gemachten Annahmen unterrichten sollten, hängen natürlich von den ε_i ab. Eine genauere Untersuchung zeigt, dass, wenn ε' den kleinsten und ε'' den grössten der Fehler ε_i bezeichnen, η und η' die Ungleichungen

$$\sqrt{2\,(m-n)}\cdot\varepsilon'^2 < \eta < \sqrt{2\,(m-n)}\cdot\varepsilon''^2,$$
$$\sqrt{2\,n}\cdot K\,\varepsilon' < \eta' < \sqrt{2\,n}\cdot K\,\varepsilon''$$

befriedigen; weiter, dass η im Allgemeinen grösser sein wird als $\sqrt{2\,(n-m)}\cdot\varepsilon^2$, während η' grösser oder kleiner als $\sqrt{2\,n}\cdot K\varepsilon$ ausfallen kann. Wir dürfen jedoch sicher annehmen, dass η und η' von den angegebenen Werthen nicht bedeutend abweichen, und als Stütze dieser Behauptung können wir uns auf die grosse Zahl der Messungen sowie auf die im Allgemeinen ziemlich unregelmässige Vertheilung der ε_i hinsichtlich der Grösse berufen.

Wir sehen also, dass, auch was die Zuverlässigkeit des ermittelten Resultates betrifft, die Schlüsse der vorigen Abtheilung durch die Annahme verschiedener Präcisionen nicht wesentlich beeinträchtigt werden können.

6. Es fragt sich natürlich jetzt, welchen praktischen Nutzen das aufgestellte Resultat uns gewährt. Analysiren wir eine ganz beliebige Curve und lassen wir mehrere von den letzten berechneten Constanten weg (die Anzahl $n-m$ der weggelassenen Constanten darf nicht zu klein sein, damit unsere Schlüsse gültig bleiben), so erhalten wir natürlich im Allgemeinen einen so grossen Werth von $\Sigma\delta_i^2$, dass die ermittelte obere Grenze (12) ganz selbstverständlich wird und von der Genauigkeit der Messungen praktisch gar nichts aussagt. Für diesen allgemeinen Fall, der wohl auch Bessel vorgeschwebt hat, ist also seine von Hermann citirte Behauptung ganz richtig, widerspricht aber in keiner Weise unserem Resultate.

Ganz anders liegt die Sache, wenn sich bei der Rechnung eine so gute Convergenz herausstellt, wie sie Pipping's Curvenanalysen fast durchgehends aufweisen. Bei der S. 602 citirten Analyse findet man z. B., wenn man $\mu = 6$ setzt, aus (12) für ε die obere Grenze 0,8, woraus sich für den wahrscheinlichen Fehler r der einzelnen Messungen die obere Grenze 0,54 ableiten lässt, was ja denselben wirklich einen significativen Genauigkeitsgrad zuertheilt. Es kann aber sein, dass die Messungen noch genauer sind, obgleich wir nicht im Stande sind, dies nachzuweisen, und auch in diesem Sinne behält Bessel's Ausspruch seine Gültigkeit.

Hermann's mehrmals wiederholte Behauptung, man könne nach unserer Schlussweise ε dadurch beliebig verkleinern, dass man mehr Amplituden berechnet, ist offenbar falsch. Da in dem Ausdrucke für die obere Grenze von ε die Zahl $n-m$ sich im Nenner findet, braucht diese Grenze ja bei wachsendem m gar nicht abzunehmen und pflegt in der That nur sehr geringen Schwankungen unterworfen zu sein, wenn der letzte, zweifellos significative Theilton berechnet worden ist[1]). Wie schon mehrmals betont worden, darf auch, damit die Grenze (12) zuverlässig bleibt, die Zahl $n-m$ nicht zu klein gewählt werden. Aber selbst wenn man bis an die Grenze $n-m=0$ gehen wollte, wo sonst alle Schlüsse der Wahrscheinlichkeitsrechnung aufhören, wäre hieraus dennoch kein Argument zu Gunsten der Hermann'schen Behauptung zu gewinnen, denn die ermittelte obere Grenze für ε^2 geht dann in den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ über, und von einem „wahren Werthe" desselben zu sprechen zu wollen, wäre der reine Unsinn.

Die Grundlosigkeit dieses Hermann'schen Einwandes ist übrigens schon vor sieben Jahren von Pipping in seiner Arbeit „Ueber die Theorie der Vocale" (S. 19—20) mit aller Klarheit und Strenge nachgewiesen worden.

7. In unserem letzten Aufsatze haben wir noch eine zweite strengere Methode zur Beurtheilung der Genauigkeit der Messungen

1) Um dem Leser Gelegenheit zu geben, sich über diese Frage ein selbstständiges Urtheil zu bilden, werde ich hier die Werthe von ε_i (= der Werth von ε nach Berechnung von i Theiltönen) mittheilen, die Dr. Pipping bei einigen seiner Vocalanalysen gefunden hat. Die erste Zahlenreihe bezieht sich auf die S. 601 besprochene Analyse, die übrigen auf einige Curven, welche in Pipping's Arbeit „Zur Phonetik der finnischen Sprache" besprochen werden. Siehe Mémoires de la Société Finno-Ougriennet. XIV, S. 125 Welle 86; S. 124 Welle 56; S. 126 Welle 20; S. 114 Welle 51; S. 115 Welle 14; S. 124 Welle 71. Die Einheit der angegebenen Zahlen ist ein Zehntel von der Einheit der Ordinaten, also = 0,00001 mm.

ε_5	ε_6	ε_7	ε_8	ε_9	ε_{10}	ε_{11}	ε_{12}	ε_{13}	ε_{14}	ε_{15}	ε_{16}	ε_{17}	ε_{18}	ε_{19}	ε_{20}	ε_{21}	ε_{22}	ε_{23}
13	8	7	7	7	8	7	7	8	8	8	8	8	9	10	10	12	13	22
6	6	6	5	5	4	4	3	3	4	3	3	3	3	3	2	2	2	1
7	7	6	5	5	5	5	5	6	6	6	5	5	5	5	3	3	1	0
5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	5	5	5	5	6	3	4	4	3
9	9	8	8	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9	8	8	8	9	6
8	7	6	6	6	6	6	6	6	6	5	6	4	4	4	5	5	6	1
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	4	3	4	3	4

angedeutet, auf die wir jetzt, da Hermann uns nicht richtig ver-
standen hat, etwas ausführlicher eingehen müssen. Wir wollen ers
auf eine interessante Thatsache hinweisen, auf welche wir uns scho
früher gestützt haben, deren Beweis wir aber hier nicht gebe
können. Die n Amplitudenfehler Δa_i, Δb_i, (9), sind, wie leich
zu sehen, unabhängige lineare Functionen der n Beobachtungsfehle
Nun zeigt es sich, wenn die Präcision für alle Ordinatenmessunge
wieder gleich gross ($= k$) angenommen wird, dass diese Amplituden
fehler hinsichtlich der Wahrscheinlichkeit ihrer Werthe als vo
einander unabhängig angesehen werden dürfen. Für jede diese
Grössen ist die Wahrscheinlichkeit, dass ihr Werth zwischen x un
$x + dx$ fällt, dem Ausdruck $e^{-\frac{nk^2}{2}x^2}\,dx$ proportional, ganz wie für de
Beobachtungsfehler einer Messung mit der Präcision $k\sqrt{\frac{n}{2}}$ (nur f
Δa_0 und $\Delta a_{\frac{n}{2}}$ ist die Präcison gleich $k\sqrt{n}$ zu setzen).

Wir bemerken nun, dass in der S. 602 angeführten Analyse d
Werthe der 35 Constanten $a_7, \ldots, a_{23}, a_{24}\sqrt{2}, b_7, \ldots, b$
sämmtlich zwischen den Grenzen $+0{,}5$ und $-0{,}5$ liegen, u
werfen die Frage auf, was hieraus hinsichtlich der Grösse des wah
scheinlichen Messungsfehlers r geschlossen werden kann. Von diese
Fehler ist allerdings a priori nichts bekannt, es lässt sich aber
Wahrscheinlichkeit eines für ihn hypothetisch angesetzten Werth
danach beurtheilen, ob er das factische Resultat der Constante
berechnung als wahrscheinlich erscheinen lässt oder nicht. Es
dies die bekannte, auch von Gauss angewandte Methode, die Wa
scheinlichkeit einer Hypothese abzuschätzen [1]).

In dem letzten Aufsatze wurde nun $r = 2{,}5$ angesetzt, wor
für den wahrscheinlichen Amplitudenfehler der Werth $r\sqrt{\frac{2}{n}}$
etwa 0,5 sich ergibt. Wir haben $\Delta a_k = A_k - a_k$, $\Delta b_k = B_k -$
wo die Grössen A_k, B_k bestimmte, allerdings unbekannte Wer
haben. Damit a_k numerisch kleiner ausfällt als 0,5, muss also
zwischen die Grenzen $A_k + 0{,}5$ und $A_k - 0{,}5$ fallen. Die W
scheinlichkeit hiervon ist aber, nach dem Gauss'schen Fehlergese
kleiner als die Wahrscheinlichkeit, dass Δa_k zwischen $+0{,}5$

1) Theoria motus corporum coelestium; Art. 176.

$-0{,}5$ fällt, d. h. kleiner als $\frac{1}{2}$. In derselben Weise ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass b_k zwischen $+0{,}5$ und $-0{,}5$, d. h. Δb_k zwischen $B_k + 0{,}5$ und $B_k - 0{,}5$ fällt, kleiner als $\frac{1}{2}$. Da nun, wie oben gesagt, die Amplitudenfehler Δa_k, Δb_k hinsichtlich der Wahrscheinlichkeit als von einander unabhängig angesehen werden dürfen, ziehen wir hieraus sofort das Resultat, dass die Wahrscheinlichkeit des betreffenden Falles, wenn $r \geqq 2{,}5$, kleiner ist als $\frac{1}{2^{35}}$, und schliessen folglich, dass r zweifellos kleiner ist als 2,5. Man sieht, dass Hermann's Einwände (S. 94) gegen unsere Schlussweise vollkommen unberechtigt sind.

Die Annahme $r = 2{,}5$ ist allerdings sehr schroff; sie wurde gewählt, nur um ein einfaches Resultat zu erzielen, da der Sachkundige leicht sehen muss, dass unsere Beweisführung auch für viel kleinere Werthe von r gültig bleibt. Es ist z. B. für $r = 1$ der wahrscheinliche Amplitudenfehler etwa 0,2, und es lässt sich folglich unter dieser Voraussetzung a priori erwarten, dass nur ungefähr die Hälfte der betrachteten Amplitudenfehler und folglich (weil die grössen A_k, B_k vermuthlich nicht alle genau gleich Null sind) sogar weniger als die Hälfte der entsprechenden Amplituden zwischen $+0{,}2$ und $-0{,}2$ fallen würde. Factisch liegen aber unter den betreffenden 35 Constanten nicht weniger als 28 zwischen den genannten Grenzen. Wir schliessen hieraus, dass r sehr wahrscheinlich kleiner ist als 1. Aus der Summe der Fehlerquadrate lässt sich, wie schon gesagt, für den wahrscheinlichen Fehler der Messungen die obere Grenze 0,54 ableiten.

8. Ich habe oben durch strenge Anwendung der Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Berechtigung der Hensen-Pipping'schen Fehlerrechnung zu beweisen versucht und insbesondere nachgewiesen, dass die obere Grenze, die Pipping für den Genauigkeitsgrad seiner Messungen angibt, etwa dasselbe Vertrauen verdient wie die in der Methode der kleinsten Quadrate gebräuchige Formel. Wie nahe die eine wie die andere Schätzung in dem einzelnen Falle der Wahrheit kommt, bleibt natürlich dahingestellt, und das Vertrauen, das man denselben — wie überhaupt den aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung hergeleiteten numerischen Resultaten — in der Praxis schenken will, hängt schliesslich so zu

sagen von dem Temperament des Einzelnen ab. Die Hauptsache aber, um die es sich hier handelt, nämlich dass die ganz auffallend zahlreichen verschwindenden Amplituden, die Pipping's Analysen durchgehends aufweisen, auf die Genauigkeit seiner Messungen zurückgeführt werden müssen, kommt mir jedenfalls, von allen Beweisen und Theorien abgesehen, so ausserordentlich natürlich und einleuchtend vor, dass es mir völlig unverständlich bleibt, dass Jemand, der sich mit Fragen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung überhaupt beschäftigt hat, kategorisch behaupten kann, es dürfe kein solcher Rückschluss gemacht werden. Wenigstens sollte er dann wenn er consequent sein will, jede Besprechung von Probabilitäten von vorn herein ablehnen.

Hermann stützt seine Ansicht u. A. darauf, dass, weil von der Natur der Curve a priori nichts bekannt ist, alle Werthe ihrer Constanten gleiche Wahrscheinlichkeit haben. Dies ist allerdings wahr, bevor die Messungen gemacht worden sind. Nachher aber — wenn das Resultat derselben vorliegt und wenn dieses Resultat die öfters betonte Eigenthümlickkeit aufzuweisen hat — liegt die Sache ganz anders, und wenn man nicht den Zufall eine Rolle will spielen lassen, die man ihm vernünftiger Weise nicht zuertheilen darf, wird man gezwungen, den Rückschluss auf die Genauigkeit der Messungen und die Kleinheit der wahren Werthe der vernachlässigten Constanten zu ziehen. Eine solche Schlussweise hat auch nichts Neues, und es würde nicht schwer sein, dieselbe durch Beispiele aus der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Autorität illustrer Namen zu stützen.

Hermann behauptet weiter ganz kategorisch, es lasse sich die genannte Schlussweise ohne Weiteres auf diejenige Genauigkeit übertragen, womit der Apparat, dessen Pipping sich bedient, die Schaubewegung wiedergegeben hat, und es scheint dies fast der wichtigste Grund zu sein, warum er sich weigert, unsere Schlüsse als berechtigt anzuerkennen. Gegen eine derartige Uebertragung erhebt sich jedoch ein wichtiger Einwand. Man kann sich ja eine Art Fehler des Apparates denken, z. B. eine gewisse „Schlottrigkeit" desselben, deren Wirkung innerhalb einer Curvenwelle, d. h. während einer Schwingungsdauer, unregelmässige Variationen aufzuweisen hätte und somit mit der Wirkung der Beobachtungsfehler vergleichbar wäre. Für solche Fehler, deren Existenz aber ziemlich unwahrscheinlich ist, wäre allerdings unsere frühere Schlussweise anwendbar und

würde uns zu der Behauptung führen, dass derartige Fehler bei Pipping's Apparat nicht vorhanden oder jedenfalls sehr klein sind. Es gibt aber Fehler des Apparates, z. B. die durch seinen Eigenton bewirkte Verstärkung der nächstliegenden Theiltöne, die auf die höheren Theiltöne gar keinen Einfluss zu haben brauchen, und von denen die Fehlerrechnung uns folglich Nichts zu belehren vermag. Ein häufiger und sogar bei jedem Sprachzeichner in höherem oder geringerem Maasse wirklich vorhandener Fehler ist ferner die Schwierigkeit, mit der hohe Theiltöne registrirt werden, also ein Fehler, der bei der aufgezeichneten Curve die Abnahme der Amplituden d. h. die Convergenz befördert. Während man, wo es sich einfach um die Ausmessung einer vorgelegten Curve handelt und dann den Schluss auf die Genauigkeit der Messungen nicht ziehen will, darauf hingewiesen ist, den Zufall als den einzigen Factor zu bezeichnen, der die eigenthümliche Anhäufung von kleinen Amplituden bewirkt hätte, können wir also dagegen, wo es sich um die Uebereinstimmung der Curve mit der wirklich stattgefundenen Schallbewegung handelt, eine physikalische Ursache angeben, die ein ähnliches Resultat begünstigt.

Unsere Schlussweise lässt sich also keineswegs ohne Weiteres auf die Genauigkeit des Schreibapparates übertragen.

Der Unterschied zwischen Hermann's und meinem Standpunkt dürfte hiermit deutlich charakterisirt sein, und ich glaube jetzt die Entscheidung der Streitfrage dem Urtheil des Sachkundigen überlassen zu können.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1887. N:o 5.
Stockholm.

Om några definita integraler.

Af C. F. Lindman.

[Meddeladt den 11 Maj 1887.]

Bland de manga, mer eller mindre användbara, metoder och ıler, som blifvit uppgifna för definita integralers bestämde, finnes ock den s. k. Bertrand'ska formeln[1]), hvilken Prof. Bierens de Haan framställes i hans Exposé pag. 30 af honom tillämpas på ett par exempel pag. 463 och följ. i ma arbete. Den ene af de framställda integralerne bestämfullständigt, men icke den andre. Båda eller rättare ett allmännare formler, som innefatta dem, äro dock för länge n gifna af mig[2]) samt uttryckta genom en i samma aflling behandlad transcendent. De omnämda exemplen kunna behandlas annorlunda, såsom här nedan skall visas.

Det första exemplet är

$$I = \int_0^p \frac{l(1 + px)}{1 + x^2} dx.$$

Om man här differentierar i afseende på p, erhålles

---

[1]) Enligt Bierens de Haans uppgift har denna formel först blifvit gifven af Bertrand i Tom. 8 pag. 110 af Liouville's Journal, till hvilken jag hvarken haft eller har tillgång. Formeln förekommer ock i Grunerts Archiv Tom. 4 pag. 113.

[2]) Nova Acta Reg. Soc. Scient. Upsaliensis, Ser. III:æ, Vol. 1 X, Fasc. I, 1874. Afhandlingens titel är: D'une fonction transcendente.

$$\frac{dI}{dp} = \int_0^p \frac{x\,dx}{(1+px)(1+x^2)} + \frac{l(1+p^2)}{1+p^2}.$$

Emedan man har

$$\frac{x}{(1+px)(1+x^2)} = \frac{1}{1+p^2}\left(\frac{p+x}{1+x^2} - \frac{p}{1+px}\right),$$

befinnes

$$\int_0^p \frac{x\,dx}{(1+px)(1+x^2)} = \frac{1}{1+p^2}[p \operatorname{Arc\,tg} p - \tfrac{1}{2}l(1+p^2$$

$$\frac{dI}{dp} = \frac{1}{1+p^2}[p \operatorname{Arc\,tg} p + \tfrac{1}{2}l(1+p^2$$

Genom integration fås häraf

$$I = C + \int \frac{p \operatorname{Arc\,tg} p}{1+p^2}dp + \frac{1}{2}\int \frac{l(1+p^2)}{1+p^2}dp.$$

Nu är genom delvis-integration

$$\int \frac{p \operatorname{Arc\,tg} p}{1+p^2}dp = \tfrac{1}{2}l(1+p^2)\operatorname{Arc\,tg} p - \frac{1}{2}\int \frac{l(1+p^2)}{1+p^2}$$

Då detta införes i värdet på I och emedan, såsom C är $= 0$, befinnes

$$I = \int_0^p \frac{l(1+px)}{1+x^2}dx = \tfrac{1}{2}l(1+p^2)\,.\operatorname{Arc\,tg} p.$$

Det andra exemplet är

$$I_1 = \int_0^p \frac{l(1-px)}{1+x^2}dx \quad (p<1).$$

Om man äfven här differentierar i afseende på p,

$$\frac{dI_1}{dp} = -\int_0^p \frac{x\,dx}{(1-px)(1+x^2)} + \frac{l(1-p^2)}{1+p^2}$$

emedan man har

$$\frac{x}{(1-px)(1+x^2)} = \frac{1}{1+p^2}\left(\frac{p}{1-px} - \frac{p-x}{1+x^2}\right),$$

$$\frac{dI_1}{dp} = \frac{1}{1+p^2}\left[\int_0^p \frac{p-x}{1+x^2}dx - p\int_0^p \frac{dx}{1-px} + l(1-p^2)\right]$$

$$= \frac{1}{1+p^2}[p \operatorname{Arc\,tg} p - \tfrac{1}{2}l(1+p^2) + 2l(1-p^2)].$$

ienom integration fås häraf

$$C + \int \frac{p \operatorname{Arc\,tg} p}{1+p^2}dp - \frac{1}{2}\int \frac{l(1+p^2)}{1+p^2}dp + 2\int \frac{l(1-p^2)}{1+p^2}dp$$

$$C + \tfrac{1}{2}l(1+p^2) \cdot \operatorname{Arc\,tg} p - \int \frac{l(1+p^2)}{1+p^2}dp + 2\int \frac{l(1-p^2)}{1+p^2}dp$$

en vid det förra exemplet erhållen formel.

medan alla dessa termer äfvensom I_1 sjelf äro $= 0$ för så är ock $C = 0$ och man kan skrifva

$$= \int_0^p \frac{l(1-px)}{1+x^2}dx = \tfrac{1}{2}l(1+p^2) \cdot \operatorname{Arc\,tg} p - \int_0^p \frac{l(1+x^2)}{1+x^2}dx$$

$$+ 2\int_0^p \frac{l(1-x^2)}{1+x^2}dx,$$

om en definit integral beror af gränserna, men ej af den , med hvilken den variabla är betecknad. Emedan inte- i på högra sidan tyckas hafva varit obekanta för B. D. H., n sammanfört dem med integralen på venstra sidan och funnit

$$\frac{(1-px)(1+x^2)}{(1-x^2)^2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \tfrac{1}{2}l(1+p^2) \cdot \operatorname{Arc\,tg} p.$$

Tydligen kan I_1 fås, om man lyckas bestämma

$$I_2 = \int_0^p \frac{l(1+x^2)}{1+x^2} dx \text{ och } I_3 = \int_0^p \frac{l(1-x^2)}{1+x^2} dx ,$$

och detta kan ske genom några formler i förut anförda af
ling. Om man i I_2 gör $x = \operatorname{tg}\varphi$ och sätter $\operatorname{Arc tg} p = \alpha$,

$$I_2 = \int_0^\alpha l(1+\operatorname{tg}^2\varphi) d\varphi = -2\int_0^\alpha l \operatorname{Cos}\varphi d\varphi .$$

Gör man här $\varphi = \frac{4\alpha y}{\pi}$, så befinnes

$$I_2 = -\frac{8\alpha}{\pi}\int_0^{\frac{1}{4}} l \operatorname{Cos}\frac{4\alpha y}{\pi} dy ,$$

som enligt form. (24) i förut anförda afhandling ger

$$I_2 = -2\alpha l \operatorname{Cos}\alpha - \frac{8\alpha^2}{\pi^2}\left[L\left(\frac{4\alpha}{\pi}\right) - H\left(\frac{4\alpha}{\pi}\right)\right];$$

men enligt form. (28) är

$$\frac{4\alpha^2}{\pi^2}\left[L\left(\frac{4\alpha}{\pi}\right) - H\left(\frac{4\alpha}{\pi}\right)\right] = \frac{\pi}{2} l(2\operatorname{Cos}\alpha) - \left(1+\frac{2\alpha}{\pi}\right)^2 H\left(1+$$

alltså

$$I_2 = \int_0^p \frac{l(1+x^2)}{1+x^2} dx$$

$$= -\pi l 2 - (\pi + 2\alpha) l \operatorname{Cos}\alpha + 2\left(1+\frac{2\alpha}{\pi}\right)^2 H\left(1+$$

På lika sätt finner man

$$I_3 = \int_0^\alpha l(1-\operatorname{tg}^2\varphi) d\varphi = \int_0^\alpha l \operatorname{Cos} 2\varphi d\varphi - 2\int_0^\alpha l \operatorname{Cos}\varphi$$

Den senare är just I_2; i den förra gör man $\varphi =$
finner då

$$\int_0^a l \operatorname{Cos} 2\varphi\, d\varphi = \frac{4\alpha}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} l \operatorname{Cos}\frac{8\alpha y}{\pi} dy$$

$$= \alpha l \operatorname{Cos} 2\alpha + \frac{8\alpha^2}{\pi^2}\left[L\left(\frac{8\alpha}{\pi}\right) - H\left(\frac{8\alpha}{\pi}\right)\right]$$

t form. (24). Enligt form. (28) är

$$\left[L\left(\frac{8\alpha}{\pi}\right) - H\left(\frac{8\alpha}{\pi}\right)\right] = \frac{\pi}{2} l(2 \operatorname{Cos} 2\alpha) - \left(1 + \frac{4\alpha}{\pi}\right)^2 H\left(1 + \frac{4\alpha}{\pi}\right)$$

alltså

$$\operatorname{s} 2\varphi d\varphi = \frac{\pi}{4} l 2 + \frac{1}{4}(\pi + 4\alpha) l \operatorname{Cos} 2\alpha - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4\alpha}{\pi}\right)^2 H\left(1 + \frac{4\alpha}{\pi}\right).$$

Om I_2 härtill adderas, erhålles

$$_3 = \int_0^p \frac{l(1 - x^2)}{1 + x^2} dx$$

$$= -\frac{3\pi}{4} l 2 - (\pi + 2\alpha) l \operatorname{Cos}\alpha + \tfrac{1}{4}(\pi + 4\alpha) l \operatorname{Cos} 2\alpha$$

$$- \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4\alpha}{\pi}\right)^2 H\left(1 + \frac{4\alpha}{\pi}\right) + 2\left(1 + \frac{2\alpha}{\pi}\right)^2 H\left(1 + \frac{2\alpha}{\pi}\right).$$

nföras värdena på I_2 och I_3 i värdet på I_1, så fås efter reduktioner

$$= \int_0^p \frac{l(1 - px)}{1 + x^2} dx$$

$$= -\frac{\pi}{2} l 2 - (\pi + 3\alpha) l \operatorname{Cos}\alpha + \tfrac{1}{2}(\pi + 4\alpha) l \operatorname{Cos} 2\alpha$$

$$- \left(1 + \frac{4\alpha}{\pi}\right)^2 H\left(1 + \frac{4\alpha}{\pi}\right) + 2\left(1 + \frac{2\alpha}{\pi}\right)^2 H\left(1 + \frac{2\alpha}{\pi}\right),$$

ck fås, om man i form. (70) gör $\beta = \alpha$.

e nu behandlade integralerne äro de enda exempel, som H. framställer. Vi hafva sett, att de kunna bestämmas, utt använda den BERTRAND'ska formeln, men deraf vågar e sluta, att denna formel är öfverflödig.

Omedelbart efter användningen af BERTRAND'ska form tillämpar B.D.H. några andra reduktionsformler på vissa integra af hvilka en sammanhänger med några här ofvan behandl men den andra är alldeles falsk. Den förre, som finnes på 465 i hans Exposé, är

$$I_4 = \int_0^p \text{Arc tg } x \cdot \frac{x dx}{1 - p^2 x^2} \quad (p < 1).$$

Genom delvis-integration finner man

$$I_4 = \frac{1}{2p^2}\left[-l(1-p^4) \cdot \text{Arc tg } p + \int_0^p \frac{l(1-p^2x^2)}{1+x^2} dx \right].$$

Emedan $l(1-p^2x^2) = l(1+px) + l(1-px)$, är ty I_4 beroende af de båda förut uträknade integralerna I o Om man äfven nu sätter $\text{Arc tg } p = \alpha$, befinnes

$$I_4 = \frac{1}{2}\cot^2\alpha\left[-\alpha l\frac{\text{Cos } 2\alpha}{\text{Cos}^4\alpha} + \int_0^p \frac{l(1+px)}{1+x^2} dx + \int_0^p \frac{l(1-px}{1+x^2}\right.$$

Då integralernas värden införas, finner man efter nå duktioner

$$I_4 = \int_0^p \text{Arc tg } x \cdot \frac{x dx}{1-p^2x^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\cot^2\alpha\left[-\frac{\pi}{2} l(2\,\text{Cos}^2\alpha) + \tfrac{1}{2}(\pi + 2\alpha) l\,\text{Cos } 2\alpha \right.$$

$$\left. -\left(1+\frac{4\alpha}{\pi}\right)^2 H\left(1+\frac{4\alpha}{\pi}\right) + 2\left(1+\frac{2\alpha}{\pi}\right)^2 H\left(1+\frac{2\alpha}{\pi}\right)\right.$$

Den senare, som finnes på sid. 466, är

$$I_5 = \int_0^p \text{Arc sin}\frac{x}{p} \cdot \frac{x dx}{1-x^2} \quad (p < 1).$$

Denne kan visserligen genast differentieras i afseen men detta blir mycket beqvämare, om man förut byte riabel och sätter $x = p \sin\varphi$. Då finner man

$$I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{p^2 \varphi \sin \varphi \cos \varphi}{1 - p^2 \sin^2 \varphi} d\varphi ,$$

enom delvis-integration ger

$$I_5 = -\frac{\pi}{4} l(1 - p^2) + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} l(1 - p^2 \sin^2 \varphi) d\varphi .$$

an behöfver således blott söka den siste integralen, som tecknas med I_6. Om man i eqv.

$$I_6 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} l(1 - p^2 \sin^2 \varphi) d\varphi \qquad (a)$$

ıtierar i afseende på p, fås

$$\frac{dI_6}{dp} = -p \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi}{1 - p^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{2p} - \frac{1}{p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1 - p^2 \sin^2 \varphi}$$

enom kända formler

$$\frac{dI_6}{dp} = \frac{\pi}{2p} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - p^2}} \right] .$$

nom integration fås häraf

$$= C + \frac{\pi}{2} lp + \frac{\pi}{2} l \frac{1 + \sqrt{1 - p^2}}{p} = C + \frac{\pi}{2} l(1 + \sqrt{1 - p^2}) .$$

n man här och i eqv. (a) gör $p = 0$, så befinnes $C =$ och följaktligen

$$I_6 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} l(1 - p^2 \sin^2 \varphi) d\varphi = \frac{\pi}{2} l \frac{1 + \sqrt{1 - p^2}}{2} .$$

detta införes, finner man

$$I_5 = -\frac{\pi}{4} l(1 - p^2) + \frac{\pi}{2} l \frac{1 + \sqrt{1 - p^2}}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2} l \frac{1 + \sqrt{1 - p^2}}{2\sqrt{1 - p^2}} .$$

På det anförda stället finner B. D. H.

$$I_5 = -\frac{\pi}{4} l(1-p^2) + \tfrac{1}{2}(\operatorname{Arc\,Sin} p)^2,$$

hvilket enligt det föregående är falskt. Felet kommer d
att han fått $\frac{d}{dp} \operatorname{Arc\,sin}\left(\frac{x}{p}\right) = \frac{1}{\sqrt{p^2-x^2}}$ i st. f. $\frac{d}{dp} \operatorname{Arc\,sin}\left($

$$-\frac{x}{p\sqrt{p^2-x^2}}.$$

Über

grenzte Ableitungen mit komplexem Zeiger

von

P. Lindner,
Gymnasial-Oberlehrer.

Beilage zum Programm des Königlichen Gymnasiums zu Cöslin.

Cöslin 1890.
Gedruckt bei C. G. Hendess.

Programm-No. 125.

Über
ɔgrenzte Ableitungen mit komplexem Zeiger.

1.

In der Theorie der Ableitungen mit beliebigem Index kann man drei Entwicklungsstufen unter-
iden: Die erste, durch die Namen Leibnitz, Bernoulli, Euler, Laplace und Fourier bezeich-
Stufe legt ihren Entwickeluugen noch keine Definition zu Grunde, sondern sucht gelegentlich
h Analogie die Werte einzelner Ableitungen mit gebrochenem Index zu ermitteln. Die zweite
ɔ wird hauptsächlich durch Liouville[1]) vertreten: er stellt zwar eine bestimmte Definition
ie Spitze seiner Betrachtungen, aber er sucht unbestimmte Ableitungen mit beliebigem Index
. Funktionen, welche für negativ ganzzahligen Index übergehen in das mehrfache unbestimmte
ɔral mit seinen willkürlichen Konstanten. Auf demselben Standpunkt stehen Oettinger[2]), Kel-
[3]) und überhaupt die englischen Mathematiker, soweit ihr Kalkul ein nicht bloss symbolischer
Den Uebergang zur dritten Entwickelungsstufe bildet eine Jugendarbeit Riemann's.[4]) Er ge-
; auf einem freilich nicht einwurfsfreien Wege zu einer Definition der begrenzten Ableitungen,
er beschränkt dann doch seine Betrachtungen auf unbestimmte Ableitungen. Unabhängig
ihm und unter einander sind dann zu derselben Definition der „begrenzten Derivationen" ge-
; die Herren Grünwald[5]) und Letnikoff.[6]) Ihre Arbeiten, denen sich eine Abhandlung des

---

[1]) Journal de l'école polytechnique, cah. XXI:
Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique, et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre
ıestions.
Mémoire sur le calcul des différentielles à indices quelquonques.

[2]) Crelle's Journal, Bd. 44: Zweiter Nachtrag zu der Theorie der analytischen Facultäten.

[3]) Transactions of the Royal Society of Edindurgh XIV, XVI:
On general differentiation.

[4]) Riemann's Werke. Nachlass. Abschnitt XIX: Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und
entiation.

[5]) Zeitschrift für Mathematik und Physik XII: Ueber begrenzte Derivationen und deren Anwendung.
Abhandlungen der Königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. XI: Ueber die Entwickelung der be-
ɔen Derivationen nach positiven ganzen Potenzen des Index und die damit zusammenhängende Logial-Rechnung.

[6]) Die russischen Original-Abhandlungen sind für mich nicht zugänglich gewesen, sondern nur ihre Auszüge in den
ɔchritten der Mathematik." VI: Recherches relatives à la théorie des intégrales de la forme $\int_a^x (x-u)^{p-1} f(u)\,du$. —
Neue Untersuchungen über trigonometrische Functionen. — XVII: Ueber hypersphärische Functionen und über
ıtwickelung einer willkürlichen Function in Reihen, die nach hypersphärischen Functionen fortschreiten.

Herrn Most[1]) und eine Laurent'sche[2]) anschliessen, bezeichnen die dritte Entwickelungsstufe
Theorie der Bruchableitungen. Die Definitionen dieser Stufe verlieren jedoch ihren Sinn ganz o
teilweise, wenn die abzuleitende Funktion nicht in der Umgebung der unteren Grenze eindeutig

Schon vor längerer Zeit bin ich zu einer Definition der begrenzten Ableitungen gelangt,
von vornherein für beliebig komplexe Gebiete der unabhängig Variabeln und für beliebig komple
Zeiger auch in dem Falle Geltung behält, dass die abzuleitende Funktion nicht mehr in der U
gebung der unteren Grenze a eindeutig ist, sondern zu jener wichtigen Klasse von Funktio
gehört, die mit einer bestimmten, endlichen Potenz von x—a multipliziert, in der Umgebung
Punktes a eindeutig werden. Es sei mir im folgenden gestattet, einige Ergebnisse meiner Un
suchungen über diesen Gegenstand mitzuteilen:

Inbetreff der verwendeten Bezeichnungen sei von vornherein bemerkt:

x bedeutet eine beliebig komplexe, unabhängig variable Grösse, a, b, c, α, β
ϱ, σ beliebige endliche, komplexe Zahlen, die in Bezug auf x konstant sind. f(x),
bezeichnen Funktionen von x, die in der Umgebung von einem Punkte a einändrig
$f_\alpha(x) = (x-a)^\alpha f(x), \varphi_\beta(x) = (x-a)^\beta \varphi(x)$ sind vieldeutige Funktionen mit dem Verzweigungswe
und dem Verzweigungs-Exponenten α bezw. β; |a| bezeichnet den absoluten Betrag von a; r
p, k bezeichnen positive, ganze Zahlen. $a_n = \frac{a\,(a-1)\,(a-2)\,\ldots\,(a-n+1)}{1.2.\ldots.n}$ ist der Binomial-Koeffiz
$n! = 1.2.3.\ldots.n$, *II* und F sollen die Gauss'sche Bedeutung haben. $\left[\partial_x^\varrho f_\alpha(x)\right]_a^x$ nenn
eine „zwischen a und x genommene Ableitung"; ϱ soll ihr „Zeiger", a die „untere Grenze
die „obere Grenze", $f_\alpha(x)$ die „abzuleitende Funktion" heissen, während $\frac{d^n f_\alpha(x)}{dx^n}$ nur als
Differential-Quotient, nicht aber als „Ableitung" bezeichnet werden soll.

Ausgehend von der Ableitung einer Potenz stellte ich nun an die Grösse $\left[\partial_x^\varrho (x-a)^\alpha\right.$
gende Forderungen:

I. $\left[\partial_x^n (x-a)^\alpha\right]_a^x = \frac{d^n (x-a)^\alpha}{dx^n}$

II. $\left[\partial_x^{-n} (x-a)^\alpha\right]_a^x = \int_a^x \int_a^x \int_a^x \ldots (x-a)^\alpha \, dx\, dx\, dx \ldots$ (n mal)

III. $\left[\partial_x^\varrho \{(x-a)^\alpha + (x-a)^\beta + (x-a)^\gamma + \ldots\}\right]_a^x = \left[\partial_x^\varrho (x-a)^\alpha\right]_a^x + \left[\partial_x^\varrho (x-a)^\beta\right]_a^x + \left[\partial_x^\varrho (x-a)^\gamma\right]_a^x +$

IV. $\left[\partial_x^{\varrho+\sigma} (x-a)^\alpha\right]_a^x = \left[\partial_x^\varrho \{\partial_x^\sigma (x-a)^\alpha\}_a^x\right]_a^x$

V. $\left[\partial_x^\varrho (x-a)^\alpha\right]_a^x = \varphi(\alpha, \varrho)\,(x-a)^{\alpha-\varrho}$, wo $\varphi(\alpha, \varrho)$ eine von x unabhängige Funktion von
allein bezeichnet.

[1]) Zeitschrift für Mathematik und Physik: XVI: Ueber die Anwendung der Differential-Quotienten
gemeinem Index zum Integriren von Differentialgleichungen.

[2]) Nouvelles annales de mathématiques (3). III: Sur le calcul des dérivées à indices quelquonques.

$$\left[\partial_x^{\varrho}(x-a)^{\alpha}(x-a)^{\beta}\right]_a^x = (x-a)^{\beta}\left[\partial_x^{\varrho}(x-a)^{\alpha}\right]_a^x + \varrho_1 = \left[\partial_x^{1}(x-a)^{\beta}\right]_a^x \left[\partial_x^{\varrho-1}(x-a)^{\alpha}\right]_a^x + \ldots\ldots$$

Diese Forderungen führten zu Funktional-Gleichungen für $\varphi(\alpha, \varrho)$, als deren Lösung — abehen vom Faktor $c^{2m\pi i\varrho}$ —

$$\varepsilon, \varrho) = \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)}$$ sich ergab, so dass

$$(x-a)^{\alpha}\Big]_a^x = \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)}(x-a)^{\alpha-\varrho}$$ folgte.

Nunmehr wurde ich durch die Entwickelung von der Funktion $f(x)$ nach dem Taylorschen ırsatz und die Ersetzung der Differential-Quotienten durch geschlossene Integrale auf die folde Definition geleitet:

$$\left[\partial_x^{\varrho} f_{\alpha}(x)\right]_a^x = \left[\partial_x^{\varrho}(x-a)^{\alpha} f(x)\right]_a^x = \frac{\Pi(\alpha)(x-a)^{\alpha-\varrho}}{2\pi i\,\Pi(\alpha-\varrho)}\int_{(a)} \frac{f(z)}{z-a} F\left(\alpha+1, 1, \alpha+1-\varrho, \frac{x-a}{z-a}\right) dz -$$

Integral in positivem, einmaligem Umlauf auf einer die Punkte x und a umfassenden gelossenen Kurve innerhalb des Gebietes geführt, in dem die Funktionen $f(z)$ u. $F\left(\alpha+1, 1, \alpha+1-\varrho, \frac{x-a}{z-a}\right)$ eintig, endlich und stetig sind, die Funktion F selbstverständlich abgesehen vom Punkte z=a.

Die durch 1) definierte Ableitung hat in dem ganzen Gebiet, in dem $f(x)$ einändrig bleibt — und ; Gebiet will ich das „Ableitungsgebiet" nennen — Sinn für jedes komplexe ϱ und jedes nicht ativ ganzzahlige α; sie ist im allgemeinen endlich, da die Funktion unter dem Integralzeichen llen Punkten des geschlossenen Integrationsweges endlich bleibt. Nur für x=a wird die Abung unendlich, wenn der reelle Teil von $\alpha-\varrho$ negativ ist. Für jeden Wert von x wird sie ndlich, wenn α eine negative, ganze Zahl ist, falls nicht zugleich $\alpha-\varrho$ eine negative, ganze l ist. Mit der abzuleitenden Funktion $f_{\alpha}(x)$ teilt ferner ihre Ableitung die Eigenschaft, dass mit einer bestimmten, endlichen Potenz von x—a multipliziert, in der Umgebung des Punktes a indrig wird. Die Ableitung ist also selbst eindeutig, wenn wir unter $(x-a)^{\alpha-\varrho}$ den „Hauptt" im Weierstrass'schen Sinne des Wortes verstehen.

Die Funktion $\left[\partial_x^{\varrho} f_{\alpha}(x)\right]_a^x$ kann nun auf mannigfache Arten dargestellt werden: entwickeln zunächst $F\left(\alpha+1, 1, \alpha+1-\varrho, \frac{x-a}{z-a}\right)$ in die gleichmässig konvergente, hypergeometrische Reihe

$$1 - \frac{\alpha+1}{\alpha+1-\varrho}\frac{x-a}{z-a} + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{(\alpha+1-\varrho)(\alpha+2-\varrho)}\left(\frac{x-a}{z-a}\right)^2 + \ldots\ldots,$$

erhalten wir durch gliedweise Integration mit Hülfe des Umstandes, dass

$$\int_{(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz = \frac{1}{1.2\ldots k} f^{(k)}(a)$$ ist,

$$\left[\partial_x^{\varrho} f_{\alpha}(x)\right]_a^x = \frac{(x-a)^{\alpha-\varrho}\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)}\left\{f(a) + \frac{(\alpha+1)(x-a)}{1.(\alpha+1-\varrho)} f'(a) + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(x-a)^2}{1.2(\alpha+1-\varrho)(\alpha+2-\varrho)} f''(a) + \ldots\right\},$$ [1])

[1]) Der spezielle Fall $\alpha = o$ dieser Entwickelung ist zuerst von Herrn Grünwald veröffentlicht worden: Zeitift für Mathematik und Physik XII S. 458.

Riemann erwähnt diesen speziellen Fall ebenfalls; vergleiche: Riemann's Werke. S. 341 Anmerkung 2), wo l n−ν statt ν−n zu lesen ist.

eine Entwickelung, die innerhalb desselben Gebietes konvergiert, in dem f(x) eindeutig, endlich und stetig ist.

Die zweite Euler'sche Relation $F(\alpha+1, 1, \alpha+1-\varrho, \frac{x-a}{z-a}) = \frac{z-a}{z-x} F(1, -\varrho, \alpha+1-\varrho, \frac{x-a}{x-z})$ ergiebt fern

für $\left|\frac{x-a}{x-z}\right| < 1$

$$\left[\partial_x^{\varrho} f_\alpha(x)\right]_a^x = \frac{(x-a)^{\alpha-\varrho}\,\Pi(\alpha)}{2\pi i\,\Pi(\alpha-\varrho)} \int_{(a)} \frac{f(z)}{z-x} F\left(1, -\varrho, \alpha+1-\varrho, \frac{x-a}{x-z}\right) dz$$

Durch gliedweise Integration erhalten wir dann mit Hülfe des Umstandes, dass

$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{(z-x)^{k+1}} dz = \frac{1}{1.2....k} f^{(k)}(x)$ ist, die Entwickelung:

3. $$\left[\partial_x^{\varrho} f_\alpha(x)\right]_a^x = \frac{(x-a)^{\alpha-\varrho}\,\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)} \left\{f(x) + \varrho_1 \frac{x-a}{\alpha+1-\varrho} f'(x) + \varrho_2 \frac{(x-a)^2}{(\alpha+1-\varrho)(\alpha+2-\varrho)} f''(x) + \ldots\right\},$$

die sicher innerhalb des Gebietes konvergiert, in dem die Entwickelung von $f(x+x-a)$ nach st genden Potenzen von $x-a$ konvergent ist; sie konvergiert aber im allgemeinen über dieses biet hinaus, stellt also eine stetige Fortsetzung von 2) dar.

Auch als bestimmtes Integral lässt sich unser $\left[\partial_x^{\varrho} f_\alpha(x)\right]_a^x$ unter gewissen beschränkenden dingungen darstellen:

Wenn der reelle Teil von $\alpha+1 > 0$, und der von $\varrho < 0$ ist, so ist

$$F(1, \alpha+1, \alpha+1-\varrho, \frac{x-a}{z-a}) = \frac{\Pi(\alpha-\varrho)}{\Pi(\alpha)\,\Pi(-\varrho-1)} \int_0^1 u^{\alpha}(1-u)^{-\varrho-1}\left(1-\frac{x-a}{z-a}u\right)^{-1} du,$$ [2] oder durch die S stitution $a+(x-a)u = t$

$$F(1, \alpha+1, \alpha+1-\varrho, \frac{x-a}{z-a}) = \frac{\Pi(\alpha-\varrho)}{\Pi(\alpha)\,\Pi(-\varrho-1)} \int_a^x \frac{(t-a)^{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}} \cdot \frac{(x-t)^{-\varrho-1}}{(x-a)^{-\varrho-1}} \cdot \frac{z-a}{z-t} \cdot \frac{1}{x-a} dt$$

$$= \frac{\Pi(\alpha-\varrho)\,(x-a)^{\varrho-\alpha}(z-a)}{\Pi(\alpha)\Pi(-\varrho-1)} \int_a^x \frac{(x-t)^{-\varrho-1}}{z-t}(t-a)^{\alpha} dt.$$

Also ist nach 1)

$$\left[\partial^{\varrho} f_\alpha(x)\right]_a^x = \frac{1}{\Pi(-\varrho-1)} \int_{(a)} \int_a^x \frac{f(z)(t-a)^{\alpha}(x-t)^{-\varrho-1}}{z-t} dt\, dz$$

$$= \frac{1}{\Pi(-\varrho-1)} \int_a^x (t-a)^{\alpha}(x-t)^{-\varrho-1} \int_{(a)} \frac{f(z)}{z-t} dz\, dt$$

$$= \frac{1}{\Pi(-\varrho-1)} \int_a^x (x-t)^{-\varrho-1}(t-a)^{\alpha} f(t)\, dt \text{ oder}$$

---

[1] Den Fall $\alpha = 0$ dieser Entwickelung giebt Tardy: Intorno ad una formola di Leibnitz: Bulletino di biblio e di storia delle science matematiche e fisiche 1868. S. 183. (1).

[2] Kummer, Crelle's Journal 15, S. 142.
Goursat, annales de l'école normale supérieure (2) X, supplément S. 9.

$$\left[\partial_x^{\varrho} f_\alpha(x)\right]_a^X = \frac{1}{\Pi(-\varrho-1)} \int_a^X (x-t)^{-\varrho-1} f_\alpha(t)\, dt.$$

Dies ist im wesentlichen der Ausdruck, zu dem Riemann, und unabhängig von ihm die Herren inwald und Letnikoff gelangen; der Ausdruck verhält sich zur Definition 1) etwa so, wie das er'sche Integral zweiter Gattung zur Gauss'schen Funktion Π. Obgleich er sich durch Einheit und „Geschmeidigkeit" empfiehlt, eignet er sich meines Erachtens als Definition der Abung deshalb weniger, weil er für ein ϱ mit positiv reellem Teil, also namentlich für positiv zzahligen Ableitungs-Zeiger seinen Sinn verliert. Das von den genannten Mathematikern gelte Auskunftsmittel, „unter $\partial_x^{\varrho} z$, falls $\varrho > 0$, dasjenige zu verstehen, was aus $\partial_x^{\varrho-m} z$ (wo $> \varrho$) durch m malige Differentiation nach x hervorgeht",[1]) versagt mannigfach den Dienst, wie z. B. $\left[\partial_x^{\varrho} x^{\varrho-1}\right]_0^X$ und $\left[\partial_x^{\varrho-1} (x^2-1)^{\varrho-1}\right]_{\pm 1}^X$, wo die Funktionen $t^{\varrho-1}$ und $(t^2-1)^{\varrho-1}$ die Integration bis unteren Grenze nicht gestatten, falls der reelle Teil von $\varrho < 0$ ist. Überhaupt hat unter rundelegung der Gleichung 4) als Definition die Grösse $\left[\partial_x^{n}(x-a)^{\alpha} f(x)\right]_a^X$ keinen Sinn, falls der le Teil von $\alpha + 1 < 0$, während nach der Definition 1), wie sich sogleich ergeben wird, $x-a)^{\alpha} f(x)\Big]_a^X$ mühelos in $\frac{dx\,(x-a)^{\alpha} f(x)}{dx^n}$ übergeht, sogar in dem Falle, dass α sich einer negativen zen Zahl unbegrenzt nähert.

2.

Wir gehen über zur Behandlung spezieller Fälle:

Für $\varrho = \alpha = 0$ geht die Entwickelung 2) in den Taylor'schen Lehrsatz über.

Für $\varrho = n$ wird ferner nach 2)

$$_{\alpha}(x)\Big]_a^X = \left[\partial_x^{n}(x-a)^{\alpha} f(x)\right]_a^X$$

$$\frac{\Pi(\alpha)}{(\alpha-n)}(x-a)^{\alpha-n} f(a) + \frac{\Pi(\alpha+1)}{1.\Pi(\alpha+1-n)}(x-a)^{\alpha-n+1} f'(a) + \frac{\Pi(\alpha+2)}{1.2\,\Pi(\alpha+1-n)}(x-a)^{\alpha-n+2} f''(a) + \ldots,$$

wird

$$\left[\partial_x^{n} f_\alpha(x)\right]_a^X = \frac{d^n (x-a)^{\alpha} f(x)}{dx^n} = \frac{d^n f_\alpha(x)}{dx^n}$$

$\varrho = -n$ wird dagegen nach 2)

$$x)\Big]_a^X = \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha+n)}(x-a)^{\alpha+n} f(a) + \frac{\Pi(\alpha+1)}{1.\Pi(\alpha+n+1)}\cdot(x-a)^{\alpha+n+1} f'(a) + \frac{\Pi(\alpha+2)}{1.2\,\Pi(\alpha+n+2)}(x-a)^{\alpha+n+2} f''(a) + \ldots,$$

ist

[1]) Riemann's Werke S. 341.

6. $\left[\partial_x^{-n} f_\alpha(x)\right]_a^x = \int_a^x \int_a^x \int_a^x \ldots\ldots f_\alpha(x)\,dx\,dx\,dx \ldots$ (n mal), falls der reelle Teil von $\alpha > -1$.

Für ganzzahlig negativen Zeiger geht also die Ableitung über in das mehrfache bestimm Integral, falls dieses einen Sinn hat. Die Grösse $\left[\partial_x^{-n} f_\alpha(x)\right]_a^x$ unterscheidet sich jedoch vom me fachen Integral insofern, als sie im allgemeinen noch Sinn behält, wenn der reelle Teil $\alpha + 1 < 0$ ist, während in diesem Falle die Integration bis zum Verzweigungspunkte nicht stattet ist: nur für negativ ganzzahliges α werden beide Grössen unendlich.

Wenn $f(x) = 1$ ist, so erhalten wir nach 2)

7. $\left[\partial_x^\varrho (x-a)^\alpha\right]_a^x = \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)} (x-a)^{\alpha-\varrho}$, spezieller

8. $\left[\partial_x^\varrho x^\alpha\right]_0^x = \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)} x^{\alpha-\varrho}$, also z. B.

9. $\left[\partial_x^{\frac{1}{2}} x\right]_0^x = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\Pi(\frac{1}{2})} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$.

Es ist dies der historisch merkwürdige Wert, zu dem Euler durch Interpolation gelang

Für $\alpha = -1$ wird $\left[\partial_x^\varrho x^{-1}\right]_0^x$ und auch speziell $\left[\partial_x^{-1} x^{-1}\right]_0^x$ unendlich; bei unserer Auffas der Bruch-Ableitung sind wir jedoch nicht genötigt, in diesem Falle eine Ausnahme zu konstati da ja auch $\int_0^x x^{-1}\,dx$ unendlich wird.

Wenn x^α, wie sich eben gezeigt hat, für gewisse Werte von α das Ableiten bis zum P $x=0$ nicht gestattet, so erlaubt es stets diesen Prozess bis zum Punkte 1. Wir erhalten, in der Umgebung des Punktes 1 eindeutig ist, also das α von 2) verschwindet:

$$\left[\partial_x^\varrho x^\beta\right]_1^x = \frac{(x-1)^{-\varrho}}{\Pi(-\varrho)} \left\{1 + \frac{\beta}{1-\varrho}(x-1) + \frac{\beta(\beta-1)}{(1-\varrho)(2-\varrho)}(x-1)^2 + \ldots\right\};$$

10. $\left[\partial_x^\varrho x^\beta\right]_1^x = \frac{(x-1)^{-\varrho}}{\Pi(-\varrho)} F(-\beta, 1, 1-\varrho, 1-x)$

innerhalb des mit dem Radius 1 um den Punkt 1 geschlagenen Kreises.

Spezieller ergiebt sich

11. $\left[\partial_x^{-1} x^{-1}\right]_1^x = (x-1) F(1, 1, 2, 1-x) = l\,x.$

---

[1]) Euler, Comment. acad. Petr. 1730 A. 1731. T. V § 29.

Es ordnet sich also bei unserer Auffassung der Ableitung einer Potenz der Fall, dass ihr ponent gleich -1 wird, dem allgemeinen unter, während Liouville[1]) bei seiner Auffassung eine snahme konstatieren muss, wie er es auch für das unbestimmte Integral $\int x^{-1}\,dx$ thut, während der Auffassung $\int_1^x x^{-1}\,dx = \lim_{\delta=0} \int_1^x x^{\delta-1}\,dx = \lim_{\delta=0} \frac{x^{\delta}-1}{\delta} = lx$ eine vollständige Unterordnung er den allgemeinen Fall $\int_1^x x^{\alpha}\,dx$ stattfindet.

Ist die abzuleitende Funktion in der Umgebung der unteren Grenze der Ableitung eindeutig, ergiebt sich aus 1) für $\alpha = 0$:

$$\left[\partial_x^{\varrho} f(x)\right]_a^x = \frac{(x-a)^{-\varrho}}{2\pi i\, \Pi(-\varrho)} \int_{(a)} \frac{f(z)}{z-a}\, F\left(1, 1, 1-\varrho, \frac{x-a}{z-a}\right) dz$$

ein Wert, der mit dem Laurent'schen, $\left[\partial_x^{\varrho} f(x)\right]_a^x = \frac{\Gamma(\varrho+1)}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{(z-x)^{\varrho+1}}\, dz$,[2]) weder formell h sachlich übereinzustimmen scheint.

Lassen wir in 12) das ϱ sich der positiven ganzen Zahl n nähern, so verschwinden die n en Glieder der Entwickelung von $F\left(1, 1, 1-\varrho, \frac{x-a}{z-a}\right)$ nach steigenden Potenzen des letzten uments, und es ergiebt sich

$$f(x)\Big]_a^x = \frac{(x-a)^{-1}}{2\pi i} \int_{(a)} \frac{f(z)}{z-a} \left\{ n!\left(\frac{x-a}{z-a}\right)^n + \frac{(n+1)!}{1}\cdot\left(\frac{x-a}{z-a}\right)^{n+1} + \ldots\ldots \right\} dz$$

$$= \frac{n!\,(x-n)^{-n}(x-a)^n}{2\pi i} \int_{(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \left(1-\frac{x-a}{z-a}\right)^{-n-1} dz$$

$$= \frac{n!}{2\pi i} \int_{(a)} \frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}}\, dz, \text{ also ist}$$

$$\left[\partial_x^n f(x)\right]_a^x = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

ein Resultat, das insofern bemerkenswert ist, als von einer eindeutigen abzuleitenden Funktion Ableitung mit ganzzahlig positivem Zeiger n für jede im Ableitungsbereich gelegene untere nze in den nten Differential-Quotienten übergeht.

In ganz einfacher Weise ergiebt sich ferner nach 2) und 12)

$$\left[\partial_x^{\varrho}(ax+b)^{\alpha}\right]_c^x = \frac{(x-c)^{-\varrho}}{\Pi(-\varrho)}\,(ac+b)^{\alpha}\, F\left(-\alpha, 1, 1-\varrho, \frac{-a(x-c)}{ac+b}\right) \text{ für } \left|\frac{a(x-c)}{ac+b}\right| < 1, \text{ falls nicht etwa}$$

$-\frac{b}{a}$ ist.

[1]) Crelle's Journal XI S. 8: Mémoire sur le théorème des fonctions complémentaires.
[2]) Vergleiche das Nähere: Nouvelles annales de mathématiques (3) III S. 240.

Ein spezieller Fall von 14) nemlich

15. $$\left[\partial_x^{\varrho}(b-x)^{-1}\right]_a^x = \frac{(x-a)^{-\varrho}}{\Pi(-\varrho)}(b-a)^{-1} F\left(1, 1, 1-\varrho, \frac{x-a}{b-a}\right)$$

verdient Erwähnung; denn aus ihm ergiebt sich durch Vergleichung mit 12), dass man die in d Umgebung des Punktes a eindeutige Funktion $f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(a)} \frac{f(z)}{z-x} dz$ nach x zwischen den Gre zen a und x ableitet, indem man von der Funktion $\frac{f(x)}{z-x}$ unter dem Integralzeichen nach d Parameter x zwischen den Grenzen a und x die Ableitung nimmt.

Besonderes Interesse beansprucht die Ableitung der Funktion $x^{\alpha}(1-x)^{\beta}$:

Für $|x|<1$ ergiebt sich nach 2):

$$\left[\partial_x^{\varrho} x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\right]_0^x = \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)} x^{\alpha-\varrho}\left\{1 - \frac{(\alpha+1)\beta}{1.(\alpha+1-\varrho)}x + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta-1)}{1.2(\alpha+1-\varrho)(\alpha+2-\varrho)}x^2 - + \ldots\right\}, \text{ oder}$$

16. $$\left[\partial_x^{\varrho} x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\right]_0^x = \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)} x^{\alpha-\varrho} F(\alpha+1, -\beta, \alpha+1-\varrho, x).$$

Die hypergeometrische Reihe ist also im wesentlichen identisch mit der Ableitung $x^{\alpha}(1-x)^{\beta}$: für andere Konstanten ergiebt sich nemlich

17. $$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\beta-1)} x^{1-\gamma}\left[\partial_x^{\beta-\gamma} x^{\beta-1}(1-x)^{-\alpha}\right]_0^x.$$

Ferner erhalten wir für $|1-x|<1$ durch die Darstellung 2)

18. $$\left[\partial_x^{\varrho}(x-1)^{\beta} x^{\alpha}\right]_1^x = \frac{\Pi(\beta)}{\Pi(\beta-\varrho)}(x-1)^{\beta-\varrho} F(\beta+1, -\alpha, \beta+1-\varrho, 1-x),$$

also ist $\left[\partial_x^{\varrho}(x-1)^{\beta} x^{\alpha}\right]_1^x$ eine stetige Fortsetzung von $\left[\partial_x^{\varrho} x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\right]_0^x$.

Eine andere stetige Fortsetzung liefert die Darstellung 3) auf die Funktion $x^{\alpha}(1-x)^{\beta}$ gewandt:

$$\left[\partial_x^{\varrho} x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\right]_0^x = \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)} x^{\alpha-\varrho}\left\{(1-x)^{\beta} - \frac{\varrho}{1}\cdot\frac{x}{\alpha+1-\varrho}\beta(1-x)^{\beta-1} + \frac{\varrho(\varrho-1)x^2\beta(\beta-1)(1-x)^{\beta-2}}{1.2(\alpha+1-\varrho)(\alpha+2-\varrho)} - \right.$$

19. $$\left[\partial_x^{\varrho} x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\right]_0^x = \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)} x^{\alpha-\varrho} F\left(-\beta, -\varrho, \alpha+1-\varrho, \frac{x}{x-1}\right) \text{ für } \left|\frac{x}{x-1}\right|<1.$$

und ebenso:

$$\left[\partial_x^{\varrho}(x-1)^{\beta} x^{\alpha}\right]_1^x = \frac{(x-1)^{\beta-\varrho}\Pi(\beta)}{\Pi(\beta-\varrho)}\left\{x^{\alpha} + \frac{\varrho(x-1)\alpha x^{\alpha-1}}{1.(\beta+1-\varrho)} + \frac{\varrho(\varrho-1)(x-1)^2\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}{1.2(\beta+1-\varrho)(\beta+2-\varrho)} + \ldots\right.$$

20. $$\left[\partial_x^{\varrho}(x-1)^{\beta} x^{\alpha}\right]_1^x = \frac{x^{\alpha}(x-1)^{\beta}\Pi(\beta)}{\Pi(\beta-\varrho)} F\left(-\alpha, -\varrho, \beta+1-\varrho, \frac{x-1}{x}\right) \text{ für } \left|\frac{x-1}{x}\right|<1.$$

Für die Funktion $(x^2-1)^\alpha$ ergiebt die Entwickelung 2), da $(x+1)^\alpha$ in der Umgebung des nktes 1 für $\left|\frac{x-1}{2}\right|<1$ eindeutig ist,

$$-1)^\alpha\Big]_1^x = \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)}(x-1)^{\alpha-\varrho}\left\{2^\alpha + \frac{(\alpha+1)(x-1)\,\alpha.2^{\alpha-1}}{1.(\alpha+1-\varrho)} + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(x-1)^2\alpha(\alpha+1)2^{\alpha-2}}{1.2\,(\alpha+1-\varrho)(\alpha+2-\varrho)} + \ldots\ldots\right\},$$

$$\left[\partial_x^\varrho (x^2-1)^\alpha\right]_1^x = \frac{\Pi(\alpha)(x-1)^{\alpha-\varrho}}{\Pi(\alpha-\varrho)}2^\alpha F\left(-\alpha, \alpha+1, \alpha+1-\varrho, \frac{1-x}{2}\right),$$

l ebenso

$$\left[\partial_x^\varrho (x^2-1)^\alpha\right]_1^x = \frac{(-2)^\alpha \Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)}(x+1)^{\alpha-\varrho} F\left(-\alpha, \alpha+1, \alpha+1-\varrho, \frac{1+x}{2}\right) \text{ für } \left|\frac{1+x}{2}\right|<1.$$

Ersetzen wir in 21) ϱ durch $\varrho-1$, α durch $\varrho-\frac{1}{2}$ und berücksichtigen den aus der Definition 1) ı unmittelbar ergebenden Satz $\left[\partial_x^\varrho Cf_\alpha(x)\right]_\alpha^x = C\left[\partial_x^\varrho f_\alpha(x)\right]_\alpha^x$, — unter C eine beliebige Konstante standen — so erhalten wir:

$$^{-1}(1-x^2)^{\varrho-\frac{1}{2}}\Big] = (-1)^{\varrho-\frac{1}{2}}(x-1)^{\frac{1}{2}}\frac{\Pi(\varrho-\frac{1}{2})}{\Pi(\frac{1}{2})}2^{\varrho-\frac{1}{2}} F\left(\tfrac{1}{2}-\varrho, \tfrac{1}{2}+\varrho, \tfrac{3}{2}, \frac{1-x}{2}\right),$$

r, wenn wir $\left(\frac{1-x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sin t$, infolgedessen $x = \cos 2t, 2t = \text{arc. cos } x$ setzen[1])

$$\left[\partial_x^{\varrho-1}(1-x^2)^{\varrho-\frac{1}{2}}\right]_1^x = \frac{(-2)^{\varrho-1}\Pi(\varrho-\frac{1}{2})}{\varrho\,\Pi(\frac{1}{2})}\sin(\varrho \text{ arc. cos } x) \text{ für } \left|\frac{x-1}{2}\right|<1.$$

Ganz ähnlich ergiebt sich für $\left|\frac{x+1}{2}\right|<1$

$$\left[\partial_x^{\varrho-1}(1-x^2)^{\varrho-\frac{1}{2}}\right]_{-1}^x = \frac{2^{\varrho-1}\Pi(\varrho-\frac{1}{2})}{\varrho.\Pi(\frac{1}{2})}\sin(\varrho[\pi - \text{arc. cos } x])$$

Gleichung 23) und 24) dehnen jene elegante Formel, die wir Jacobi verdanken, aus auf den l eines beliebigen Zeigers — 0 nicht ausgeschlossen —; denn wenn ϱ zur positiven ganzen Zahl n l, so gehen 23) und 24) über in

$$\frac{^1(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}} = (-1)^{n-1}\,3.5.7.\ldots.(2n-1)\frac{\sin(n.\text{ arc. cos } x)}{n}$$ [2])

Setzen wir ferner in 21) $\varrho-1$ für ϱ und $\alpha=-\frac{1}{2}$, so ergiebt sich

$$x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\Big]_1^x = \frac{\Pi(-\frac{1}{2})(x-1)^{\frac{1}{2}-\varrho}}{\Pi(\frac{1}{2}-\varrho)2^{\frac{1}{2}}}F\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}-\varrho, \frac{1-x}{2}\right) = \frac{\Pi(-\frac{1}{2})(x-1)^{\frac{1}{2}-\varrho}}{\Pi(\frac{1}{2}-\varrho)(x+1)^{\frac{1}{2}}}F\left(1-\varrho, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}-\varrho, \frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$= \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}-\varrho}}{(x+1)^{\frac{1}{2}}}\left\{\frac{\Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi(\frac{1}{2}-\varrho)} + \frac{(1-\varrho)\Pi(\frac{1}{2})}{\Pi(\frac{3}{2}-\varrho)}\cdot\frac{x-1}{x+1} + \frac{(1-\varrho)(2-\varrho)\Pi(\frac{3}{2})}{1.2\,\Pi(\frac{5}{2}-\varrho)}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + \ldots\ldots\right\}$$

[1]) Gauss' Werke, Bd. III S. 127. XVI.

[2]) Jacobi, Crelle's Journal XV: Formula transformationis integralium definitorum. S. 4.

Es ist aber[1]

$$\frac{1}{\Pi(k+\frac{1}{2}-\varrho)}=\frac{\sin\pi(\varrho-k-\frac{1}{2})}{\pi}\,\Pi(\varrho-k-1-\tfrac{1}{2})=\frac{(-1)^k(2\pi)^{\frac{1}{2}}\cos(\pi\varrho)\,\Pi(2\varrho-2k-2)}{\pi\,2^{2\varrho-2k-2}\,2^{\frac{1}{2}}\,\Pi(\varrho-k-1)}$$ und

$$\Pi(k-\tfrac{1}{2})=\frac{\Pi(2k)\,(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{\Pi(k)\,2^{2k}\,2^{\frac{1}{2}}},$$ demnach

$$\frac{(1-\varrho)(2-\varrho)(3-\varrho)\ldots\ldots(k-\varrho)\,\Pi(k-\frac{1}{2})}{\Pi(k)\,\Pi(k+\frac{1}{2}-\varrho)}=\frac{\cos(\pi\varrho)\,\Pi(\varrho-1)}{2^{2(\varrho-1)}}\,\frac{\Pi(2k)}{\Pi(k)\,\Pi(k)}\cdot\frac{\Pi(2\varrho-2k-2)}{\Pi(\varrho-k-1)\,\Pi(\varrho-k-1)};$$

setzen wir also $\frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\beta)\,\Pi(\alpha-\beta)}=\alpha_\beta$, so ergiebt sich

25. $$\left[\partial_x^{\varrho-1}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\right]_1^x$$

$$=\frac{(x-1)^{\frac{1}{2}-\varrho}\cos(\pi\varrho)\,\Pi(\varrho-1)}{(x+1)^{\frac{1}{2}}\,2^{2(\varrho-1)}}\left\{(2\varrho-2)_{\varrho-1}+2_1\,(2\varrho-4)_{\varrho-2}\cdot\frac{x-1}{x+1}+4_2\,(2\varrho-6)_{\varrho-3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2+\ldots\right.$$

für $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|<1$ als Ausdehnung einer Steinbrink'schen Formel auf beliebigen Zeiger; denn $\varrho=n$ folgt $\frac{d^n\,\mathrm{arc.sin}\,x}{dx^n}=\frac{(n-1)!\,(x+1)^{n-1}}{2^{2(n-1)}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}\,\Sigma\,(2k)_k\,(2n-2k-2)_{n-k-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^k$.[2]

Ganz ähnlich ergiebt sich aus 22)

26. $$\left[\partial_x^{\varrho-1}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\right]_{-1}^x$$

$$=\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}-\varrho}\cos(\pi\varrho)\,\Pi(\varrho-1)}{(x-1)^{\frac{1}{2}}\,2^{2(\varrho-1)}}\left\{(2\varrho-2)_{\varrho-1}+2_1\,(2\varrho-4)_{\varrho-2}\cdot\frac{x+1}{x-1}+4_2\,(2\varrho-6)_{\varrho-3}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2+\right.$$

für $\left|\frac{x+1}{x-1}\right|<1$.

Setzen wir in 21) und 22) endlich $\alpha=\varrho$, so erhalten wir

27. $$\left[\partial_x^\varrho(x^2-1)^\varrho\right]_1^x=\Pi(\varrho)\,2^\varrho\,F\left(-\varrho,\varrho+1,1,\frac{1-x}{2}\right)$$ für $\left|\frac{1-x}{2}\right|<1$, und

28. $$\left[\partial_x^\varrho(x^2-1)^\varrho\right]_{-1}^x=\Pi(\varrho)\,(-2)^\varrho\,F\left(-\varrho,\varrho+1,1,\frac{1+x}{2}\right)$$ für $\left|\frac{1+x}{2}\right|<1$.

Die Grössen in 27) und 28) sind — abgesehen von den konstanten Faktoren — K funktionen mit beliebig komplexem Index.

Für die Ableitung der Funktion $x^\alpha\,e^x$ erhalten wir die in der ganzen Ebene gültige wickelung

$$\left[\partial_x^\varrho x^\alpha e^x\right]_0^x=\frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)}\,x^{\alpha-\varrho}\left\{1+\frac{\alpha+1}{1.(\alpha+1-\varrho)}\,x+\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.2\,(\alpha+1-\varrho)(\alpha+2-\varrho)}x^2+\ldots\ldots\right\}$$

---

[1] Gauss' Werke, Bd. III S. 150 [57].

[2] Steinbrink, Theoria derivatorum altiorum ordinum. (158).

. im wesentlichen jene merkwürdige Funktion, die Herr Kummer im § 26 seiner Abhandlung · die hypergeometrische Reihe behandelt und als Grenzfall derselben betrachtet; es ist also

$$\left[\partial_x^\varrho x^\alpha e^x\right]_0^x = \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)} x^{\alpha-\varrho} \lim_{m=\infty} F\left(\alpha+1, m, \alpha+1-\varrho, \frac{x}{m}\right)$$

Für $\alpha = 0$ ergiebt sich bei beliebigem Zeiger $\left[\partial_x^\varrho e^x\right]_0^x$ nicht als e^x. Dieser hervorragende t wird vielmehr erst auftreten, wenn die untere Grenze der Ableitung $-\infty$ ist.

In ähnlicher Weise wie bei 29) zeigt sich

$$\left[\partial_x^\varrho x^\alpha \sin x\right]_0^x = \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)} x^{\alpha-\varrho}\left\{\frac{\alpha+1}{1.(\alpha+1-\varrho)} x - \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{1.2.3(\alpha+1-\varrho)(\alpha+2-\varrho)(\alpha+3-\varrho)} x^3 + - \ldots.\right\},$$

$$\left[\partial_x^\varrho x^\alpha \cos x\right]_0^x = \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)} x^{\alpha-\varrho}\left\{1 - \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.2\,(\alpha+1-\varrho)\,(\alpha+2-\varrho)} x^2 + - \ldots..\right\}$$

Die Funktion lx gestattet sicher das Ableiten bis zum Punkte 1: nach 2) ist für Punkte x rhalb eines mit dem Radius 1 um den Punkt 1 geschlagenen Kreises

$$x\Big]_1^x = \frac{(x-1)^{-\varrho}}{\Pi(-\varrho)}\left\{\frac{x-1}{1-\varrho} - \frac{1.(x-1)^2}{(1-\varrho)(2-\varrho)} + \frac{1.2\,(x-1)^3}{(1-\varrho)\,(2-\varrho)\,3-\varrho)} - + \ldots..\right\}$$

$$\left[\partial_x^\varrho lx\right]_1^x = \frac{(x-1)^{1-\varrho}}{\Pi(1-\varrho)} F\,(1, 1, 2-\varrho, 1-x)$$

in Wert, dessen Vergleichung mit 11) zeigt, dass $\left[\partial_x^{\varrho-1} x^{-1}\right]_1^x = \left\{\partial_x^\varrho\left[\partial_x^{-1} x^{-1}\right]_1^x\right\}_1^x$ ist.

Bis zum Punkte 0 gestattet aber die Funktion lx nicht ohne weiteres den Ableitungs-Prozess, ı in der Umgebung des Punktes 0 den Charakter einer einändrigen Funktion verliert. Nach 2) l also $\left[\partial_x^\varrho lx\right]_0^x$ nicht berechnet werden. Wohl aber können wir $\left[\partial_x^\varrho lx\right]_0^x$ und allgemeiner

$\left.-a)^\alpha l(x-a)\right]_a^x$ als Grenzfall von 7) behandeln:

Es ist

$$\left.-a)^\alpha \frac{(x-a)^\delta - 1}{\delta}\right]_a^x = \frac{1}{\delta}\left\{\frac{\Pi(\alpha+\delta)}{\Pi(\alpha+\delta-\varrho)}(x-a)^{\alpha+\delta-\varrho} - \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)}(x-a)^{\alpha-\varrho}\right\}$$

Gehen wir nun zur Grenze für $\delta = 0$ über, so erhalten wir:

$$\left.-a)^\alpha l(x-a)\right]_a^x = \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)}(x-a)^{\alpha-\varrho}\left\{\frac{\Pi'(\alpha)}{\Pi(\alpha)} + l(x-a) - \frac{\Pi'(\alpha-\varrho)}{\Pi(\alpha-\varrho)}\right\}$$

, wenn wir mit Gauss $\frac{d\,l\,\Pi(\alpha)}{d\,\alpha} = \Psi(\alpha)$ setzen:

33. $$\left[\partial_x^\varrho (x-a)^\alpha \, 1(x-a)\right]_a^x = \frac{\Pi(\alpha)\,(x-a)^{\alpha-\varrho}}{\Pi(\alpha-\varrho)}\left\{1(x-a) + \Psi(\alpha) - \Psi(\alpha-\varrho)\right\}$$

und spezieller für $\alpha = 0$:

34. $$\left[\partial_x^\varrho \, 1(x-a)\right]_a^x = \frac{(x-a)^{-\varrho}}{\Pi(-\varrho)}\left\{1(x-a) + \Psi(0) - \Psi(-\varrho)\right\}$$

für jedes beliebige ϱ — ein positiv ganzzahliges $\varrho = n$ nicht ausgeschlossen; in der That ist,

$\Pi(-\varrho) = \dfrac{\pi\varrho}{\Pi(\varrho)\sin(\pi\varrho)}$, und

$-\Psi(-\varrho) = \dfrac{1}{\varrho} - \Psi(\varrho) - \pi \operatorname{cotg}(\pi\varrho)$ ist

$$\lim_{\varrho = n}\left[\partial_x^\varrho \, 1(x-a)\right]_a^x = (-1)^{n-1}\,\Pi(n-1)\,(x-a)^{-n} = \frac{d^n\,1(x-a)}{dx^n}.$$

Die Formel 33) ist noch insofern von Interesse, als ihre Vergleichung mit 7) lehrt, dass die Ableitung $\left[\partial_x^\varrho (x-a)^\alpha\right]_a^x = \dfrac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)}\,(x-a)^{\alpha-\varrho}$ nach dem Parameter α differentiiert, indem man abzuleitende Funktion $(x-a)^\alpha$ nach α differentiiert.

Nach 2) ergiebt sich endlich

35. $$\left[\partial_x^{\delta-\varepsilon}\, x^{\delta-1}\, F(\alpha,\beta,\gamma,x)\right]_0^x = \frac{\Pi(\delta-1)}{\Pi(\varepsilon-1)}\,x^{\varepsilon-1}\left\{1 + \frac{\alpha.\beta.\delta}{1.\gamma.\varepsilon}\,x + \frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)\,\delta(\delta+1)}{1.2\,\gamma(\gamma+1)\,\varepsilon(\varepsilon+1)}\,x^2 \ldots\right.$$

für $|x| < 1$ d. h. eine hypergeometrische Reihe dritter Ordnung in dem Sinne des Worts, w die Herren Thomae und Goursat, Herr Pochhammer aber in seiner 2ten Abhandlung über V gemeinerungen der hypergeometrischen Reihe gebrauchen. Dass man in ganz ähnlicher Weise der hypergeometrischen Reihe 3ter Ordnung zu der 4ten Ordnung und allgemein zu der durch wiederholtes Ableiten aufsteigen kann, ist ersichtlich.

3.

Bei der Aufstellung der Forderungen, die ich an die Grösse $\left[\partial_x^\varrho (x-a)^\alpha\right]_a^x$ stellte, wurd von dem Gesichtspunkt geleitet, dass diese Forderungen die für mehrfache Differentiation u tegration charakteristischen Eigenschaften aussprechen sollten. In der That ziehen nun die F rungen III—VI des ersten Abschnitts die Haupteigenschaften mehrfacher Differentiation und gration nach sich, d. h. für die durch 1) definierten Ableitungen gelten die Hauptgesetz mehrfachen Differentiation und Integration. Es ist

36. $$\left[\partial_x^\varrho C.f_\alpha(x)\right]_a^x = C.\left[\partial_x^\varrho f_\alpha(x)\right]_a^x,$$

— unter C eine beliebige inbezug auf x konstante Zahl verstanden — wie schon aus der Defini unmittelbar abgeleitet wurde.

Ebenso einfach ergiebt sich aus ihr, dass, wenn $f_{1,\alpha}(x)$, $f_{2,\alpha}(x)$, $f_{3,\alpha}(x) \ldots\ldots f_{n,\alpha}(x)$ einzeln $(x-a)^\alpha$ dividiert eine in der Umgebung des Punktes a eindeutige Funktion ergeben

$$\left[\partial_x^\varrho \left\{ f_{1,\alpha}(x) + f_{2,\alpha}(x) + f_{3,\alpha}(x) + \ldots\ldots f_{n,\alpha}(x) \right\}\right]_a^x$$

$$\partial_x^\varrho f_{1,\alpha}(x)\Big]_a^x + \left[\partial_x^\varrho f_{2,\alpha}(x)\right]_a^x + \left[\partial_x^\varrho f_{3,\alpha}(x)\right]_a^x + \ldots\ldots \left[\partial_x^\varrho f_{n,\alpha}(x)\right]_a^x .$$

Auch zeigt sich, dass man die Ableitung einer unendlichen Reihe solcher Funktionen durch lweises Ableiten unter denselben Bedingungen findet, wie bei der Integration, also wenn die rüngliche und die resultierende Reihe gleichmässig konvergieren.[1])

Enthält ferner die abzuleitende Funktion den Parameter p, so zeigt die Definition 1) un- elbar, dass unter den für die Differentiation eines Integrals geltenden Bedingungen

$$\frac{\partial\left[\partial_x^\varrho f_\alpha(x, p)\right]_a^x}{\partial p} = \left[\partial_x^\varrho \frac{\partial f_\alpha(x,p)}{\partial p}\right]_a^x \text{ ist.}$$

Dabei ist der Fall nicht ausgeschlossen, dass dieser Parameter die Grösse α sei; es ist viel- auch

$$\frac{\partial\left[\partial_x^\varrho (x-a)^\alpha f(x)\right]_a^x}{\partial \alpha} = \left[\partial_x^\varrho (x-a)^\alpha \, l(x-a) f(x)\right]_a^x ,$$

i selbstverständlich $f(x)$ als unabhängig von α vorausgesetzt wird. Die rechte Seite der hung 39) kann nämlich aufgefasst werden als $\lim_{\delta = 0} \frac{\left[\partial_x^\varrho \left\{(x-a)^{\alpha+\delta} - (x-a)^\alpha\right\} f(x)\right]_a^x}{\delta}$, und der , dem dieser unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheinende Quotient zustrebt, wird ja durch partielle rentiation von $\left[\partial_x^\varrho (x-a)^\alpha f(x)\right]_a^x$ nach α erhalten, wie es die linke Seite der behaupteten hung 39) erfordert.

Ebensowenig ist a als Differentiations-Parameter ausgeschlossen: vielmehr ist auch

$$\frac{\partial\left[\partial_x^\varrho (x-a)^\alpha f(x)\right]_a^x}{\partial a} = -\alpha \left[\partial_x^\varrho (x-a)^{\alpha-1} f(x)\right]_a^x ,$$

sich durch Differentiation der Entwickelung 2) nach a ergiebt.

Auch der Satz vom Ableiten eines bestimmten Integrals nach einem Parameter gilt für be- en Zeiger: wenn $f_\alpha(x, u) = (x-a)^\alpha f(x, u)$, und $f(x, u)$ eine in der Umgebung des Punktes einwertige Funktion ist, wenn ferner k und l konstante Zahlen sind, so ist

---

[1]) Thomé, Crelle's Journal Bd. LXXI. Die Frage über die Bedingungen für die Integrierbarkeit einer unend- Reihe harrt leider noch ihrer endgiltigen Lösung.

$$\left[\partial_x^{\varrho}\int_k^l f_{\alpha}(x,u)\,du\right]_a^x = \frac{(x-a)^{\alpha-\varrho}\,\Pi(\alpha)}{2\pi i\,\Pi(\alpha-\varrho)}\int_{(a)}\frac{1}{z-a}\int_k^l f(z,u)\,du\,F\left(\alpha+1,1,\alpha+1-\varrho,\frac{x-a}{z-a}\right)dz$$

$$= \int_k^l \frac{(x-a)^{\alpha-\varrho}\,\Pi(\alpha)}{2\pi i\,\Pi(\alpha-\varrho)}\int_{(a)}\frac{f(z,u)}{z-a}\,F\left(\alpha+1,1,\alpha+1-\varrho,\frac{x-a}{z-a}\right)dz\,du, \text{ also}$$

41. $$\left[\partial_x^{\varrho}\int_k^l f_{\alpha}(x,u)\,du\right]_a^x = \int_k^l \left[\partial_x^{\varrho} f_{\alpha}(x,u)\right]_a^x du,$$

falls $f(x,u)$ eine solche Funktion von x und u ist, dass für sie die Umkehrung der Reihenfolge Integrationen gestattet ist, also gewiss, wenn $f(x,u)$ eine auf den betreffenden Integrationsw stetige Funktion zweier Variabeln ist.

Der Satz

42. $$\left[\partial_x^{\varrho}\left\{\partial_x^{\sigma} f_{\alpha}(x)\right\}_a^x\right]_a^x = \left[\partial_x^{\varrho+\sigma} f_{\alpha}(x)\right]_a^x$$

gilt ebenfalls für beliebige Zeiger, falls die Ableitungen überhaupt Sinn haben, und falls d das erste Ableiten nicht eine oder mehrere Potenzen der nach steigenden Potenzen von x—a wickelten abzuleitenden Funktion zum Verschwinden gebracht werden; denn es ist

$$\left[\partial_x^{\sigma} f_{\alpha}(x)\right]_a^x = \frac{\Pi(\alpha)\,(x-a)^{\alpha-\sigma}}{2\pi i\,\Pi(\alpha-\sigma)}\int_{(a)}\frac{f(z)}{z-a}\,dz + \frac{\Pi(\alpha+1)\,(x-a)^{\alpha-\sigma+1}}{2\pi i\,\Pi(\alpha-\sigma+1)}\int_{(a)}\frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz + \ldots\ldots$$

ein für jedes endliche σ innerhalb desselben Bereiches gleichmässig konvergente Reihe, inne dessen $f(x)$ ausnahmslos analytisch ist; also ist nach 37), 36) und 7)

$$\left[\partial_x^{\varrho}\left\{\partial_x^{\sigma} f_{\alpha}(x)\right\}_a^x\right]_a^x = \frac{\Pi(\alpha)\,(x-a)^{\alpha-\varrho-\sigma}}{2\pi i\,\Pi(\alpha-\varrho-\sigma)}\int_{(a)}\frac{f(z)}{z-a}\,dz + \frac{\Pi(\alpha+1)(x-a)^{\alpha-\varrho-\sigma+1}}{2\pi i\,\Pi(\alpha-\varrho-\sigma+1)}\int_{(a)}\frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz + \ldots\ldots$$

$$= \frac{\Pi(\alpha)\,(x-a)^{\alpha-\varrho-\sigma}}{2\pi i\,\Pi(\alpha-\varrho-\sigma)}\int_{(a)}\frac{f(z)}{z-a}\,F\left(\alpha+1,1,\alpha+1-\varrho-\sigma,\frac{x-a}{z-a}\right)dz$$

d. h. der Satz ist im allgemeinen bewiesen. Er erheischt jedoch in dem Falle eine Einschrän dass der zuerst vorgenommene Ableitungs-Prozess eine oder mehrere Potenzen der Entwick von $f_{\alpha}(x)$ zum Verschwinden bringt, — ein Umstand, der namentlich dann eintritt, wenn d zuleitende Funktion in der Umgebung der unteren Grenze eindeutig ist, und zugleich der der ersten Ableitung eine positive, ganze Zahl $\sigma = n$ ist, denn dann verschwinden

$\frac{1}{\Pi(-m)} = 0$ eins oder mehrere Glieder von $\left[\partial_x^{\sigma} f(x)\right]_a^x$, während die entsprechenden Glied $\left[\partial_x^{\varrho+\sigma} f(x)\right]_a^x$ im allgemeinen nicht verschwinden. Es müssen dann, wenn die Gleichung 42) bleiben soll, die ausgefallenen Glieder wieder ergänzt werden. — Diese Einschränkung der Gil von 42) darf übrigens nicht wunder nehmen, da ja in dem Falle, dass der erste Zeiger σ ganzzahlig, der zweite ϱ negativ ganzzahlig ist, eine ganz analoge Einschränkung nötig is

Eins der wichtigsten Theoreme über Ableitungen mit gebrochenem Zeiger ist zweifellos der
nitz'sche Satz über die Ableitung eines Produkts. Durch den Gedankengang, der mich zur
illung der im ersten Abschnitt an die Grösse $\left[\partial_x^\varrho (x-a)^\alpha\right]_a^x$ gestellten Forderungen I—VI führte,
de für mich die Vermuthung nahe gelegt, dass bei dem Liouville'schen Wert für $\partial_x^\varrho (x-a)^\alpha$ das
nitz'sche Theorem nicht gelte: Liouville gelangt zu dem von 7) abweichenden Ausdruck
$\frac{1}{x^n} = \frac{(-1)^\mu}{\Gamma(n)} \cdot \frac{\Gamma(n+\mu)}{x^{n+\mu}}$. [1]) Wäre nun

$$\frac{1}{x^n} \cdot \frac{1}{x^p}\Big) = \frac{1}{x^p}\partial_x^\mu x^{-n} + \mu_1 \frac{dx^{-p}}{dx}\partial_x^{\mu-1}x^{-n} + \mu_2 \frac{d^2x^{-p}}{dx^2}\partial_x^{\mu-2}x^{-n} + \ldots\ldots,$$

müsste

$$\frac{(-1)^\mu \Gamma(\mu+n+p)}{\Gamma(n+p)} = \frac{(-1)^\mu}{x^{\mu+n+p}}\left\{\frac{\Gamma(\mu+n)}{\Gamma(n)} + \mu_1 p \frac{\Gamma(\mu+n-1)}{\Gamma(n)} + \mu_2 p(p+1)\frac{\Gamma(\mu+n-2)}{\Gamma(n)} + \ldots\ldots\right\}$$

, was bekanntlich für ein beliebig gebrochenes p nicht der Fall ist, da der Inhalt der ver-
ungenen Klammer im Falle der Konvergenz — wenn der reelle Teil von $1-n-p > 0$ —
Wert

$$\frac{\pi}{\Gamma(n+\mu)\pi\,\Gamma(n)\,\Gamma(1-\mu-n)} F(-\mu, p, 1-\mu-n, 1) = \frac{\sin(n\pi)\sin\overline{(n+p+\mu)\pi}}{\sin\overline{(n+\mu)\pi}\sin\overline{(n+p)\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\mu+n+p)}{\Gamma(n+p)}$$

In der That gilt also das Leibnitz'sche Theorem für zwei beliebige Exponenten bei dem
ville'schen Wert für $\partial_x^\mu x^\alpha$ nicht, und kann demgemäss auch nicht für den entsprechenden
t von $\partial_x^\mu f_\alpha(x)$ Geltung haben.

Um nun das Leibnitz'sche Theorem für den allgemeinsten Fall zu beweisen, den die Definition
lässt, bedarf ich einer Formel, die zwar ein spezieller Fall dieses Theorems für beliebigen
itungszeiger ist, die aber an dieser Stelle auf anderm Wege abgeleitet werden muss. Diese
iel heisst:

$$\left[(1-x)^{-1}x^{\alpha+\beta}\right]_0^x$$

$$\left[\partial_x^\varrho (1-x)^{-1}x^\alpha\right]_0^x + \varrho_1 \frac{dx^\beta}{dx}\left[\partial_x^{\varrho-1}(1-x)^{-1}x^\alpha\right]_0^x + \varrho_2 \frac{d^2x^\beta}{dx^2}\left[\partial_x^{\varrho-2}(1-x)^{-1}x^\alpha\right]_0^x + \ldots\ldots$$

nach 16)

$$\frac{\Pi(\alpha+\beta)}{\Pi(\alpha+\beta-\varrho)} F(\alpha+\beta+1, 1, \alpha+\beta+1-\varrho, x) = \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)}\left\{F(\alpha+1, 1, \alpha+1-\varrho, x)\right.$$

$$\left.\frac{\varrho.\beta}{(\alpha+1-\varrho)} \cdot F(\alpha+1, 1, \alpha+2-\varrho, x) + \frac{\varrho(\varrho-1)\beta(\beta-1)}{1.2(\alpha+1-\varrho)(\alpha+2-\varrho)} F(\alpha+1, 1, \alpha+3-\varrho, x) + \ldots\right\},$$

$|x| < 1$ und der reelle Teil von $\alpha+\beta+1 > 0$ ist.

Der Beweis dieser Formel lässt sich leicht durch Koeffizienten-Vergleichung erbringen: Die

---

[1]) Crelle's Journal XI S. 3. A.

Reihe auf der rechten Seite von 43) konvergiert gleichmässig; denn die Reihe

$$1+\frac{\varrho.\beta}{1.(\alpha+1-\varrho)}+\frac{\varrho(\varrho-1)\beta(\beta-1)}{1.2(\alpha+1-\varrho)(\alpha+2-\varrho)}+\ldots\ldots$$

konvergiert sicher, falls der reelle Teil von $\alpha+\beta+1>0$ ist, und die absoluten Beträge der Glie
der Reihe

$F(\alpha+1,1,\alpha+1-\varrho,x)$, $F(\alpha+1,1,\alpha+2-\varrho,x)$, $F(\alpha+1,1,\alpha+3-\varrho,x)\ldots\ldots F(\alpha+1,1,\alpha+n-\varrho,x)$
nähern sich mit unbegrenzt wachsendem n dem festen Grenzwert 1 für jedes der Beding
$|x|<1$ genügende x. Die gleichmässige Konvergenz der Reihe 43) folgt also aus einer der
merkungen, die Dirichlet zur Konvergenz der Reihe $\Sigma a_n b_n$ hinzufügt.[1]) Die Reihe 43) genügt
mit den Voraussetzungen des Weierstrass'schen Doppelreihensatzes,[2]) und wir dürfen infolge di
Satzes die rechte Seite von 43) formal nach steigenden Potenzen von x ordnen. Aus der For

$$\frac{\Pi(\alpha+n)}{\Pi(\alpha+n-\varrho)}\left\{1+\frac{\varrho\,\beta}{1.(\alpha+n+1-\varrho)}+\frac{\varrho(\varrho-1)\beta(\beta-1)}{1.2(\alpha+n+1-\varrho)(\alpha+n+2-\varrho)}+\ldots\ldots\right\}$$

für $n=0,1,2\ldots\ldots$ ergiebt sich dann die Richtigkeit der Gleichung 43) in ganz einfacher W

Nunmehr gehe ich zum Beweise des Leibnitz'schen Theorems selber über:

Es ist nach 1)

$$\left[\partial_x^\varrho f_\alpha(x)\varphi_\beta(x)\right]_a^x=\frac{(x-a)^{\alpha+\beta-\varrho}\Pi(\alpha+\beta)}{2\pi i\Pi(\alpha+\beta-\varrho)}\int_{(a)}\frac{f(z)\varphi(z)}{z-a}F\left(\alpha+\beta+1,1,\alpha+\beta+1-\varrho,\frac{x-a}{z-a}\right)dz.$$

Entwickeln wir nun $\varphi(z)$ nach dem Taylorschen Lehrsatz und $F(\alpha+\beta+1,1,\alpha+\beta+1-\varrho,\frac{x}{z}$
nach 43), wobei wir für den Augenblick der Kürze halber $F\left(\alpha+1,1,\alpha+1-\varrho,\frac{x-a}{z-a}\right)=F(\alpha$
setzen, so erhalten wir

$$\left[\partial_x^\varrho f_\alpha(x)\varphi_\beta(x)\right]_a^x=\frac{(x-a)^{\alpha+\beta-\varrho}\Pi(\alpha)}{2\pi i\Pi(\alpha-\varrho)}\int_{(a)}\frac{f(z)}{z-a}\left\{\varphi(x)+\frac{(z-x)\varphi'(x)}{1}+\frac{(z-x)^2}{1.2}\varphi''(x)+\ldots\ldots\right\}\cdot$$

$$\left\{F(\alpha,\varrho)+\frac{\varrho.\beta}{1.(\alpha+1-\varrho)}F(\alpha,\varrho-1)+\frac{\varrho(\varrho-1)\beta(\beta-1)}{1.2(\alpha+1-\varrho)(\alpha+2-\varrho)}F(\alpha,\varrho-2)+\ldots\ldots\right.$$

$$=\frac{(x-a)^{\alpha-\varrho}\Pi(\alpha)}{2\pi i\Pi(\alpha-\varrho)}(x-a)^\beta\varphi(x)\int_{(a)}\frac{f(z)}{z-a}F(\alpha,\varrho)\,dz$$

$$+\frac{(x-a)^{\alpha-\varrho+1}}{2\pi i}\frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)}\int_{(a)}\frac{f(z)(x-a)^{\beta-1}}{z-a}\left\{\frac{\varrho.\beta F(\alpha,\varrho-1)}{1.(\alpha+1-\varrho)}\varphi(x)+\frac{(z-x)F(\alpha,\varrho)}{1}\varphi'(x)\right\}dz$$

$$+\frac{(x-a)^{\alpha-\varrho+2}}{2\pi i}\frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)}\int_{(a)}\frac{f(z)(x-a)^{\beta-2}}{z-a}\left\{\frac{\varrho(\varrho-1)\beta(\beta-1)}{1.2(\alpha+1-\varrho)(\alpha+2-\varrho)}F(\alpha,\varrho-2)\varphi(x)\right.$$

$$\left.+\frac{\varrho.\beta(z-x)}{1.(\alpha+1-\varrho)}F(\alpha,\varrho-1)\varphi'(x)+\frac{(z-x)^2}{1.2}F(\alpha,\varrho)\varphi''(x)\right\}dz$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

---

[1]) Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben von Dedekind, § 143.

[2]) Weierstrass, Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin August 1880. 2.

Nach Gauss (Werke, Band III S. 130 Formel [8]) ergiebt sich aber, wenn die dortigen Grössen
, γ, x der Reihe nach durch 1, $\alpha+1, \alpha+1-\varrho, \frac{x-a}{z-a}$ ersetzt werden, die auch für komplexe
umente geltende Beziehung

$$(\alpha+1-\varrho)\frac{z-x}{z-a}F(\alpha,\varrho)-(\alpha+1-\varrho)-\varrho\frac{x-a}{z-a}F(\alpha,\varrho+1),$$

ist

$$\frac{x}{1}F(\alpha,\varrho)=1+\frac{\varrho(x-a)}{(z-a)(\alpha+1-\varrho)}F(\alpha,\varrho-1)$$

allgemeiner unterscheidet sich, wie die wiederholte Anwendung dieser Formel ergiebt,
$\frac{x)^n}{-a}F(\alpha,\varrho)$ von $\frac{\varrho(\varrho-1).....(\varrho-n+1)(x-a)^n}{(\alpha+1-\varrho)(\alpha+2-\varrho).....(\alpha+n-\varrho)(z-a)}\cdot F(\alpha,\varrho-n)$ nur um eine gauze rationale
ktion von z, also ist

$$\frac{-x)^n f(z)}{z-a}F(\alpha,\varrho)\,dz=\frac{\varrho(\varrho-1).....(\varrho-n+1)(x-a)^n}{(\alpha+1-\varrho)(\alpha+2-\varrho).....(\alpha+n-\varrho)}\int_{(a)}\frac{f(z)}{z-a}F(\alpha,\varrho-n)\,dz,$$

las geschlossene Integral einer Funktion, die innerhalb des Integrationsgebietes nirgends un-
ich wird, verschwindet. Wir erhalten also

$$\left.{}_{\alpha}(x)\,\varphi_{\beta}(x)\right]_a^x=(x-a)^{\alpha-\varrho}\frac{\Pi(\alpha)}{2\pi i\,\Pi(\alpha-\varrho)}(x-a)^{\beta}\varphi(x)\int_{(a)}\frac{f(x)}{z-a}F(\alpha,\varrho)\,dz$$

$$+\varrho(x-a)^{\alpha-\varrho+1}\frac{\Pi(\alpha)}{2\pi i\,\Pi(\alpha-\varrho+1)}\left[\beta(x-a)^{\beta-1}\varphi(x)+(x-a)^{\beta}\varphi'(x)\right]\int_{(a)}\frac{f(z)}{z-a}F(\alpha,\varrho-1)\,dz$$

$$\frac{(x-a)^{\alpha-\varrho+2}\,\Pi(\alpha)}{2\pi i\,\Pi(\alpha-\varrho+2)}\left[\beta(\beta-1)(x-a)^{\beta-2}\varphi(x)+2\beta(x-a)^{\beta-1}\varphi'(x)+(x-a)^{\beta}\varphi''(x)\right]\int_{(a)}\frac{f(x)}{z-a}F(\alpha,\varrho-2)\,dz$$

. . . . . .

nach 1)

$$\left[\partial_x^{\varrho}f_{\alpha}(x)\varphi_{\beta}(x)\right]_a^x=\varphi_{\beta}(x)\left[\partial_x^{\varrho}f_{\alpha}(x)\right]_a^x+\varrho_1\varphi'_{\beta}(x)\left[\partial_x^{\varrho-1}f_{\alpha}(x)\right]_a^x+\varrho_2\varphi''_{\beta}(x)\left[\partial_x^{\varrho-1}f_{\alpha}(x)\right]_a^x+.....$$

r der Bedingung, dass diese Reihe gleichmässig konvergiert. In der That schliesst diese Be-
ung die andre für die Gültigkeit der beim Beweise benutzten Formel 43) in sich; denn unter
Voraussetzung der gleichmässigen Konvergenz darf man die Reihe auf der rechten Seite von
n Gemässheit des Weierstrass'schen Doppelreihen-Satzes formal nach steigenden Potenzen von
ordnen. Nach dem ersten Teil dieses Satzes muss dann der Koeffizient von $(x-a)^{\alpha+\beta-\varrho}$,
ich $\frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)}\left\{1+\frac{\varrho.\beta}{1.(\alpha+1-\varrho)}+\frac{\varrho(\varrho-1)\beta(\beta-1)}{1.2(\alpha+1-\varrho)(\alpha+2-\varrho)}+.....\right\}$
bestimmte endliche Zahl sein, und dazu ist notwendig, dass der reelle Teil von $\alpha+\beta+1>0$
Überhaupt kann der Satz 44) auch an der Hand des Weierstrass'schen Doppelreihensatzes
rch bewiesen werden, dass man die rechte Seite unter der Bedingung der gleichmässigen Kon-
enz formal nach steigenden Potenzen von x—a ordnet.

Ersetzen wir, um eine bemerkenswerte Folgerung aus 44) zu ziehen, die dortigen Grössen $f_\alpha(x)$, $\varphi_\beta(x)$ der Reihe nach durch $--1$, $\left[\partial_x^\varrho f_\alpha(x)\right]_a^x$, $\varphi_\beta(--x)$, so erhalten wir nach 42):

45. $$\left\{\partial_x^{-1}\left[\partial_x^\varrho f_\alpha(x)\right]_a^x \varphi_\beta(-x)\right\}_a^x = \left[\partial_x^{\varrho-1} f_\alpha(x)\right]_a^x \varphi_\beta(-x) + \left[\partial_x^{\varrho-2} f_\alpha(x)\right]_a^x \varphi'_\beta(-x) + \left[\partial_x^{\varrho-3} f_\alpha(x)\right]_a^x \varphi''_\beta(-x)$$

falls diese Reihe gleichmässig konvergiert. Es ist dies die Verallgemeinerung jener „nützliche Formel, die Herr Kronecker abgeleitet und mannigfach verwendet hat; denn für $\varrho = n$, $\alpha = 0$, $\beta =$ geht 45) über in:

$$\int_a^x f^{(n)}(x)\,\varphi(-x)\,dx = f^{(n-1)}(x)\,\varphi(-x + f^{(n-2)}(x)\,\varphi'(-x) + f^{(n-3)}(x)\,\varphi''(-x) + \ldots\ldots + f^{(n-n)}(x)\,\varphi^{(n-1)}$$

$$+ \left[\partial_x^{-1} f(x)\right]_a^x \varphi^{(n)}(-x) + \left[\partial_x^{-2} f(x)\right]_a^x \varphi^{(n+1)}(-x) + \ldots\ldots\ldots$$

$$= \sum_1^n{}_h \left\{ f^{(h-1)}(x)\,\varphi^{(n-h)}(-x)\right\} + \left[\partial_x^{-1} f(x)\,\varphi^{(n)}(-x)\right]_a^x, \text{ d. h.}$$

$$\int_a^x f^{(n)}(x)\,\varphi(-x)\,dx - \int_a^x f(x)\,\varphi^{(n)}(-x)\,dx = \sum_1^n{}_h \left\{ f^{(h-1)}(x)\,\varphi^{(n-h)}(-x)\right\}.$$ [1]

Durch Differentiation erhalten wir aus 45):

46. $$\left[\partial_x^\varrho f_\alpha(x)\right]_a^x \varphi_\beta(-x) = \frac{d\left[\partial_x^{\varrho-1} f_\alpha(x)\right]_a^x \varphi_\beta(-x)}{dx} + \frac{d\left[\partial_x^{\varrho-2} f_\alpha(x)\right]_a^x \varphi'_\beta(-x)}{dx} + \frac{d\left[\partial_x^{\varrho-3} f_\alpha(x)\right]_a^x \varphi''_\beta(-x)}{dx} +$$

unter der Bedingung der gleichmässigen Konvergenz dieser Reihe. In ganz ähnlicher Weise, die vorige, geht diese Formel für $\varrho = n$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$ über in:

$$f^{(n)}(x)\,\varphi(-x) - f(x)\,\varphi^{(n)}(-x) = \sum_1^n{}_h \frac{d f^{(h-1)}(x)\,\varphi^{(n-h)}(-x)}{dx}$$ [2]

Auch die Hauptsätze über das Ableiten einer Funktion von einer Funktion gelten für liebig komplexen Index: zunächst ist

47. $$\left[\partial_x^\varrho f_\alpha(x)\right]_a^x = \lim_{\varepsilon=0}\left[\partial_\varepsilon^\varrho f_\alpha(x+\varepsilon)\right]_{a-x}^x;$$

denn $$\left[\partial_\varepsilon^\varrho f_\alpha(x+\varepsilon)\right]_{a-x}^x = \frac{(\varepsilon-a+x)^{\alpha-\varrho}\,\Pi(\alpha)}{2\pi i\,\Pi(\alpha-\varrho)} \int_{(a-x)} \frac{f(x+u)}{u-a+x}\, F\left(\alpha+1,\ 1,\ \alpha+1-\varrho,\ \frac{\varepsilon-a+x}{u-a+x}\right) d$$

geht durch die Substitution $u = z - x$ über in

$$\frac{(\varepsilon-a+x)^{\alpha-\varrho}\,\Pi(\alpha)}{2\pi i\,\Pi(\alpha-\varrho)} \int_{(a)} \frac{f(z)}{z-a}\, F\left(\alpha+1,\ 1,\ \alpha+1-\varrho,\ \frac{\varepsilon-a+x}{z-a}\right) dz$$ — und diese Grösse wird für

---

[1] Kronecker, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1885 F. J.

[2] Ebendaselbst F. D.

$$\frac{(x-a)^{\alpha-\varrho}}{2\pi i\,\Pi(\alpha-\varrho)}\int_{(a)}\frac{f(z)}{z-a}\,F\left(\alpha+1,\,1,\,\alpha+1-\varrho,\,\frac{x-a}{z-a}\right)dz=\left[\partial_x^{\varrho} f_\alpha(x)\right]_a^x.$$

Ferner ist:

$$\left[\partial_x^{\varrho} f_\alpha(ax+b)\right]_c^x = a^{\varrho}\left[\partial_u^{\varrho} f_\alpha(u)\right]_{ac+b}^u \quad \text{für } u=ax+b;$$

ım, ist c Windungspunkt von $f_\alpha(ax+b)$ und zwar dergestalt, dass $(x-c)^{-\alpha} f_\alpha(ax+b)$ in der ıgebung von c eindeutig wird, so ist nach 1)

$$\left[f_\alpha(ax+b)\right]_c^x=\frac{(x-c)^{\alpha-\varrho}\,\Pi(\alpha)}{2\pi i\,\Pi(\alpha-\varrho)}\int_{(c)}\frac{f_\alpha(az+b)\,(z-c)^{-\alpha}}{z-c}\,F\left(\alpha+1,\,1,\,\alpha+1-\varrho,\,\frac{x-c}{z-c}\right)dz.$$

Substituieren wir nun in das Integral $az+b=v$, so erhalten wir

$$\left[f_\alpha(ax+b)\right]_c^x=\frac{a^{\varrho-\alpha}\,(u-ac-b)^{\alpha-\varrho}\,\Pi(\alpha)}{2\pi i\,\Pi(\alpha-\varrho)}\int_{(ac+b)}\frac{f_\alpha(v)\,a^{\alpha}(v-ac-b)^{-\alpha}}{v-ac-b}F\left(\alpha+1,1,\alpha+1-\varrho,\frac{u-ac-b}{v-ac-b}\right)dv,$$

h., da der Punkt $u=ac+b$ dergestalt Windungspunkt für $f_\alpha(u)$ ist, dass $f_\alpha(u).(u-ac-b)^{-\alpha}$ der Umgebung des Punktes $u=ac+b$ einändrig ist:

$$\left[f_\alpha(ax+b)\right]_a^x=a^{\varrho}\left[\partial_u^{\varrho} f_\alpha(u)\right]_{ac+b}^u,$$ wenn nach vollzogenem Ableitungs-Prozess u durch ax+b er-

zt wird.

Der Satz 48) scheint mir besonders dringend für die Einführung der begrenzten Bruch-eitungen zu sprechen; zu welchen Konzessionen man hinsichtlich dieses Satzes bei der Theorie unbegrenzten Ableitungen getrieben wird, zeigen die diesen Punkt betreffenden Bemerkungen tinger's [1])

Auch der allgemeine Hoppe'sche Satz über die Ableitung einer Funktion von einer Funk- gilt für beliebig komplexen Zeiger unter einschränkenden Konvergenz-Bedingungen. Für den veis desselben ist der Gedankengang, den Ubbo H. Meyer[2]) im Falle eines positiv ganzzahligen gers einschlägt, auch für den Fall eines beliebigen Zeigers verwendbar: es sei $y=\varphi(x)$, $f(y)$ $[\varphi(x)]$. Dann ist nach 47)

$$f\left\{\varphi(x)\right\}\Big]_a^x=\lim_{\varepsilon=0}\left[\partial_\varepsilon^{\varrho} f\left\{\varphi(x+\varepsilon)\right\}\right]_{a-x}^{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon=0}\left[\partial_\varepsilon^{\varrho} f\left\{\varphi(x)+\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)\right\}\right]_{a-x}^{\varepsilon}.$$

Setzen wir nun $\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)=\Theta$, und entwickeln $f(y+\Theta)$ in die Bürmann'sche Reihe, so ılten wir

$$f\left\{\varphi(x)\right\}\Big]_a^x=\lim_{\varepsilon=0}\left[\partial_\varepsilon^{\varrho}\left\{f(y)+f'(y)\cdot\Theta+f''(y)\,\frac{\Theta^2}{1.2}+f'''(y)\,\frac{\Theta^3}{1.2.3}+\cdots\right\}\right]_{a-x}^{\varepsilon}.$$

Da nun $f(y)$ und seine höheren Differential-Quotienten von ε unabhängig sind, so ergiebt sich:

---

[1]) Vergleiche Crelle's Journal Bd. 44. S. 43.

[2]) Sur les dérivées d'une fonction de fonction. Grunert's Archiv IV.

49. $\left[\partial_x^\varrho f\{\varphi(x)\}\right]_a^x = B_0 f(y) + B_1 f'(y) + B_2 f''(y) + \ldots\ldots$

für $y = \varphi(x)$ und

$B_k = \frac{1}{k!} \lim_{\varepsilon=0} \left[\partial_\varepsilon^\varrho \Theta^k\right]_{a-x}^{\varepsilon} = \frac{1}{k!} \lim_{\varepsilon=0} \left[\partial_\varepsilon^\varrho \{\varphi(x+\varepsilon) - \varphi(x)\}^k\right]_{a-x}^{\varepsilon}$, oder nach 47)

$B_k = \frac{1}{k!} \left\{\left[\partial_x^\varrho y^k\right]_a^x - k_1 \cdot y \left[\partial_x^\varrho y^{k-1}\right]_a^x + k_2 y^2 \left[\partial_x^\varrho x^{k-2}\right]_a^x - + \ldots . \pm k_k y^k \left[\partial_x^\varrho y^0\right]_a^x\right\}$, oder

$B_k = \frac{y^k}{k!} \left[\partial_x^\varrho \left(\frac{y}{\gamma} - 1\right)^k\right]_a^x$, falls γ beim Ableiten als konstant angesehen und nach demselben durch ersetzt wird.

Bedingungen für die Gültigkeit von 49) sind, dass die ursprüngliche Bürmann'sche Entwickelung sowohl, wie die resultierende Reihe 49) gleichmässig konvergent sind.

Der eben bewiesene Satz bildet die Verallgemeinerung zu der „Entwickelung der höheren Differential-Quotienten einer Funktion von z nach denen der Potenzen von z."[1]) Diese Verallgemeinerung konnte von Liouville[2]) seiner Zeit nicht wohl gefunden werden, da der spezielle Hoppe'sche Satz noch nicht bekannt war.

Endlich ein Satz, der die Verallgemeinerung bildet zu der Thatsache, dass man den n[ten] Differential-Quotienten einer Funktion durch eine Rekursionsformel finden kann, falls diese Funktion eine lineare Differential-Gleichung mit ganzen rationalen Funktionen als Koeffizienten befriedigt.

50. Genügt die abzuleitende Funktion einer Fuchs'schen[3]) homogenen Differential-Gleichung n[ter] Ordnung mit k singulären Punkten, so befriedigt jede, zwischen einem dieser singulären Punkte einerseits und der unabhängig Variabeln andrerseits genommene Ableitung eine ebensolche Differential-Gleichung höchstens von der Ordnung mk mit denselben k singulären Punkten.

Beweis. Es genüge die abzuleitende Funktion y der Differential-Gleichung

$$\psi^m \frac{d^m y}{dx^m} = F_{k-1}(x)\, \psi^{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + F_{2k-2}(x)\, \psi^{m-2} \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots\ldots + F_{mk-m}(x) \cdot y,$$

wo $\psi = (x-a_1)(x-a_2) \ldots\ldots (x-a_k)$, und

$F_l(x)$ eine ganze, rationale Funktion höchstens vom Grade l ist.

Dann ist diese Gleichung eine Identität; leiten wir sie also mit $\varrho + mk - m$ nach x zwischen einem der singulären Punkte a_l und x gliedweise ab, so haben zunächst die Ableitungen der einzelnen Glieder gemäss der Definition 1) Sinn; ferner sind wir sicher, durch das Ableiten wieder eine Identität zu erhalten, da ja der Ableitungs-Prozess eindeutig ist. Wenden wir nun beim Ableiten der einzelnen Glieder den Satz 44) an, so bricht die Entwickelung nach diesem Satze ab, falls wir als die zu differentiierenden Funktionen $\varphi_\beta(x)$ die ganzen, rationalen wählen. Diese

---

[1]) Hoppe, Theorie der höheren Differential-Quotienten S. 39. F. (6).

[2]) Sur le changement de la variable indépendante dans le calcul de différentielles à indices quelquonques. Journal polytechnique, cah. XXIV (1835).

[3]) Zur Theorie der linearen Differential-Gleichungen mit veränderlichen Koeffizienten. 4. Borchardt's Journal

kelungen gelten also ohne beschränkende Konvergenz-Bedingungen. Ferner ist es nach 42) ier, dass $\left[\partial_x^\varrho \frac{d^n y}{dx^n}\right]_{a_1}^{x} = \frac{d^n \left[\partial_x^\varrho y\right]_{a_1}^{x}}{dx^n}$ ist, falls a_1 wirklich ein Windungspunkt von y ist, aber nur n, wegen der Einschränkung zu 42). Wir erhalten also, wenn wir $\left[\partial_x^\varrho y\right]_{a_1}^{x} = Y$ setzen, eine ntität von der Form:

$$\frac{d^{mk}Y}{dx^{mk}} = \overline{F}_{k-1}(x)\,\psi^{m-1}\frac{d^{mk-1}Y}{dx^{mk-1}} + \overline{F}_{2k-2}(x)\,\psi^{m-2}\frac{d^{mk-2}Y}{dx^{mk-2}} + \ldots\ldots \overline{F}_0(x)\,Y.$$ [1])

h. $Y = \left[\partial_x^\varrho y\right]_{a_1}^{x}$ genügt einer Fuchs'schen Differential-Gleichung mkter Ordnung mit den k sinären Punkten der erzeugenden Differential-Gleichung.

In besonders einfachen Fällen erhält man aus der erzeugenden Differential-Gleichung in y urch, dass man sie mit ϱ ableitet und $\partial_x^\varrho y = Y$ setzt, eine Gleichung in Y, welche dieselbe m hat, wie die erzeugende. Dadurch findet ein Punkt seine Erklärung, den Spitzer berührt, m er sagt[2]): „es ist eine, mir äusserst merkwürdig vorkommende Erscheinung, dass die Gleiung (19) $(m+x)z'' + [A+B+(\alpha-\beta)(m+x)]z' + A(\alpha-\beta)z = 0$ λmal differenziert, genau dieselbe m der Koeffizienten hat, wie die Gleichung in W, zu welcher man durch Annahme der Gleiung (19) in der Form $z = \int_{u_1}^{u_2} (x-u)^{\lambda-1} W\,du$ geführt wird. Ganz Ähnliches begegnete mir bei ern linearen Differential-Gleichungen, die komplicirteren Bau haben, als die Gleichung (19)."

Inderthat liefert nach 4) eine Summe von Ableitungen der Funktion y ein Integral von der n $\int_{u_1}^{u_2} (x-u)^{\lambda-1} W\,du$.

Die Beschränktheit des mir zu Gebote stehenden Raumes zwingt mich, hier abzubrechen; es einer späteren Gelegenheit die Behandlung von Ableitungen mit unendlicher unterer Grenze, die Anwendung der aufgestellten Prinzipien vorbehalten bleiben.

---

[1]) $\overline{F}_1(x)$ bezeichnet wiederum eine ganze rationale Funktion höchstens vom Grade 1, aber selbverständlich eine , wie oben.

[2]) Spitzer, Studien über die Integration linearer Differential-Gleichungen. S. 21. Anmerkung 1)

Sur les équations différentielles linéaires qui sont de la même espèce;

PAR M. ALFRED LOEWY.

« Soient

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n(x)y = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d^{n_1} z}{dx^{n_1}} + q_1(x)\frac{d^{n_1-1}z}{dx^{n_1-1}} + \ldots + q_{n_1}(x)z = 0 \qquad (n_1 \leq n), \tag{2}$$

deux équations différentielles linéaires et homogènes à coefficients rationnels; nous supposons que la transformation

$$z = a_0(x)y + a_1(x)\frac{dy}{dx} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

fasse passer des intégrales de l'équation (1) aux intégrales de l'équation (2), les coefficients $a_0(x)$, $a_1(x)$, ..., $a_{n-1}(x)$ étant des fonctions rationnelles de la variable x. On dit que l'équation (2) est de la même espèce que (1). Si $n = n_1$, le rapport est réciproque, l'équation (1) est aussi de la même espèce que (2). Si $n_1 < n$, l'équation (1) est réductible; dans ce cas il existe toujours une équation différentielle linéaire et homogène à coefficients rationnels dont (1) admet toutes les intégrales.

» I. Cela posé, nous désignons par $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un système fondamental d'intégrales de l'équation (1) et nous formons les $\frac{n(n+1)}{2}$ fonctions

$$\left(\frac{d^\alpha y_i}{dx^\alpha}\right)^2, \quad \frac{d^\alpha y_i}{dx^\alpha}\frac{d^\alpha y_k}{dx^\alpha} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

» Ces fonctions sont les intégrales d'une équation différentielle linéai et homogène à coefficients rationnels $H_\alpha = 0$, dont l'ordre est $\leq \frac{n(n+1)}{2}$.

» Nous considérons l'infinité d'équations

$$H_0 = 0, \qquad H_1 = 0, \qquad H_2 = 0, \qquad \ldots,$$

qui correspondent à toutes les valeurs possibles de $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$.

» L'une quelconque de ces équations est toujours de la même espè que les diverses équations de la suite infinie qui sont de l'ordre $\frac{n(n+}{2}$

» II. Nous formons les $\frac{n(n+1)}{2}$ fonctions (α étant différent de β) :

$$\frac{d^\alpha y_i}{dx^\alpha}\frac{d^\beta y_i}{dx^\beta}, \quad \frac{d^\alpha y_i}{dx^\alpha}\frac{d^\beta y_k}{dx^\beta} + \frac{d^\beta y_i}{dx^\beta}\frac{d^\alpha y_k}{dx^\alpha} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

» Ces fonctions satisfont à une équation différentielle linéaire et hon gène à coefficients rationnels $H_{\alpha\beta} = 0$, dont l'ordre est $\leq \frac{n(n+1)}{2}$. N considérons la suite doublement infinie d'équations $H_{\alpha\beta} = 0$ qui corr pondent à toutes les valeurs possibles de α et β. Nous avons la suite :

$$\begin{aligned} &H_{01} = 0, \qquad H_{02} = 0, \qquad H_{03} = 0, \qquad \ldots, \\ &H_{12} = 0, \qquad H_{13} = 0, \qquad H_{14} = 0, \qquad \ldots, \\ &H_{23} = 0, \qquad H_{24} = 0, \qquad H_{25} = 0, \qquad \ldots. \end{aligned}$$

» L'une quelconque des équations $H_{\alpha\beta} = 0$ de cette suite doublem infinie est toujours de la même espèce que les diverses autres équati de la suite doublement infinie $H_{\alpha\beta}$ aussi bien que de la suite infinie supposé que les équations correspondantes ont l'ordre $\frac{n(n+1)}{2}$. De m chaque équation de la suite H_α est de la même espèce qu'une équation de l'ordre $\frac{n(n+1)}{2}$.

» III. Nous formons les n^2 fonctions

$$\frac{d^\alpha y_i}{dx^\alpha}\frac{d^\beta y_i}{dx^\beta}, \quad \frac{d^\alpha y_i}{dx^\alpha}\frac{d^\beta y_k}{dx^\beta} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

» Ces fonctions satisfont à une équation différentielle linéaire et ho gène à coefficients rationnels $L_{\alpha\beta} = 0$; l'ordre de cette équation $L_{\alpha\beta}$ est Si l'on donne à α et β toutes les valeurs possibles 0, 1, 2, ..., on a une s

doublement infinie d'équations

$$\begin{array}{llll} L_{01}=0, & L_{02}=0, & L_{03}=0, & \ldots, \\ L_{12}=0, & L_{13}=0, & L_{14}=0, & \ldots, \\ L_{23}=0, & L_{24}=0, & \ldots\ldots, & \ldots. \end{array}$$

» Toutes les équations $L_{\alpha\beta}$ de l'ordre n^2 sont de la même espèce, et une équation d'un ordre inférieur, appartenant à la suite doublement infinie des équations $L_{\alpha\beta}=0$, est toujours de la même espèce qu'une équation quelconque de la suite qui a l'ordre n^2.

» Chaque équation $L_{\alpha\beta}=0$ est réductible; elle admet toutes les intégrales de l'équation $H_{\alpha\beta}=0$ et d'une autre équation différentielle linéaire et homogène à coefficients rationnels $G_{\alpha\beta}=0$. Sur l'équation $G_{\alpha\beta}=0$, qui est de l'ordre $\leq \frac{n(n-1)}{2}$ et qui a les $\frac{n(n-1)}{2}$ fonctions

$$\frac{d^\alpha y_i}{dx^\alpha}\frac{d^\beta y_k}{dx^\beta}-\frac{d^\alpha y_k}{dx^\alpha}\frac{d^\beta y_i}{dx^\beta} \qquad (\alpha \gtrless \beta),$$

pour intégrales, on a appelé l'attention des analystes déjà à plusieurs reprises; d'après la terminologie de M. Schlesinger, l'équation $G_{\alpha\beta}=0$ est une équation associée à l'équation (1). Si l'on connaît un système fondamental d'intégrales de $H_{\alpha\beta}=0$ et de même de $G_{\alpha\beta}=0$, on a intégré complètement $L_{\alpha\beta}=0$.

» Si l'équation (1) et son adjointe de Lagrange

$$\frac{d^n z}{dx^n}-\frac{d^{n-1}(p_1 z)}{dx^{n-1}}+\frac{d^{n-2}(p_2 z)}{dx^{n-2}}-\ldots-(-1)^n p_n z=0$$

sont de la même espèce, il y a toujours dans la suite doublement infinie $L_{\alpha\beta}=0$ des équations qui ont une intégrale rationnelle.

» Pour que l'équation (1) et son adjointe de Lagrange soient de la même espèce, il est nécessaire que chaque équation $L_{\alpha\beta}=0$ d'un ordre n^2 ait une intégrale rationnelle.

» Si l'une quelconque des équations $L_{\alpha\beta}=0$ est d'ordre n^2 et a une intégrale rationnelle, l'équation (1) et son adjointe de Lagrange sont de la même espèce, ou l'équation (1) est réductible et une équation, dont toutes les intégrales sont aussi des intégrales de l'équation (1), est de la même espèce que l'adjointe de Lagrange de l'équation (1).

» En général, c'est-à-dire si l'équation (1) est prise arbitrairement, chaque équation $L_{\alpha\beta}=0$ est d'ordre n^2 et non d'un ordre inférieur; car

s'il n'y a pas une relation linéaire et homogène à coefficients constants entre les n^2 produits $y_i^{(\alpha)} y_k^{(\beta)}$, l'équation $L_{\alpha\beta} = 0$ est nécessairement d'ordre n^2. La formation de l'équation $L_{\alpha\beta} = 0$ est simple; de là résulte une condition nécessaire et suffisante pour les équations différentielles linéaires et homogènes, dont les intégrales satisfont à une telle relation. Si l'on adjoint, dans le cas d'une équation générale (1), au domaine de rationalité une fonction quelconque de x satisfaisant à une équation quelconque de la suite $L_{\alpha\beta} = 0$, après l'adjonction l'équation (1) et son adjointe de Lagrange sont de la même espèce, ou l'équation (1) devient réductible et, dans le domaine de rationalité plus étendu, une équation linéaire et homogène dont toutes les intégrales satisfont à l'équation (1) est de la même espèce que l'adjointe de Lagrange de l'équation (1). »

(30 décembre 1901.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENC
31278 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

Lorenz C.

Separat-Abdruck

s „Monatshefte für Mathematik und Physik“. XIII. Jahrg.

Die eigentlichen dreifachen Integrale.[1]

Von **Carl Lorenz** in Waidhofen a. T.

I. Abschnitt.

Das eigentliche Tripelintegral.

§. 1. Das Erste, was hier sogleich zu fixiren ist, ist die klärung des stetigen Bereiches dreier Dimensionen. Bereits in Lehre des einfachen bestimmten Integrals müssen wir vom igen Bereiche einer Dimension Gebrauch machen, indem wir Bereich einer Dimension zwischen den Grenzen desselben be-hten. Als einfaches Beispiel zur Erläuterung desselben können die Gesammtheit aller reellen Zahlen auf der Zahlenlinie an-ren. Wenn wir die Gesammtheit dieser Zahlen als eine Man-faltigkeit einer Dimension bezeichnen und zwei bestimmte len derselben festhalten, so heißt die Gesammtheit aller reellen len zwischen diesen festen mit Einschluss derselben ein aus der n genannten Mannigfaltigkeit herausgehobener stetiger Bereich. n Doppelintegral ist es analog, indem wir bei dessen Erklärung n stetigen Bereich zweier Dimensionen ins Auge fassen, welcher von allen Systemen von zwei von einander unabhängigen, len Zahlen x, y gebildeten Mannigfaltigkeit von zwei Dimen-en angehört. Dieser Bereich stellt sich als einfache, gewöhnliche, Endlichen liegende, von gewöhnlichen einfachen Rändern in icher Anzahl begrenzte Fläche dar, die ensteht, wenn man x und y als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes in der ne XOY construirt.

Ebenso werden wir verfahren bei unserem dreifachen Integrale r Function von drei Veränderlichen x, y, z. Hier beschänken das Integral auf einen stetigen, zusammenhängenden Bereich er Dimensionen, den wir aus der von allen Systemen (oder len) der von einander unabhängigen reellen Zahlen x, y, z ge-eten dreidimensionalen Mannigfaltigkeit herausnehmen.

Sehen wir vorläufig von der etwas complicirten analytischen stellung dieses Bereiches ab, und sehen wir vorerst auf seine

[1]) Übertragung des Verfahrens, nach welchem O. Stolz die Lehre von den flichen Doppelintegralen in dem 1899 erschienenen 3. Theile seiner „Grund-der Differential- und Integralrechnung“ behandelt, auf diese nächst höheren rale.

geometrische Darstellung, so ist klar, dass derselbe so entst
wenn man x, y und z als die rechtwinkligen, räumlichen Coordin
eines Punktes betrachtet, so erhält man, falls man diese constr
als stetigen Bereich dreier Dimensionen jeden im Endlichen lie
den von gewöhnlichen, einfachen Oberflächen in endlicher An
begrenzten Körper $\mathfrak{K}$, wo „gewöhnlich" auch hier eine der
üblichen analoge Bedeutung hat.

Nachdem wir so den Bereich dreier Dimensionen anscha
erklärt haben, wollen wir doch noch in Kürze auf dessen an
sche Darstellung Rücksicht nehmen. Obwohl wir es im Folge
fast ausschließlich nur mit der geometrischen Darstellung zu
haben werden, so dürfen wir dennoch keineswegs die analyt
Darstellung außeracht lassen, zumal dieselbe bei den höhere
tegralen geradezu unentbehrlich ist.

Ich entnehme das nun Folgende dem Werke von O.
„Grundzüge der Differential- und Integralrechnung III", pag
bis 119, wo diese Darstellung in allgemeiner Weise characterisi

Analytisch lässt sich ein dreidimensionaler stetiger B
folgendermaßen erklären:

1. Alle zu sämmtlichen Punkten des Bereiches geh
Werte einer und derselben Coordinate x, y und z liegen zwi
zwei endlichen Grenzen:

$$a \leqq x \leqq a'; \quad b \leqq y \leqq b'; \quad c \leqq z \leqq c'.$$

2. Das System ist vollständig.

3. Unter den Punkten des Systems sollen Innenpunkt
handen sein, d. h. Punkte mit aus Systempunkten gebildete
gebung. (Punkte, die nicht dem Systeme der dreidimensi
Mannigfaltigkeit x, y, z angehören, heißen Außenpunkte.)

4. Seien A und B irgend zwei Punkte des Systems n
Coordinaten $(x_1\ y_1\ z_1)$ resp. $(x_2\ y_2\ z_2)$ und ε eine beliebige p
Zahl; lässt sich nun zwischen A und B eine aus Innenp
des Systems in endlicher Anzahl gebildete Kette $A_1\ A_2$
einschalten, dass A_1 zur Umgebung ε von A, A_2 zur Um
ε von A_1 u. s. w. gehört, endlich B zur Umgebung ε von A
so viel heißt, als dass z. B. unter Umgebung ε des P
$A_1 \equiv (x_1'\ y_1'\ z_1')$ die Gesammtheit aller Punkte x, y, z verstande
wofür x einen Wert zwischen $x_1' - \varepsilon$ und $x_1' + \varepsilon$, y einen zw
$y_1' - \varepsilon$ und $y_1' + \varepsilon$ und endlich z einen zwischen $z_1' -$
$z_1' + \varepsilon$ hat.

Der oben genannte Körper $\mathfrak{K}$ oder wie wir im Fo
der Kürze halber sagen werden, der Körper $\mathfrak{K}$ kann ebenf
einem Vorzeichen versehen werden, und zwar werden wir
folgender Weise als positiv oder negativ unterscheiden. Wir
uns z. B. parallel der XY-Ebene einen Schnitt durch
Körper gelegt, so wird dieser denselben in einer gewöh

Endlichen gelegenen von einfachen Rändern in endlicher An-
nl begrenzten Fläche schneiden. Denken wir uns nun einen
nkt auf der Oberfläche dieses Körpers aber außerhalb unserer
ene z. B. der Einfachheit wegen in der Z-Axe, so heißt das-
nige Stück des Körpers, das von diesem Punkte aus übersehen
rd, positiv oder negativ, je nachdem von dort aus der Umlaufsinn
ser obengenannten Schnittfläche, der ja ein für allemal in der
ene festgesetzt ist, positiv oder negativ, d. h. entgegengesetzt
r Bewegung eines Uhrzeigers oder im Sinne desselben ist.

Noch zu bemerken ist, dass der Körper $\mathfrak{K}$, wenn er als Ge-
t vorkommt, über das das dreifache Integral zu erstrecken ist,
mer mit seinem Zeichen genommen anzusehen ist.

Theilung des dreidimensionalen Integrationsgebietes.

§. 2. Den Körper $\mathfrak{K}$ erfüllen wir mit einem System von
lyedern, die von ebenen Seitenflächen allseitig begrenzt werden.
es machen wir so, dass wir an den äußersten Punkten des
rpers $\mathfrak{K}$ parallele Ebenen zur XY-, XZ- und YZ-Ebene, d. i.
n drei Coordinatenebenen legen. Diese werden die drei Coordi-
enaxen in den bezüglichen Punkten C, C'; B, B'; und A, A' treffen
l nun theilen wir auf jeder Axe das bezügliche Intervall $[A\,A']$,
$B']$ und $[C\,C']$ in beliebige Theile, so $[A\,A']$, das auf der X-Axe
egene Intervall in Theile δ_r mit den bezüglichen Theilpunkten

$$A_1, A_2 \ldots A_{n-1}, \; A_n = A',$$

h. wenn $O\,A = a$, $O\,A' = a'$ ist, so ist das Intervall $[A\,A'] = a' - a$ und es ist also

$$a' - a = \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n$$

$O\,A = a$, $O\,A_1 = a + \delta_1$, $O\,A_2 = a_1 + \delta_2 \ldots O\,A_n = O\,A' = a_{n-1} + \delta_n$, wo $a_1 = a + \delta_1$, $a_2 = a_1 + \delta_2 \ldots a_{n-1} = a_{n-2} + \delta_{n-1}$, $a_n = a' = a_{n-1} + \delta_n$ ist.

Desgleichen theilen wir, wenn $[B\,B']$ das Intervall auf der Axe bedeutet und $O\,B = b$, $O\,B' = b'$ ist, dieses in m Theile $s = 1, 2, \ldots, m$), so dass

$$[B\,B'] = b' - b = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_m$$

und wenn $B_1, B_2 \ldots B_m = B'$ die bezüglichen Theilungspunkte
euten, $O\,B = b$, $O\,B_1 = b + \varepsilon_1$, $O\,B_2 = b_1 + \varepsilon_2$, $O\,B_3 = b_2 + \varepsilon_3 \ldots O\,B_m = O\,B' = b_{m-1} + \varepsilon_m$ und $b_0 = b$, $b_1 = b + \varepsilon_1$, $= b_1 + \varepsilon_2 \ldots$ endlich $b_m = b' = b_{m-1} + \varepsilon_m$ ist.

Ebenso erfolgt eine Theilung des Intervalles $[C\,C']$ auf der Axe in t Theile $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t$, so dass, wenn $O\,C = c$, $O\,C' = c'$

$$c' - c = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_t$$

und $c_0 = c,\ c_1 = c + \gamma_1,\ c_2 = c_1 + \gamma_2 \ldots c_t = c' = c_{t-1} + \gamma_t$

Seien die bezüglichen Theilpunkte $C_1\ C_2 \ldots C_t$, so ist

$$O\,C = c,\ O\,C_1 = c + \gamma_1 = c_1,\ O\,C_2 = c_1 + \gamma_2 = c_2 \ldots O\,C' =$$
$$= c_{t-1} + \gamma_t = c_t = c'.$$

Durch diese einzelnen Theilpunkte legen wir parallele Ebe zu den Coordinatenebenen und zwar durch jeden Punkt A_r (r $= 1, 2, \ldots, n$) eine parallele Ebene zur Ebene YZ, durch je Theilungspunkt B_s ($s = 1, 2, \ldots, m$) eine parallel der Ebene XZ durch jeden Punkt C_u ($u = 1, 2, \ldots t$) eine parallele Ebene zur ordinatenebene XY. Dadurch zerfällt der Körper $\mathfrak{K}$, resp. Parallelepiped, das ihn umschließt, in kleine Parallelepipede m. an der Zahl, die sich in folgende drei Gruppen scheiden las 1. solche, die ganz außerhalb $\mathfrak{K}$ liegen, d. h. gar keinen Pu mit $\mathfrak{K}$ gemein haben, 2. solche, die ganz innerhalb $\mathfrak{K}$ gelegen s d. h. nur Punkte von $\mathfrak{K}$ enthalten, und endlich 3. solche, theils innerhalb, theils außerhalb von $\mathfrak{K}$ liegen. (Wenn das Para epiped zwischen den Abscissen a, a', den Ordinaten b, b' den Applicaten c, c' selbst das Gebiet $\mathfrak{K}$ ist, entfällt natürlich Eintheilung, denn wir haben da nur die Classe 2.)

Um diese oben beschriebene Theilung uns ganz klar zu mac wollen wir an einer Figur die Theilung des Gebietes $\mathfrak{K}$ n betrachten.

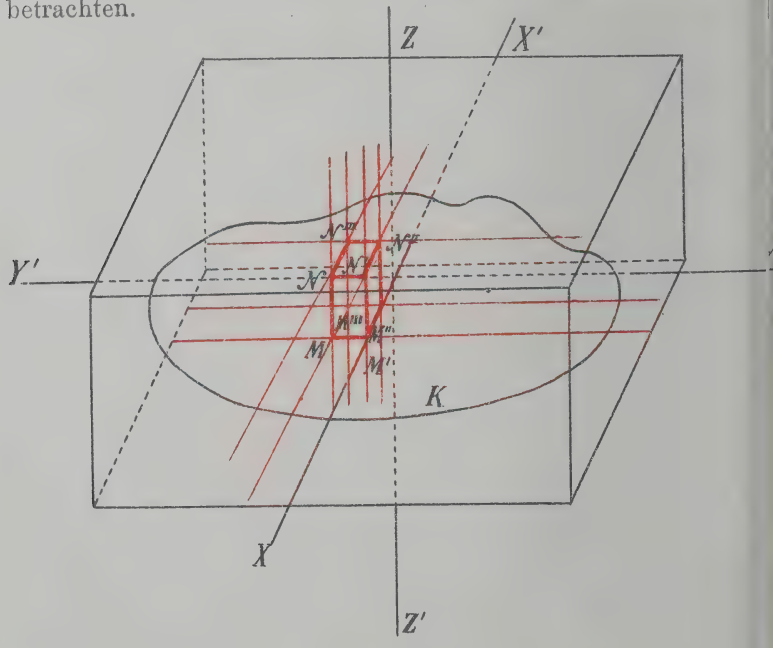


Fig. 1.

Wir erhalten also durch diese Theilung solche kleine Parallelpede $M M' M'' M''' N N' N'' N''' = \delta_r \cdot \varepsilon_s \cdot \gamma_u$, wo die $M^{(\varkappa)}$ ($\varkappa = 0, 1, 2, 3$) die bezüglichen Coordinaten (a_r, b_{s-1}, c_{u-1}), (a_r, b_s, c_{u-1}), $_{-1}, b_s, c_{u-1})$ und $(a_{r-1}, b_{s-1}, c_{u-1})$, die $N^{(l)}$ ($l = 0, 1, 2, 3$) die ordinaten (a_r, b_{s-1}, c_u), (a_r, b_s, c_u) (a_{r-1}, b_s, c_u) und (a_{r-1}, b_{s-1}, c_u) been sollen. Was das Zeichen dieser Parallelepipede anlangt, so d dasselbe analog dem des Körpers bestimmt. Wenn man nämlich dem Gange eines Uhrzeigers entgegengesetzten Umlauf als den itiven bezeichnet und in einer der beiden Grundflächen des smas einen bestimmten Umlauf festsetzt, so erscheint derselbe jedem Punkte der anderen Grundfläche aus entweder als poive oder negative Drehung und dieses Zeichen ist dann auch Zeichen des Parallelepipedes. Die Parallelepipede, die wir im hergehenden construiert haben, mögen sämmtliche das Zeichen Körpers $\mathfrak{K}$ haben, dessen Zeichen wir als gegeben voraussetzen. und $a' - a$, ebenso ε_s und $b' - b$, endlich γ_u und $c' - c$ haben ürlich dasselbe Vorzeichen, desgleichen $\delta_r \cdot \varepsilon_s \cdot \gamma_u$ und $\mathfrak{K}$, weshalb Zeichen von $a' - a$, $b' - b$ und $c' - c$ so sein muss, dass das chen ihres Productes mit dem von $\mathfrak{K}$ übereinstimmt. Nehmen also das Zeichen von $\mathfrak{K}$ positiv, so haben wir auch die Differenzen $a' - a$, $b' - b$ und $c' - c$ entsprechend zu nehmen, dass als Product eine positive Größe liefern. Dies können wir leicht erkstelligen, da uns die Wahl von a und a', b und b' und c c' freisteht, d. h. da es uns freisteht, von Vorneherein $a < a'$, b', $c < c'$ anzunehmen. Ferner wollen wir noch die δ_r, ε_s und jedes unbegrenzt und unumschränkt abnehmen lassen, damit es der $m n t$ Parallelepipede kleiner werden kann als jede ebig vorgegebene Zahl. Bezüglich der Theile $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, wir im Vorhergehenden als Parallelepipede angenommen haben, len wir keine weitere Annahme machen, sie vielmehr, wenn es zweckmäßig scheinen sollte, als Tetraeder, die uns besonders der Transformation der Tripelintegrale gute Dienste leisten den, voraussetzen und also sagen, wir erfüllen den Körper $\mathfrak{K}$ Tetraeder und zwar so, dass er gerade davon erfüllt ist und ei das Zeichen dieser Tetraeder mit dem von $\mathfrak{K}$ übereinstimmt. igens ändert es im Wesentlichen an der Sache nichts, wenn die Theile $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ als beliebige Polyeder annehmen, n sie nur $\mathfrak{K}$ gerade erfüllen. Betreffs des Zeichens können sie, wie schon bemerkt, wie den Körper $\mathfrak{K}$ als positiv anmen, da ja im anderen Falle das entgegengesetzte Zeichen ommen werden kann.

Allein noch ist es nicht an der Zeit, geraden Weges auf er in Aussicht genommenes Ziel loszusteuern, vielmehr müssen noch, um im Folgenden den Gang der Betrachtung nicht erbrechen zu müssen, noch einige Vorarbeit machen. So

stellt sich uns sogleich die Frage entgegen, wie wir etwa
Kürze dem Umstande Rechnung tragen könnten, dass ein Poly
unbegrenzt und unumschränkt abnehmen könne. Dies erreichen
durch Einführung des Durchmessers eines Polyeders. Damit
solches Polyeder ω_r nach den drei Dimensionen des Raumes
begrenzt abnehme, ist nur nothwendig, dass dessen Durchmesso
d. i. die größte seiner Sehnen, (wozu auch die Kanten zu rech
sind) sich unbegrenzt verkleinere. Der Inhalt eines solchen P
eders nimmt dann ebenfalls unbegrenzt ab und kann dann u
eine beliebig vorgegebene Zahl δ sinken. Denn es ist diesbe
lich leicht, eine obere Grenze für den Inhalt, den wir eben
mit ω_r bezeichnen wollen, eines solchen Polyeders aufzuste
Es ist nämlich $\omega_r < D_r^3$, d. h. der Inhalt eines solchen Poly
ist niemals größer als die dritte Potenz seines Durchmessers.

Sei D_r der Durchmesser eines Polyeders ω_r, so errichter
an seinen Endpunkten D_1, D_2 je eine normale Ebene zur Str
$D_1 D_2$. Dann kann sich natürlich kein Punkt von ω_r auße
dieses so begrenzten Raumes befinden. Nun legen wir durch
Linie $D_1 D_2$ eine beliebige Ebene z. B. der einfacheren Vo
lung wegen eine horizontale Ebene. Der am weitesten von d
Ebene entfernte Punkt oberhalb derselben sei E_1, der am weit
davon entfernte Punkt unterhalb E_2, so dass, falls h_1 resp. h
Abstände dieser Punkte von dieser Ebene bedeuten und G
ihre Fußpunkte, $G_1 E_1 = h_1$, $G_2 E_2 = h_2$ ist.

Wir legen nun durch $D_1 D_2$ noch eine zweite Ebene
recht auf diese erste, bei unserer Annahme also eine ver
Ebene und nennen die Abstände der am weitesten von dieser E
vorne und rückwärts liegenden Punkte F_1 und F_2 von ω_r h_1', re
Alsdann ist, wie leicht ersichtlich, $h_1 + h_2 \leqq D_r$, e
$h_1' + h_2' \leqq D_r$; denn wäre $h_1 + h_2 > D_r$ $(h_1' + h_2' > D_r)$, so wä
nicht mehr der Durchmesser des Polyeders, weil $E_1 E_2$
$(F_1 F_2 > D_r)$ wäre. Das Polyeder ω_r muss also innerhal
Parallelepipedes liegen, das entsteht, wenn wir durch E_1 u
je eine parallels Ebene legen zur erst angenommenen Ebene
$D_1 D_2$ und ebenso durch F_1 und F_2 je eine parallele Eber
zweiten durch $D_1 D_2$ angenommenen Ebene, d. h.

$$\omega_r \leqq (h_1 + h_2)(h_1' + h_2') D_r < D_r^3,$$

denn $(h_1 + h_2)(h_1' + h_2') D_r$ ist der Inhalt des Parallelepipede
ich gerade beschrieben, der gewiss kleiner als D_r^3 ist. Das Vo
ω_r unseres Polyeders wird also gewiss kleiner als δ, wenn D
ist, was wir durch beliebige Theilung erreichen können.

Als weitere Vorarbeit wollen wir uns die Aufgabe s
die Summe aller Polyeder ω_r abzuschätzen, die sämmtlich I

er gegebenen Oberfläche enthalten. Wir theilen zu diesem ecke wieder wie bei früherer Gelegenheit das Parallelepiped, erhalb dessen der Körper $\mathfrak{K}$ liegt, durch parallele Ebenen zu drei Coordinatenebenen im Abstande $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ resp. $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$, resp. $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t$ zwischen den bezüglichen Coordinaten a, a', b, b' und c, c' in kleine Parallelepipede. $\delta_r . \varepsilon_s . \gamma_u$ ist dann Inhalt eines beliebigen solchen kleinen Theiles ω_r. Δ sei das ßte aller Theilchen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, E das größte aller $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ endlich Γ das größte aller Theilchen $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$. Ferner wollen annehmen, dass unseren Körper $\mathfrak{K}$ je eine Parallele zu den drei ordinatenaxen in einer endlichen Anzahl von Punkten schneiden ge und zwar eine Parallele zur X-Axe in höchstens p, eine allel der Y-Axe in höchstens q und endlich eine Parallele zur Axe in höchstens r Punkten. Ferner möge keine der parallelen enen zur XY-Ebene, zur XZ- und endlich zur YZ-Ebene mit snahme der äußersten ein Stück mit $\mathfrak{K}$ gemein haben. Wenn liese Bedingung erfüllt, reicht folgender Beweis für jeden Körper aus. Um nun weiter zu kommen, wollen wir auch hier analog fahren, wie bei den Doppelintegralen. Wie man dort die geschlossene oder offene Linie auf die Y-Axe projicirt, so wollen hier ganz analog eine Projection unseres Körpers $\mathfrak{K}$ auf die -Ebene machen; da werden wir als dessen Projection gewisse ne Flächenstücke erhalten.

Sei nun Q die Summe der Projectionen der einzelnen Stücke $\mathfrak{K}$, d. h. die Gesammtfläche der Projection des Körpers $\mathfrak{K}$, r mit anderen Worten die Summe der absoluten Flächen der jectionen der einzelnen Stücke von $\mathfrak{K}$, bei deren Beschreibung y und z im nämlichen Sinne ändern, dann lautet unser Satz, die Summe Σ_1 derjenigen Parallelepipede $\delta_r \varepsilon_s \gamma_u$, durch welche Oberfläche unseres Körpers $\mathfrak{K}$ geht, stets kleiner ist, als

$$\Delta\, Q + 4\, r\, \Gamma\, (a' - a)\, (b' - b).$$

Ferner ist, da die Fläche zwischen BB' und CC' auf der -Ebene nicht öfter als p-mal überdeckt wird durch die Projion von $\mathfrak{K}$

$$Q \leqq (b' - b)\, (c' - c)\, .\, p,$$

weiterhin ist klar, dass, wenn unser Körper $\mathfrak{K}$ geschlossen die Zahlen p, q und r gerade sind.

Beweis: Der Nachweis dieses Satzes gestaltet sich etwas ständlich und schwierig so dass es sich als nothwendig herausen wird, ihn in mehrere Theile zu spalten. Vorerst versuchen wir. n Ausdruck für die Theilsumme von Σ_1 der Parallelepipede, durch die Oberfläche des Körpers $\mathfrak{K}$, welche wir mit $\mathfrak{R}$[1]) bezeichnen,

[1]) Manchmal bezeichnen wir auch den Körper selbst mit $\mathfrak{R}$.

geht, aufzustellen, jener Parallelepipede, in denen r und s d
selben Wert hat, die also alle über einem und demselben Parall
gramme $\delta_r . \varepsilon_s$ der Ebene XY aufstehen. Da können nun d
bezüglich zunächst zwei Fälle eintreten: 1. ein solches Paral
epiped enthält ein Stück der Oberfläche $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{K}$, das von
einen Seitenfläche des Parallelepipeds parallel zur XY-Ebene
gegenüberliegenden läuft und ebenso zugleich von der einen Seit
fläche parallel der XZ-Ebene zur gegenüberliegenden Seitenflä
des Parallelepipedes und 2. das Stück des $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{K}$ in dem
trachteten Parallelepipede reicht nicht so weit.

Wir betrachten also zunächst den ersten Fall. Was die
anlangt, so können wir sofort eine obere Grenze für den In

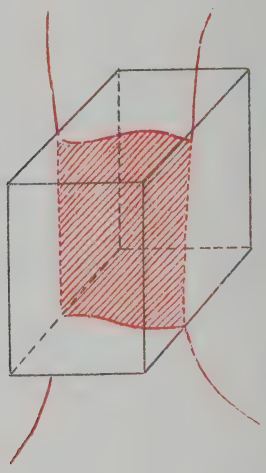


Fig. 2.

dieser Parallelepipede aufstellen. Es ist nämlich klar, dass der I
eines solchen Parallelepipedes nicht größer als $\Delta . E . \gamma_u$ sein k
Wenn $\mathfrak{R}$ mit jeder Seitenfläche von diesen beiden Seitenflä
paaren nur eine zusammenhängende offene oder geschlossene
gemein hat, (Fig. 2), so ist die Projection des innerhalb ur
Parallelepipedes liegenden Stückes von $\mathfrak{R}$ auf die YZ-E
$= \varepsilon_s \gamma_u$; wenn aber die Applicate von $\mathfrak{R}$ oder aber die Ord
von $\mathfrak{R}$ oder endlich beide zugleich den Sinn ihrer Änderung
halb des Parallelepipedes wechseln oder aber, wenn $\mathfrak{R}$ auc
mit einer Seitenfläche der vorhin genannten Paare von S
flächen des Parallelepipedes parallel der XY- resp. YZ-E
mehr als eine zusammenhängende offene oder geschlossene
gemein hat, so ist $\varepsilon_s \gamma_u$ kleiner als die Summe der Projectio
innerhalb des Parallelepipedes liegenden Stücke von $\mathfrak{R}$, in

m sich y und z im selben Sinne ändern, auf die YZ-Ebene. iren wir alle die Parallelepipede, die unter 1. fallen, so sehen dass ihre Summe nicht größer sein kann als $\Delta Q_{r,s}$, wo $Q_{r,s}$ Projectionen, d. h. die Summe der Projectionen aller in der c, die von den Ebenen im Abstande $x = a_{r-1}$, $x = a_r$ parallel YZ-Ebene und den zwei Ebenen parallel zur XZ-Ebene im ande $y = b_{s-1}$, $y = b_s$ gebildet wird, enthaltenen Theile $\Re$.

Den Fall 2 können wir wieder in drei Fälle spalten, je nachnämlich innerhalb des Parallelepipedes sich ein oder mehrere ke von $\Re$ befinden, wovon keines mit beiden zur XY-Ebene llelen Ebenen je einen Punkt gemein hat, oder von denen es mit beiden zur XZ-Ebene parallelen Ebenen je einen Punkt einsam hat, oder aber endlich, dass sich im Inneren des in acht gezogenen Parallelepipedes Stücke von $\Re$ befinden, von n keines überhaupt mit diesen beiden Ebenenpaaren je einen kt gemein hat. Wir wollen, um nicht so viel mit Worten n zu müssen, die einzelnen hier möglichen unter 2 gehörigen e einfach durch Figuren charakterisieren.

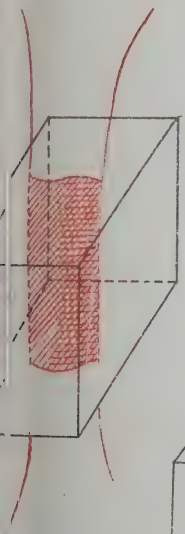


Fig. 3.

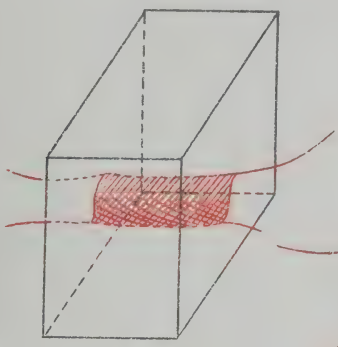


Fig. 4.

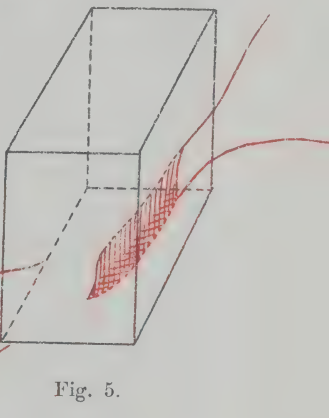


Fig. 5.

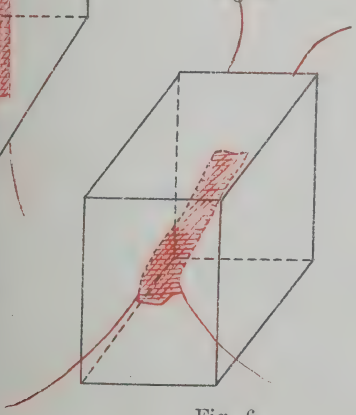


Fig. 6.

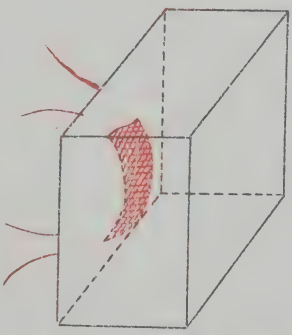


Fig. 7.

Zu Fig. 5 und Fig. 7 ist noch zu bemerken, dass, was i
für ein bestimmtes Seitenflächenpaar resp. für eine bestim
Seitenfläche gezeichnet ist, auch für alle übrigen bestehen k
also in Fig. 5 auch für zwei andere benachbarte Seitenflächen
Parallelepipedes. Damit wären die unter 2 gehörigen Fälle
ständig aufgezählt, und wir können nun im Folgenden daran g
auch in diesem Falle die Summe der Parallelepipede abzuschä
die einen Punkt der Oberfläche $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{K}$ enthalten.

Zu diesem Zwecke wollen wir annehmen, die Säule zwis
den parallelen Ebenen zur YZ-Ebene im Abstande $x = a_{r-1}$, x
von O und zwischen dem zur XZ-Ebene parallelen Ebenen
$y = b_{s-1}$, $y = b_s$ enthalte g Stücke von $\mathfrak{R}$, die nur die letz
beiden Ebenen je einmal schneiden, h Stücke von $\mathfrak{R}$, die nu
beiden ersteren Ebenen je einmal schneiden, i Stücke, die
die erste ($x = a_{r-1}$) der beiden ersten Ebenen durchschn
und k Stücke von $\mathfrak{R}$, die analog die zweite ($x = a_r$) der e
nannten beiden Ebenen in immer je zwei zusammenhäng
Linien durchschneiden. Ebenso seien es l resp. m Stücke, d
erste, bezw. zweite Ebene der zur XZ-Ebene parallelen E
$y = b_{s-1}$, $y = b_s$ immer in je zwei zusammenhängenden
schneiden. Dazu können wir bemerken, dass zu jedem s
Stücke von $\mathfrak{R}$ zwei solche Parallelepipede gehören. Daher
man in der genannten Säule höchstens

$$2\,[g + h + i + k + l + m]$$

solcher rechtwinkliger Parallelepipede. Betrachten wir die
$x = a_{r-1}$, so hat die mit $\mathfrak{R}$ $h + 2i$, die entsprechende x
$h + 2k$ Punkte gemein, ebenso hat die Ebene $y = b_{s-1}$
$g + 2l$ und die Ebene $y = b_s$ höchstens $g + 2m$ Punkte g
Nun ist aber $h + 2i \leqq r$, $h + 2k \leqq r$, ebenso $g + 2l \leqq$
$g + 2m \leqq \nu$, weshalb folgt

$$2\,[g + h + i + k + l + m] \leqq 4r.$$

Die Summe dieser Parallelepipede, die sich aus dem 2
ergeben, ist also kleiner oder höchstens gleich $4r\,\Gamma \cdot \delta_r \cdot \varepsilon_s$.
erhalten wir als das Maximum, das die Summe Σ_1' der übe
stehenden Parallelepipede erreichen kann

$$\Delta\, Q_{rs} + 4r\,\Gamma\,\delta_r\,\varepsilon_s.$$

Addiren wir nun alle oben genannten Säulen, inde
über alle δ_r von $r = 1$ bis $r = n$ und alle ε_s von $s = 1$ bis
summiren, erhält man

$$\Sigma_1 < \Delta\, Q + 4r\,(a' - a)\,(b' - b)\,\Gamma,$$

und damit ist unsere Aufgabe gelöst.

Als weitere Vorarbeit machen wir Folgendes: Wenn wir zu
Seitenfläche eines gewöhnlichen Polyeders $M_1 M_2 \ldots M_n$ mit
Oberfläche O sowohl außerhalb als auch innerhalb des Poly-
s im nämlichen nicht zu großen Abstande H je eine parallele
ne legen und wenn diese parallelen Ebenen im Inneren und
eren unseres Polyeders $M_1 M_2 \ldots M_n$ wieder ein k-eckiges
eder bilden mit den Ecken $M_1'' M_2'' \ldots M_n''$, resp. $M_1' M_2' \ldots M_n'$
ird es sich darum handeln, den Zwischenraum zwischen die-
beiden k-eckigen Polyedern, dem inneren $M_1'' M_2'' \ldots M_n''$ und
äußeren $M_1' M_2' \ldots M_n'$ zu berechnen, und zwar soll der In-
dieses Zwischenraumes dargestellt werden als Function der
fläche O des ursprünglichen Polyeders und des Abstandes H,
n auch Größen vorkommen können, die lediglich vom ursprüng-
angenommenen Polyeder abhängen werden, z. B. von dessen
alt.

Allein noch wollen wir das Problem nicht in dieser Allge-
heit behandeln, sondern uns zunächst mit einem speciellen
e befassen, einem Falle, der uns einen Anhaltspunkt für die
n des allgemeinen Resultates liefern dürfte. Doch zuvor wollen
uns mit der wichtigen Frage beschäftigen: In welchen Fällen
unter welcher Bedingung bilden die im Abstande H von den
nflächen des ursprünglichen Polyeders mit k-Ecken innen und
rhalb desselben gelegten parallelen Ebenen wieder ein k-eckiges
eder? Die Bedingung dafür kann sofort angegeben werden:
üssen die Ebenen, die parallel sind den in einer Ecke zusam-
stoßenden Flächen des erstangenommenen Polyeders $M_1 M_2 \ldots M_n$
auch wieder in einem Punkte schneiden. Dies ist dann und
dann der Fall, wenn wir die Eckpunkte $M_1' M_2' \ldots M_n'$ und
$M_2'' \ldots M_n''$ des äußeren und inneren Polyeders auf den bezüg-
n Axen der einzelnen Ecken $M_1 M_2 \ldots M_n$ annehmen. Nun
aber im allgemeinen nur die dreiseitige Ecke eine Axe;
r können nur solche k-eckige Polyeder in Betracht kommen,
n sämmtliche Ecken dreiseitig sind. Bei diesen erhalten wir
aber auch bei Anwendung obiger Construction immer wieder
eder, die eine gleiche Anzahl von Ecken haben wie das
rüngliche.

Nun gehen wir zu unserem speciellen Falle über, und zwar
Berechnung des oben genannten Zwischenraumes für ein gera-
Prisma. Ich glaube die Rechnung für ein Tetraeder übergehen
können, bietet sie ja doch keine Schwierigkeit, wenn man be-
t, dass es einen Punkt im Innern gibt, von dem aus das
aeder in vier kleinere Tetraeder zerlegt werden kann, so dass
Zwischenraum zwischen dem äußersten und innersten Tetraeder
ier Pyramidenstutze zerfällt, woraus der Gang der Rechnung
t klar ist. Allein auch die Berechnung des oben genannten
schenraumes für ein schiefes Prisma bietet abgesehen von

einer etwas weitläufigeren Rechnung keine Schwierigkeit, w
man nach Art unserer später angeführten Rechnung für
k-eckiges Polyeder dieselben Überlegungen für das schiefe Pri
anstellt, wenn nicht der etwas kürzere Weg analog dem jetzt für
gerades Prisma einzuschlagenden vorgezogen wird. Ich glaube
dieselben übergehen und mit mich dem einfachen Falle des gera
Prismas begnügen zu können.

Nehmen wir der Einfachheit halber ein gewöhnliches viers
ges gerades Prisma mit der Höhe h. Dies umgeben wir in c
angeführter Weise im Abstande H mit einem zweiten Pris
dessen Eckpunkte $M_1' M_2' M_3' M_4' N_1' N_2' N_3' N_4'$ also auf den Axen
bezüglichen Ecken des ursprünglichen $M_1 M_2 M_3 M_4 N_1 N_2 N$
angenommen werden müssen. Dieselbe Construction machen
auch im Inneren des Prismas $M_1 \ldots M_4 N_1 \ldots N_4$ und erha
im Abstande H auch im Inneren ein vierseitiges Prisma M_1''
$M_3'' M_4'' N_1'' N_2'' N_3'' N_4''$. Um den Zwischenraum zu berechnen, ma
wir folgende Dreitheilung desselben:

Wir legen im Abstande $2H$ von der unteren und ob
Grundfläche je eine zu den Grundflächen der drei in einan
stehenden Prismen parallele Ebene. Dadurch zerfällt unser Zwis
raum in zwei Prismen mit den Grundflächen G, wo G die Gr
fläche des äußersten Prismas bedeutet, und den Höhen $2H$
einen prismatischen Rahmen mit der Grundfläche $2HP$, wo P
Umfang der Grundfläche g_1 des ursprünglichen d. i. mittl
Prismas bedeutet, und der Höhe $h - 2H$. Sei J der fragl
Inhalt des Zwischenraumes, so ist also $J = 2HP(h - 2H) + 4$
Nun ist $G = g_1 + R$, wo R das Flächenstück bedeutet, das
G nach Wegnahme von g_1 übrig bleibt. Dieses R ist aber,
sich aus einer Figur nach leichter Rechnung ergibt $= PH +$
Also, da $O = Ph + 2g_1$ ist,

$$J = 2H(Ph - 2HP + 2g_1 + 2R) = 2HO + 16H^3.$$

Man kann diese Berechnung von J leicht in einfach
Weise machen. Man hat nur die Theilchen $\omega_1 \ldots \omega_n$ des Geb
$\mathfrak{K}$ von drei Dimensionen, für das die dafür endliche Fun
$f(x, y, z)$ gegeben ist, so anzunehmen, dass ein jedes von i
die Gesammtheit aller Punkte (x, y, z) sei, deren jede Coord
alle Werte eines gegebenen Intervalles $(x, x + dx)$, $(y, y +$
$(z, z + dz)$ annehmen darf und das ihm zugehörige ω sei
Product $dx \,.\, dy \,.\, dz$, das als Inhalt des Theilchens ω im Eu
schen Raume bezeichnet wird, also als Inhalt des Prismas ω.
mit kann man denn auch den fraglichen Inhalt des Zwis
raumes direct berechnen.

Wir haben nur das Product

$$(dx + 2H)(dy + 2H)(dz + 2H) - (dx - 2H)(dy - 2H)$$
$$(dz - 2H)$$

ch Potenzen von H zu entwickeln, was dann gleich ist

$$16\,H^3 + 4\,H(dy\,dz + dx\,dz + dx\,dy).$$

Wie wir auf diese Formel kommen, ersehen wir auf folgende t. Nehmen wir $k = 4$. d. h. also ein rechtwinkliges Parallelepid $M_1\,M_2\,M_3\,M_4\,N_1\,N_2\,N_3\,N_4$ und nennen wir dessen Kanten $M_2 = a$, $M_2\,M_3 = b$ und dessen Höhe h.

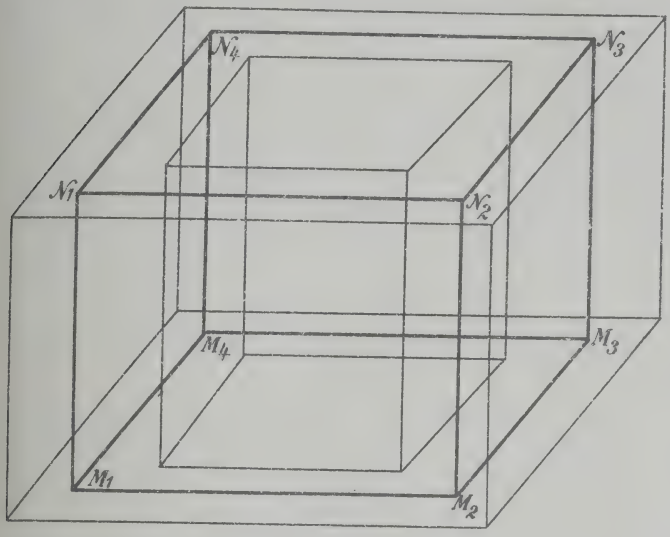


Fig. 8.

Dann ist der Inhalt des Zwischenraumes zwischen dem ersten und innersten rechtwinkligen Parallelepipede

$$= (a + 2H)(b + 2H)(h + 2H) - (a - 2H)(b - 2H)(h - 2H)$$
$$= 16H^3 + 2HO,$$

in O, die Oberfläche des rechtwinkligen Parallelepipedes

$$M_1\,M_2\,M_3\,M_4\,N_1\,N_2\,N_3\,N_4 = 2(bh + ah + ab).$$

Dem Abstande H ist noch die Beschränkung aufzulegen, s er nicht zu groß sei, weil wir in diesem ausgeschlossenen lle kein gewöhnliches inneres Prisma erhalten würden, da sich Seitenflächen des innern Prismas von einem bestimmten H ab rchdringen würden.

Und nun wollen wir unseren allgemeinen Fall in Angriff men, den Fall nämlich, dass wir statt der Prismen schlechtg Polyeder nehmen und zwar Polyeder mit dreiseitigen Ecken, wir auf S. 13 angegeben haben.

Wir nehmen also ein solches Polyeder und legen im Absta
H außen und innen zu jeder Seitenfläche je eine parallele Eb
Dadurch erhalten wir bei unserer Annahme über das Polye
zwei Polyeder mit gleicher Eckenzahl mit dem ursprünglich
eines außerhalb des ersten und das andere im Inneren dessel
Zwischen diesen beiden neuen Polyedern entsteht ein Raum,
sen Inhalt zu bezerechnen unsere jetzige Aufgabe wird. Es v
jedoch nicht nöthig sein, diese Rechnung in ihrer ganzen Ausf
lichkeit zu machen. Wir haben bereits oben den Inhalt di
Zwischenraumes zwischen zwei geraden Prismen berechnet
dafür gefunden $J = 2HO + \frac{H^3}{3} \cdot 48$ und wir hätten bei Ausführ
derselben Rechnung für das Tetraeder und schiefe Prisma
ganz analoge Formel erhalten und werden sehen, dass auch
Ausdruck für den Inhalt des Zwischenraumes zwischen zwei
liebigen Polyedern mit dreiseitigen Ecken auf eine der ob
ähnliche Form gebracht werden kann. Die allgemeine Formel
nämlich lauten $J = 2HO + \frac{H^3}{3} \Phi_p$, wo Φ_p eine Constante bede
die nur von der Gestalt etc. des ursprünglich angenommenen
lyeders abhängen wird. Dass dies richtig ist, wird das Folg
zeigen.

Vorerst wollen wir also den Inhalt des Raumes zwis
unseren Polyedern auf obige Form zu bringen suchen und
beweisen, dass das Φ_p nur vom angenommenen Polyeder,
lediglich von dessen Gestalt abhängt, dass es also eine Const
des Polyeders ist. Um nun den Zwischenraum, d. h. dessen I
zwischen den beiden nach obiger Construction erhaltenen P
eder zu berechnen, theilen wir denselben in Prismatoide, in
wir die Symmetralebenen der Flächenwinkel des ursprüngli
Polyeders durch dessen Kanten legen. Auf jeder solchen Symm
ebene liegen dann auch die beiden entsprechenden Kanten
beiden neuen Polyeder. Durch diese Ebenen zerfällt dann
Zwischenraum in lauter Prismatoide in derselben Anzahl als u
Polyeder Seitenflächen haben. Sei ein solches Prismatoid das
bei gezeichnete.

Der Kürze halber nehmen wir ein achteckiges Prisma
(Fig. 9).

S_ν sei eine Fläche des ursprünglichen Polyeders, in uns
Prismatoide ist es dessen Mittelschnitt, G_ν und g_ν seien die
entsprechenden Seitenflächen des äußeren und inneren Poly
im Abstand H vom ursprünglichen. $l_{1,\nu}, l_{2,\nu}, l_{3,\nu}, l_{4,\nu}$ sind die
der bezüglichen dreiseitigen Ecken der Polyeder, ihre Verbind
ebenen, also die Ebenen $l_{1,\nu}\, l_{2,\nu}$; $l_{2,\nu}\, l_{3,\nu}$; $l_{3,\nu}\, l_{4,\nu}$, endlich $l_{4,\nu}\, l_{1,\nu}$
eben die Symmetralebenen, von denen wir oben gesprochen.

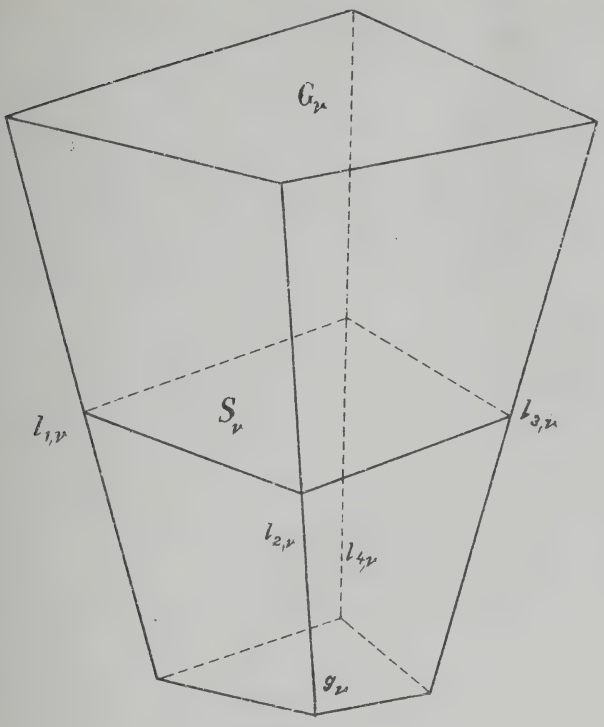


Fig. 9.

Der Inhalt eines solchen Prismatoids ist nach der bekannten
mel

$$J_\nu = \frac{2H}{3}\left[2S_\nu + \frac{G_\nu + g_\nu}{2}\right].$$

Nun ist aber $G_\nu = S_\nu + \delta_{2,\nu}$, $g_\nu = S_\nu - \delta_{1,\nu}$, wo $\delta_{2,\nu}$ und $\delta_{1,\nu}$ unbekannten Flächenstücke bedeuten, die man zu S_ν hinzu-
en, resp. wegnehmen muss, um G_ν bezw. g_ν zu erhalten.
Setzen wir dies ein:

$$J_\nu = \frac{2H}{3}\left[3S_\nu + \frac{\delta_{2,\nu} - \delta_{1,\nu}}{2}\right] = 2HS_\nu + \frac{H}{3}(\delta_{2,\nu} - \delta_{1,\nu}).$$

Summiren wir über alle Prismatoide, in die wir den
ischenraum zerlegt haben, so erhalten wir für den Inhalt dieses
ischenraumes

$$J = \sum_\nu J_\nu = 2H\sum_\nu S_\nu + \frac{H}{3}\sum_\nu(\delta_{2,\nu} - \delta_{1,\nu}).$$

Nun ist aber die Oberfläche O des ursprünglich angenommenen Polyeders gerade $\sum_\nu S_\nu$, so dass wir erhalten

$$J = 2HO + \frac{H}{2}\sum_\nu (\delta_{2,\nu} - \delta_{1,\nu}).$$

Wir haben also betreffs des ersten Gliedes rechts i Übereinstimmung erzielt mit dem ersten Gliede in obiger Fo Damit aber auch die beiden Formeln im zweiten Summanden re Hand übereinstimmen, müssen wir jetzt zeigen, dass aus Gliede $\sum_\nu (\delta_{2,\nu} - \delta_{1,\nu})$ sich der Factor H^2 heraushebt und dass was noch übrig bleibt, eine Größe Φ_P ist, die nur von der G des Polyeders, das wir eben als erstes annehmen, abhängt.

Um nun dies zu zeigen, gehen wir zurück zu dem in un vorstehenden Figur gezeichneten Prismatoid und legen unser r winkliges Coordinatensystem so in dasselbe, dass die XY-E zusammenfällt mit der Ebene von S_ν. Da wir, wie schon erw der Einfachheit halber ein achteckiges Prismatoid nehmen, für ein anderes dieselben Überlegungen gelten, so seien die Co naten der vier Eckpunkte der Fläche G_ν: $x'_{\varkappa,\nu}, y'_{\varkappa,\nu}, z'_{\varkappa,\nu}$ ($\varkappa = 1, 2,$ und die der entsprechenden vier Eckpunkte der Fläche g_ν: $x''_{\varkappa,\nu}, y''_{\varkappa,\nu}, z''_{\varkappa,\nu}$ ($\varkappa = 1 \ldots 4$), wo bei unserer Annahme des Coordin systems $z'_{\varkappa,\nu} = H$ ($\varkappa = 1 \ldots 4$), ebenso $z''_{\varkappa,\nu} = -H$ ist. Der Flä inhalt von G_ν ist nun nach einer bekannten Formel der analyti Geometrie $= \frac{1}{2}\sum_{\varkappa=1}^{4} (x'_{\varkappa,\nu} y'_{\varkappa+1,\nu} - y'_{\varkappa,\nu} x'_{\varkappa+1,\nu})$ [1]) und $g_\nu = \frac{1}{2}\sum_{\varkappa=1}^{4} (x''_{\varkappa,\nu} y''_{\varkappa+1,\nu} - y''_{\varkappa,\nu} x''_{\varkappa+1,\nu})$.

Nun ist aber

$$x'_{\varkappa,\nu} = x_{\varkappa,\nu} + H\frac{\cos\alpha_{\varkappa,\nu}}{\cos\gamma_{\varkappa,\nu}} \qquad y'_{\varkappa,\nu} = y_{\varkappa,\nu} + \frac{H}{\cos\gamma_{\varkappa,\nu}} \text{ c}$$

1)

$$x'_{\varkappa+1,\nu} = x_{\varkappa+1,\nu} + H\frac{\cos\alpha_{\varkappa+1,\nu}}{\cos\gamma_{\varkappa+1,\nu}} \qquad y'_{\varkappa+1,\nu} = y_{\varkappa+1,\nu} + \frac{H}{\cos\gamma_{\varkappa+1,\nu}} \text{ c}$$

wo $\alpha_{\varkappa,\nu}, \beta_{\varkappa,\nu}, \gamma_{\varkappa,\nu}$ und $\alpha_{\varkappa+1,\nu}, \beta_{\varkappa+1,\nu}, \gamma_{\varkappa+1,\nu}$ die Richtungswink Axen $l_{\varkappa,\nu}$ resp. $l_{\varkappa+1,\nu}$ ($\varkappa = 1 \ldots 4$) sind und $l_{5,\nu}$ wieder m zusammenfällt.

Setzen wir oben in den Ausdruck für G_ν die Coordinat der Eckpunkte ein, erhält man nach einer leichten Umform

---

[1]) Dabei ist $x'_{5,\nu} = x'_{1,\nu}, y'_{5,\nu} = y'_{1,\nu}$, ebenso bei x'' und y'': $x''_{5,\nu} = y''_{1,\nu}$ der Punkt, von dem wir ausgegangen.

$$G_\nu = \frac{1}{2}\sum_{\varkappa=1}^{4}\Big[(x_{\varkappa,\nu}\,y_{\varkappa+1,\nu} - x_{\varkappa+1,\nu}\,y_{\varkappa,\nu}) +$$

$$+\frac{H^2}{\cos\gamma_{\varkappa,\nu}\cos\gamma_{\varkappa+1,\nu}}[\cos\alpha_{\varkappa,\nu}\cos\beta_{\varkappa+1,\nu} - \cos\alpha_{\varkappa+1,\nu}\cos\beta_{\varkappa,\nu}] +$$

$$+\frac{H}{\cos\gamma_{\varkappa+1,\nu}}[x_{\varkappa,\nu}\cos\beta_{\varkappa+1,\nu} - y_{\varkappa,\nu}\cos\alpha_{\varkappa+1,\nu}] +$$

$$+\frac{H}{\cos\gamma_{\varkappa,\nu}}[y_{\varkappa+1,\nu}\cos\alpha_{\varkappa,\nu} - x_{\varkappa+1,\nu}\cos\beta_{\varkappa,\nu}]\Big].$$

Nun ist aber

$$\sum_{\varkappa=1}^{4}[x_{\varkappa,\nu}\,y_{\varkappa+1,\nu} - x_{\varkappa+1,\nu}\,y_{\varkappa,\nu}] = S_\nu;$$

er erhalten wir

$$G_\nu - S_\nu = \delta_{2,\nu} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\varkappa=1}^{4}\Big\{\frac{H^2}{\cos\gamma_{\varkappa,\nu}\cos\gamma_{\varkappa+1,\nu}}[\cos\alpha_{\varkappa,\nu}\cos\beta_{\varkappa+1,\nu} - \cos\alpha_{\varkappa+1,\nu}\cos\beta_{\varkappa,\nu}] +$$

$$+\frac{H}{\cos\gamma_{\varkappa+1,\nu}}[x_{\varkappa,\nu}\cos\beta_{\varkappa+1,\nu} - y_{\varkappa,\nu}\cos\alpha_{\varkappa+1,\nu}] +$$

$$+\frac{H}{\cos\gamma_{\varkappa,\nu}}[y_{\varkappa+1,\nu}\cos\alpha_{\varkappa,\nu} - x_{\varkappa+1,\nu}\cos\beta_{\varkappa,\nu}]\Big\}.$$

Analoge Rechnung ist für

$$g_\nu = \frac{1}{2}\sum_{\varkappa=1}^{4}(x''_{\varkappa,\nu}\,y''_{\varkappa+1,\nu} - y''_{\varkappa,\nu}\,x''_{\varkappa+1,\nu})$$

machen; wir haben in diese Formel ebenfalls die Coordinaten r Eckpunkte einzusetzen, nämlich

$$\begin{aligned}
x''_{\varkappa,\nu} &= x_{\varkappa,\nu} - \frac{H}{\cos\gamma_{\varkappa,\nu}}\cos\alpha_{\varkappa,\nu}\\
x''_{\varkappa+1,\nu} &= x_{\varkappa+1,\nu} - \frac{H}{\cos\gamma_{\varkappa+1,\nu}}\cos\alpha_{\varkappa+1,\nu}\\
y''_{\varkappa,\nu} &= y_{\varkappa,\nu} - \frac{H}{\cos\gamma_{\varkappa,\nu}}\cos\beta_{\varkappa,\nu}\\
y''_{\varkappa+1,\nu} &= y_{\varkappa+1,\nu} - \frac{H}{\cos\gamma_{\varkappa+1,\nu}}\cos\beta_{\varkappa+1,\nu}
\end{aligned};$$

Alsdann erhält man

$$g_\nu - S_\nu = -\delta_{1,\nu} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\varkappa=1}^{4}\Bigg\{\frac{H^2}{\cos\gamma_{\varkappa,\nu}\cos\gamma_{\varkappa+1,\nu}}[\cos\alpha_{\varkappa,\nu}\cos\beta_{\varkappa+1,\nu} - \cos\alpha_{\varkappa+1,\nu}\cos\beta_{\varkappa,\nu}]$$

$$(4)\qquad - \frac{H}{\cos\gamma_{\varkappa+1,\nu}}[x_{\varkappa,\nu}\cos\beta_{\varkappa+1,\nu} - y_{\varkappa,\nu}\cos\alpha_{\varkappa+1,\nu}] -$$

$$- \frac{H}{\cos\gamma_{\varkappa,\nu}}[y_{\varkappa+1,\nu}\cos\alpha_{\varkappa,\nu} - x_{\varkappa+1,\nu}\cos\beta_{\varkappa,\nu}]\Bigg\}.$$

Addiren wir nun (2) und (4), erhalten wir

$$\delta_{2,\nu} - \delta_{1,\nu} = \sum_{\varkappa=1}^{4}\frac{H^2}{\cos\gamma_{\varkappa+1,\nu}\cos\gamma_{\varkappa,\nu}}[\cos\alpha_{\varkappa,\nu}\cos\beta_{\varkappa+1,\nu} - \cos\alpha_{\varkappa+1,\nu}\cos\beta_{\varkappa,\nu}]$$

$$(5)\qquad = H^2\sum_{\varkappa=1}^{4}\frac{\cos\alpha_{\varkappa,\nu}\cos\beta_{\varkappa+1,\nu} - \cos\alpha_{\varkappa+1,\nu}\cos\beta_{\varkappa,\nu}}{\cos\gamma_{\varkappa+1,\nu}\cos\gamma_{\varkappa,\nu}}.$$

Nun ist $\cos\gamma_{\varkappa,\nu} = \sin\Theta_{\varkappa,\nu}$, d. i. dem Sinus des Winkels g den unsere Axe mit den Flächen der zugehörigen dreise Ecke einschließt.

Führen wir dies ein, so erhalten wir

$$(5^*)\qquad \delta_{2,\nu} - \delta_{1,\nu} = H^2\sum_{\varkappa=1}^{4}\frac{\cos\alpha_{\varkappa,\nu}\cos\beta_{\varkappa+1,\nu} - \cos\alpha_{\varkappa+1,\nu}\cos\beta_{\varkappa,\nu}}{\sin\Theta_{\varkappa+1,\nu}\sin\Theta_{\varkappa,\nu}}$$

Wir haben also noch zu zeigen, dass sich auch die Dif im Zähler dieses Bruches durch Größen ausdrücken läss nur von der Gestalt des Polyeders abhängen. Dies ist nu leicht. Wenn wir mit $x_\nu^{(\varkappa)}, y_\nu^{(\varkappa)}, z_\nu^{(\varkappa)}$ die Coordinaten des S punktes von $l_{\varkappa,\nu}$ mit $l_{\varkappa+1,\nu}$ bezeichnen, so ist die Gleichu Ebene durch diese beiden Axen

$$(x - x_\nu^{(\varkappa)})[\cos\beta_{\varkappa,\nu}\cos\gamma_{\varkappa+1,\nu} - \cos\beta_{\varkappa+1,\nu}\cos\gamma_{\varkappa,\nu}] +$$
$$+ (y - y_\nu^{(\varkappa)})[\cos\gamma_{\varkappa,\nu}\cos\alpha_{\varkappa+1,\nu} - \cos\gamma_{\varkappa+1,\nu}\cos\alpha_{\varkappa,\nu}] +$$
$$+ (z - z_\nu^{(\varkappa)})[\cos\alpha_{\varkappa,\nu}\cos\beta_{\varkappa+1,\nu} - \cos\alpha_{\varkappa+1,\nu}\cos\beta_{\varkappa,\nu}] = 0$$
$$(\varkappa = 1 \ldots 4).$$

Diese Ebenen sind aber die Symmetralebenen der F winkel unseres ursprünglich angenommenen Polyeders.

Sei $\varphi_{\varkappa,\nu}$ der Winkel, den diese Ebene mit S_ν einschli ist, da wir die XY-Ebene in die Ebene von S_ν gelegt hab

$$\cos\varphi_{\varkappa,\nu} = \frac{X_\nu}{\cos\alpha_{\varkappa,\nu}\cos\beta_{\varkappa+1,\nu} - \cos\alpha_{\varkappa+1,\nu}\cos\beta_{\varkappa,\nu}}$$

$$\sqrt{\underbrace{\sin^2\Theta_{\varkappa+1,\nu} + \sin^2\Theta_{\varkappa,\nu} - 2\sin\Theta_{\varkappa,\nu}\sin\Theta_{\varkappa+1,\nu}\cos\Omega_{\varkappa,\nu}}_{\Psi_{\varkappa,\nu}(\Theta,\Omega)} + \underbrace{[\cos\alpha_{\varkappa,\nu}\cos\beta_{\varkappa+1,\nu} - \cos\alpha_{\varkappa+1,\nu}\cos\beta_{\varkappa,\nu}]^2}_{X_\nu}}$$

$\Omega_{\varkappa,\nu}$ der Winkel ist, den die Axen $l_{\varkappa,\nu}$ und $l_{\varkappa+1,\nu}$ ($\varkappa = 1 \ldots 4$) einander einschließen, so dass

$$\Omega_{\varkappa,\nu} = \cos\alpha_{\varkappa,\nu}\cos\alpha_{\varkappa+1,\nu} + \cos\beta_{\varkappa,\nu}\cos\beta_{\varkappa+1,\nu} + \cos\gamma_{\varkappa,\nu}\cos\gamma_{\varkappa+1,\nu}$$

Aus obiger Relation für $\varphi_{\varkappa,\nu}$ lässt sich nun die fragliche Größe $= \cos\alpha_{\varkappa,\nu}\cos\beta_{\varkappa+1,\nu} - \cos\beta_{\varkappa,\nu}\cos\alpha_{\varkappa+1,\nu}$ ausrechnen und zwar ausdrücken durch die Polyederconstanten $\Theta_{\varkappa,\nu}\ \Theta_{\varkappa+1,\nu}\ \varphi_{\varkappa,\nu}$ und $\Omega_{\varkappa,\nu}$ ($\varkappa = 1, 2, 3, 4$).

Es wird

$$\cos^2\varphi_{\varkappa,\nu} = \frac{X_\nu^2}{\Psi_{\varkappa,\nu}(\Theta,\Omega) + X_\nu^2}$$

$$X_\nu = \pm \operatorname{ctg}\varphi_{\varkappa,\nu}\sqrt{\Psi_{\varkappa,\nu}(\Theta,\Omega)} = \operatorname{ctg}\varphi_{\varkappa,\nu}R_{\varkappa,\nu}(\Theta,\Omega).$$

Man könnte nun statt $\varphi_{\varkappa,\nu}$ den inneren Flächenwinkel des yeders einführen, jedoch ist dies für unseren Zweck unentlich.

Führen wir dies nun ein in die Gleichung (5*), so erhalten

$$\delta_{2,\nu} - \delta_{1,\nu} = H^2\sum_{\varkappa=1}^{4}\frac{1}{\sin\Theta_{\varkappa,\nu}\sin\Theta_{\varkappa+1,\nu}}\operatorname{ctg}\varphi_{\varkappa,\nu}R_{\varkappa,\nu}(\Theta,\Omega).$$

Rechter Hand haben wir also Größen, die nur vom Polyeder ängen und den Factor H^2, so dass wir setzen können

$$\sum_{\varkappa=1}^{4}\frac{1}{\sin\Theta_{\varkappa,\nu}\sin\Theta_{\varkappa+1,\nu}}\operatorname{ctg}\varphi_{\varkappa,\nu}R_{\varkappa,\nu}(\Theta,\Omega) = \Phi_{P,\nu};$$

erhalten so für den Inhalt des betrachteten Prismatoids

$$J_\nu = 2HS_\nu + \frac{H^3}{3}\Phi_{P,\nu}$$

indem wir summiren über alle Prismatoide, in die wir unsefraglichen Zwischenraum zerlegt haben, bekommen wir für Inhalt des Zwischenraumes

$$J = 2HO + \frac{H^3}{3}\sum_{\nu}\Phi_{P,\nu} = 2HO + \frac{H^3}{3}\Phi_P,$$

wo Φ_P ebenfalls nur vom Polyeder abhängen kann, und d ist unsere Aufgabe gelöst.

Eine für das Folgende wichtige Anwendung dieser Fo ist folgende: Erfüllen wir das Polyeder $M_1 \ldots M_z$ mit ei Systeme von Polyedern $\omega_1\ \omega_2 \ldots \omega_n$ so, dass diese gerade den R desselben erfüllen, dann können wir den wichtigen Satz aussprec dass sich der größte Durchmesser derselben so klein anneh lässt, dass die Summe jener Polyeder, die mindestens einen P mit O gemein haben, kleiner oder höchstens gleich ist $2DO + \frac{D^3}{3}$

Dies können wir leicht einsehen, wenn wir Folgendes denken: Construiren wir obigen Zwischenraum, so kann Polyeder vom Durchmesser H, das mit O mindestens einen P P gemein hat, über ihn hinausragen. Denn würde, z. B. Punkt eines solchen Polyeders außerhalb dieses Rahmens lie z. B. der Punkt P', so wäre $|PP'| > H$ gegen die Voraussetz dass H Durchmesser des Polyeders ist. Zu obiger Umgleic ist also nur nothwendig, das $D \leqq H$ ist.

So haben wir die wichtigsten und nothwendigsten Hilfs erwiesen und wir können nun unsere eigentliche Untersuch beginnen.

Das obere und untere dreifache Integral. Das eigentlic Tripelintegral.

§. 3. Nehmen wir einen Körper $\mathfrak{K}$, der ganz im Endli liege und mit gewöhnlichen Oberflächen begrenzt ist, und neh wir an, dass eine reelle Function dreier Veränderlichen $f(x,$ für alle Punkte desselben eindeutig definirt und dabei in dens endlich sei, was so viel heißt als, es gibt zwei Zahlen A u derart, dass für jedes x, y und z für jeden Punkt im Innern am Rande der Begrenzung von $\mathfrak{K}$

$$A < f(x\,y\,z) < B \tag{1}$$

ist. Das ganze Gebiet $\mathfrak{K}$ erfüllen wir sodann mit einem System Polyedern $\omega_1\ \omega_2 \ldots \omega_n$, die das Zeichen von $\mathfrak{K}$ besitzen sollen, so sie das Gebiet $\mathfrak{K}$ gerade erfüllen, wobei auch einige von ihnen $\mathfrak{K}$ hinausragen dürfen. Wir bezwecken damit dies, dass zu j ω_r Punkte von $\mathfrak{K}$ und umgekehrt zu jedem Punkte von $\mathfrak{K}$ destens ein ω_r gehört. Die Anzahl dieser Polyeder ist ganz kürlich und hängt ganz von uns allein ab.

Wenn wir nun die obere Grenze von $f(x, y, z)$ in den edern $\omega_1\ \omega_2 \ldots \omega_n$ beziehungsweise mit $g_1\ g_2 \ldots g_n$ bezeichnen

log, wenn der Punkt (x, y, z) das Polyeder ω_r beschreibt, die ere Grenze mit $k_1\ k_2 \ldots k_n$, und wenn wir alsdann die Summe

$$\omega_1 g_1 + \omega_2 g_2 + \cdots + \omega_n g_n = \sum_{r=1}^{n} g_r \omega_r$$

l ebenso die Summe

$$k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2 + \cdots + k_n \omega_n = \sum_{r=1}^{n} k_r \omega_r$$

en, so sehen wir wiederum den Satz, den wir für eine Func- einer Veränderlichen x, ebenso für Functionen $f(x, y)$ zweier änderlichen kennen lernen, jetzt auch für die Function $f(x, y, z)$ drei Veränderlichen.

1. „Es hat die Summe $\sum_{r=1}^{n} g_r \omega_r$ bei unbeschränkter und un- renzter Abnahme eines jeden Polyeders nach den drei Dimen- ien des Raumes einen endlichen Grenzwert G, d. h. jeder po- ven Zahl $\varkappa$ enstpricht eine andere ebenfalls positive Zahl λ so, s

$$\left| \sum_{r=1}^{n} g_r \omega_r - G \right| < \varkappa$$

wenn nur $\omega_r < \lambda^3$ oder wenn nur der Durchmesser D_r eines n solchen Polyeders ω_r $(r = 1 \ldots n)$ kleiner ist als λ.“

In Zeichen kann man diesen so wichtigen Satz so schreiben

$$\lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n} g_r \omega_r = G.$$

„Unter denselben Bedingungen haben wir auch

$$\lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n} k_r \omega_r = K$$

.. es lässt sich jeder beliebigen Zahl $\varkappa > 0$ eine andere posi- Zahl λ so zuordnen, dass

$$\left| \sum_{r=1}^{n} k_r \omega_r - K \right| < \varkappa$$

wenn nur $D_r < \lambda$ $(r = 1 \ldots n)$, ist und zwar ist $K \leq G$.“

Bevor wir zum Beweise dieses Satzes gehen, wollen wir doch n einen weiteren Satz anführen, der sich unmittelbar an den n angeführten anschließt und lautet:

„Wenn wir aus der Zahl der Polyeder $\omega_1\ \omega_2 \ldots \omega_n$ j herausnehmen, die nur Punkte von $\mathfrak{R}$ enthalten, und sie $\omega_1'\ \omega_2' \ldots \omega_{n'}'$ bezeichnen und die obere resp. untere Grenze von $f(x,$ in den Punkten von ω_r' $(r = 1 \ldots n')$ mit g_r' resp. k_r', so ist ne Formel (A) auch folgende

$$(B) \qquad \lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n'} g_r' \omega_r' = G \text{ und } \lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n'} k_r' \omega_r' = K$$

vorhanden".

Diese beiden Formeln bedeuten Folgendes:

Es entspricht jeder positiven Zahl $\varkappa$ eine andere $\lambda > 0$ dass

$$\left| \sum_{r=1}^{n'} g_r' \omega_r' - G \right| < \varkappa$$

ist, wenn nur $\omega_r < \lambda^3$ $(D_r < \lambda)$ ist für $r = 1, 2, \ldots, n$.

Analog lässt sich die zweite Formel (B) in Worte klei

Jeder beliebigen Zahl $\varkappa > 0$ muss eine andere positive λ so entsprechen, dass

$$\left| \sum_{r=1}^{n'} k_r' \omega_r' - K \right| < \varkappa$$

ist, wenn nur $D_r < \lambda$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$ ist. Was hier auff möchte, ist, dass die ω_r zur Null convergiren müssen. Das gibt sich aber leicht, wenn man bedenkt, dass, wenn dies n statthaben würde, möglicherweise jene Polyeder ω_r an der O fläche von $\mathfrak{R}$, d. h. solche, die sowohl Punkte von $\mathfrak{R}$ als an Punkte enthalten, unverändert bleiben könnten.

Der Grenzwert G heißt das obere dreifache Integral Function $f(x, y, z)$ über das Gebiet $\mathfrak{R}$ und man bezeichnet es C. Jordan mit

$$S_{(\mathfrak{R})}^{(1)} f(x, y, z)\, d\mathfrak{R} \text{ oder } \overline{S_{(\mathfrak{R})}} f(x, y, z)\, d\mathfrak{R},$$

wo S dieselbe Bedeutung hat wie beim Doppelintegral; es nämlich den Grenzübergang an einer Summe andeuten. $d\mathfrak{R}$ deutet soviel wie ω_r, ist also die Zahl eines gewöhnlichen Polye das unbegrenzt und unumschränkt abnehmen kann, also kann $d\mathfrak{R}$ beliebig klein sein und daher als Differential der Polyede $\mathfrak{R}$ angesehen werden.

$\sum_{r=1}^{n} g_r \omega_r$ hat für alle Polyeder ω_r denselben Grenzwe bei ins Unendliche abnehmendem ω_r daher auch dann, wenn m

he Polyeder auch rechtwinklige Parallelepipede nimmt. Für en Fall wird $d\mathfrak{R} = dx \,.\, dy \,.\, dz$, wenn wir dx für δ_r, dy für nd dz für γ_u schreiben. Wenn die ω_r aber als Tetraeder ge- ht werden, hat man für $d\mathfrak{R}$ den Inhalt des Tetraeders mit den rdinaten der Eckpunkte x, y, z; $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$; $-(dx)'$, $y + (dy)'$, $z + (dz)'$ und $x + (dx)''$, $y + (dy)''$, $z + (dz)''$ nehmen und erhält dann

$$d\mathfrak{R} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ x, & x + dx, & x + (dx)', & x + (dx)'' \\ y, & y + dy, & y + (dy)', & y + (dy)'' \\ z, & z + dz, & z + (dz)', & z + (dz)'' \end{vmatrix}.$$

K ist das untere dreifache Integral der Function $f(x, y, z)$ r das Gebiet $\mathfrak{R}$ und wird mit

$$S^{(2)}_{(\mathfrak{R})} f(x, y, z)\, d\mathfrak{R} \text{ oder } \underline{S}_{(\mathfrak{R})} f(x, y, z)\, d\mathfrak{R}$$

eichnet. Wenn nun aber die beiden Grenzwerte G und K ein- er gleich sind, so heißt der gemeinsame Wert dieser beiden len das eigentliche dreifache Integral der Function $f(x, y, z)$ r das Gebiet $\mathfrak{R}$ und wird mit

$$S_{(\mathfrak{R})} f(x, y, z)\, d\mathfrak{R}$$

eichnet, wo man gewöhnlich für $d\mathfrak{R}$ resp. ω_r, wie oben aus- ndergesetzt, den Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds lt, dessen Seitenflächen den Coordinatenebenen parallel sind also für das eigentliche Tripelintegral schreibt

$$\iiint_{(\mathfrak{R})} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Jetzt sollte der Beweis der obigen zwei Sätze folgen, den aber noch etwas verschieben, indem wir zwei Hilfssätze an- en wollen, die auch schon in der Lehre der einfachen und der pelintegrale bewiesen werden und die wir auch hier der Voll- digkeit halber einschalten müssen.

1. „Ist innerhalb $\mathfrak{R}$ ein Gebiet $\mathfrak{R}'$ gegeben oder dieses selbst sei die Function $f(x, y, z)$ im ganzen Gebiete $\mathfrak{R}$ endlich, d. h. $A < f(x, y, z) < B$, so ist, wenn g' und k' die obere beziehungs- e untere Grenze von $f(x, y, z)$ in diesem Gebiete bedeutet, ohl die obere als auch untere Grenze in diesem Gebiete $\mathfrak{R}'$ ich und zwar zwischen denselben Zahlen A und B gelegen,

$$A < g' \leqq B;\ A \leqq k' < B.“$$

2. „Die obere Grenze g' in einem Gebiete $\mathfrak{R}'$, das einen il von $\mathfrak{R}$ bildet, von $f(x, y, z)$ kann nicht größer sein als die

obere Grenze g von $f(x, y, z)$ im Gebiete $\mathfrak{R}$ und desgleichen k die untere Grenze k' von $f(x, y, z)$ in $\mathfrak{R}'$ nicht kleiner sein al die untere Grenze von $f(x, y, z)$ im Gebiete $\mathfrak{R}$."

Beweis: Ad 1. Der Beweis dieser beiden Sätze bleibt derselbe auch für unseren Fall wie bei den Functionen einer zwei Veränderlichen. Es ist nach Voraussetzung $A < f(xyz) <$ also $A < g'$. Nun aber folgt aus der Definition der oberen Gre dass es einen Wert $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$ gibt, wofür $f(x_1, y_1, z_1$ $> g' - \varepsilon$ ist.

Nun ist aber $f(x_1\, y_1\, z_1) < B$ daher auch $B > g' - \varepsilon$, d $g' - B < \varepsilon$, was nur möglich ist, wenn $g' - B \leqq 0$ d. h. g' ist, also

$$A < g' \leqq B. \tag{3}$$

In analoger Weise erhält man den zweiten Theil obigen S

$$A \leqq k' < B. \tag{4}$$

Ad 2. Um nun zum Nachweise des zweiten Satzes üb gehen, so wissen wir, dass $f(x, y, z) \leqq g$ ist. Nun aber gibt es e Punkt $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$ derart, dass $f(x_1\, y_1\, z_1) > g'$ ist. Daher finden wir durch Vergleichung dieser beiden gleichungen $g > g' - \varepsilon$, d. h. $g' - g < \varepsilon$, was wiederum nur möglich ist, wenn $g' - g \leqq 0$, also $g' \leqq g$ ist, und ebenso durch ähnliche Betrachtung für die untere Grenze $k' \geqq k$ bew. w.

Nachdem wir nun diese beiden Hilfssätze vorausgesc haben, gehen wir nun zum Beweise des ersten Theiles des ob Satzes über. Wie schon bemerkt, ist dieser Nachweis ganz log dem in der Lehre der Doppelintegrale, (s. O. Stolz: „Gr züge III. pag. 51 ff.) allein um eventuellen Missverständnissen zubeugen, wollen wir ihn auch hier vorbringen.

Im Innern eines im Endlichen gelegenen Gebietes $\mathfrak{R}$, d Punkte x, y, z sämmtliche innerhalb eines bestimmten Par epipeds liegen, dessen Flächen parallel zu den Coordinatenebe sind, sei eine Function dreier Veränderlichen $f(x, y, z)$ eind definirt für jeden Punkt (x, y, z) und endlich, d. h. es exis zwei Zahlen A und B, wofür

$$A < f(x, y, z) < B$$

ist. Dieses Punktsystem $\mathfrak{R}$ erfüllen wir nun mit einer Schar einfachen Polyedern, deren Begrenzungsflächen ebene Fl sind. Die bezüglichen Inhalte dieser Polyeder seien $\omega_1\ \omega_2$ .. und zwar wählen wir diese Polyeder so, dass zu jedem von Punkte von $\mathfrak{R}$ gehören, und dass umgekehrt jeder Punkt v einem und zwar mindestens einem dieser Polyeder zugewies

s das Zeichen von $\mathfrak{R}$ anlangt, so kann dasselbe positiv oder ativ sein; wir müssen uns nur insoferne darnach richten. als auch den einzelnen Polyedern das Zeichen von $\mathfrak{R}$ geben, so ; also auch diese ω_r positiv oder negativ sind, je nachdem $\mathfrak{R}$ tiv oder negativ ist. Wie den Polyedern das Zeichen gegeben l, haben wir bereits im Früheren erörtert.

Wir nehmen nun einen beliebigen Punkt x, y, z und be-änken ihn auf alle zu $\omega_r (r = 1, 2 \ldots n)$ gehörigen System-kte. Sei g_r und k_r die obere, bezw. untere Grenze von $f(x, y, z)$ Polyeder ω_r, so soll also bewiesen werden, dass die Summe

$g_r \omega_r$ bei unbegrenzter Abnahme eines jeden Polyeders ω_r (oder was

elbe ist, eines jeden Durchmessers) nach den drei Dimensionen Raumes einen endlichen Grenzwert G hat, also in Zeichen

$$\lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n} g_r \omega_r = G \text{ und ebenso } \lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n} k_r \omega_r = K.$$

Beim Beweise dieses Satzes hat man zwei Fälle zu unter-iden:

I. $f(x, y, z) \geqq 0$ im ganzen Gebiete, d. h. $f(x, y, z)$ nimmt für Gebiet $\mathfrak{R}$ negative Werte nicht an. Damit ist natürlich auch gt, dass $g_r \geqq 0$ ist, denn $f(x, y, z) < g_r$, und da $A < f(x. y, z) < B$ ist auch $B \geqq 0$ und

$$\sum_{r=1}^{n} g_r \omega_r \geqq 0.$$

Wir betrachten nun in Analogie des Beweises dieses Satzes r Lehre der Doppelintegrale eine unbegrenzte Reihe $T_1, T_2 \ldots T_m$ er Theilungen, die unser ganzes Gebiet $\mathfrak{R}$ in eine unbegrenzte r solcher Polyeder theilt und zwar in der Weise, dass der hmesser $D_{m,u}$ eines jeden zur Schar T_m gehörigen Polyeders er ist als eine beliebig gewählte Zahl λ, wenn nur m groß g gewählt wird, d. h. wenn die Theilung nur soweit fortgeführt Was wir aber bei unseren Theilungen voraussetzen, ist, dass Polyeder der Theilung T_m in zwei benachbarten der Theilung liege.

Für das Folgende betrachten wir nur jene Polyeder der ung T_m, die mindestens einen Punkt von $\mathfrak{R}$ enthalten. Wir n diese mit

$$\omega_{m,1}, \omega_{m,2}, \ldots \omega_{m,n_m} (m = 1, 2 \ldots)$$

chnen und die obere Grenze von $f(x, y, z)$ in den dem System $\mathfrak{R}$

angehörigen Punkten von $\omega_{m,u}$ mit $g_{m,u}$ und die Summe

$$\sum_{u=1}^{n_m} g_{m,u}\,\omega_{m,u} = \Sigma_m. \tag{3}$$

Gehen wir nun von der Theilung T_m zur nächstfolgen Theilung T_{m+1}, so ist klar, dass jedes Polyeder der Theil T_m: $\omega_{m,u}$ in zwei oder mehrere Theile zerfällt, von denen aber j die keinen Punkt von $\mathfrak{R}$ enthalten, in die Theilung nicht au nehmen sind. Sei in analoger Weise die obere, resp. untere Gr von $f(x, y, z)$ in diesen neuen Polyedern beziehungsweise g_{m+} $k_{m+1,u}$, so ist leicht zu ersehen, dass, wenn wir die neue Su

$$\sum_{u=1}^{n_{m+1}} g_{m+1,u}\,\omega_{m+1,u} = \Sigma_{m+1} \tag{4}$$

nennen,

$$\Sigma_{m+1} \leqq \Sigma_m \tag{5}$$

ist, denn $g_{m+1,u} \geqq 0$. Durch die Theilung T_{m+1} sind, wie bemerkt, die Polyeder $\omega_{m,u}$ in mehrere Theile zerschnitten wo und davon werden möglicherweise einige wegfallen, nämlich jenigen, die außerhalb $\mathfrak{R}$ fallen. Σ_m wird daher durch Wegl dieser Theilchen $\omega'_{m+1,u}$ nicht vergrößert, da ja einige po (da $g_{m+1,u} \geqq 0$) Producte wegfallen. Nach dem früher angefü Hilfssatze, dass die obere Grenze in einem Theile des Gebietes größer sein kann als im ganzen Gebiete, dass also $g_{m+1,u} \leqq g_m$ folgt $g_{m+1,u} \cdot \omega_{m+1,u} < g_{m,u}\,\omega_{m+1,u}$, daher auch $0 \leqq \Sigma g_{m+1,u}\,\omega_{m+1,u} = \Sigma_{m+1} < \Sigma g_{m,u}\,\omega_{m+1,u} \leqq \Sigma_m$, woraus sofort (5) folgt.

Σ_m nimmt also bei wachsendem m nicht zu und hat bei $\lim m = +\infty$ einen Grenzwert und zwar, da $\Sigma_m \geqq 0$ is einen nicht negativen endlichen Grenzwert, den wir mit zeichnen wollen:

$$\lim_{m=+\infty} \Sigma_m = G. \tag{6}$$

Dabei ist aber

$$\Sigma_m \geqq G, \tag{7}$$

denn wenn Σ_m beständig abnimmt, hat es einen endlichen wert bei $\lim m = +\infty$, der nicht größer sein kann als Σ_m sel

Wenn wir obige Formel (6) in Worten ausdrücken so heißt das: Es lässt sich jedem $\frac{1}{2}\varkappa > 0$ ein $\mu > 0$ so zu o

$$0 \leqq \Sigma_m - G < \frac{1}{2}\varkappa$$

wenn nur $m > \mu$ ist, d. h.

$$\Sigma_m < G + \frac{1}{2}\varkappa.$$

Nun können wir leicht zeigen, dass

$$S = \sum_{r=1}^{n} g_r \omega_r \geqq G$$

wie immer auch die Polyeder $\omega_1 \ldots \omega_n$ gewählt werden mögen.

Dies machen wir so. Doch zuvor noch eine Bemerkung. nn wir die Ungleichung (10) erwiesen haben werden, kann man en, dass G die untere Grenze ist für alle Werte, welche

$g_r \omega_r$ bei jeder zulässigen Wahl der Polyeder $\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n$ an-

men kann.

Nun wollen wir den wohl etwas umständlichen Beweis der mel (10) antreten. Wir denken uns wiederum das Gebiet $\mathfrak{R}$ lie Polyeder $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$ getheilt, d. h. mit anderen Worten nehmen an, das Parallelepiped, das unser Gebiet umschließt, in Theile $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$ getheilt und denken uns eine weitere ilung T_m in Polyeder $\omega_{m,u}$ vorgenommen, wo m so groß sein dass jedes $\omega_{m,u}$ kleiner als das kleinste der $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$ ist. m ist klar, dass kein ω_r ganz in einem Polyeder $\omega_{m,u}$ liegen n. Beide Theilungen denken wir uns gleichzeitig gemacht. m sehen wir, dass die Theile $\omega_{m,u}$ in zwei Classen zerfallen: olche, die ganz innerhalb eines Theiles ω_r liegen oder wenigs nicht über das Polyeder ω_r hinausragen und 2. solche, die der Oberfläche eines oder mehrerer ω_r je ein Stück gemein en, ohne ganz in einem von ihnen zu liegen. Die ersteren benen wir mit $\omega'_{m,u}$, die letzteren mit $\omega''_{m,u}$ und die bezüglichen ile der Summe Σ_m seien Σ'_m und Σ''_m, so dass

$$\Sigma_m = \Sigma'_m + \Sigma''_m$$

Es ist nun $g_{m,u} \leqq B$, weshalb wir finden

$$\Sigma''_m = \Sigma'' g_{m,u} \omega_{m,u} < B \Sigma'' \omega_{m,u},$$

sich die Summe Σ'' eben auf alle Polyeder der 2. Classe eht.

$$\sum'' \omega_{m,u} \leqq 2\Delta_m \sum_{r=1}^{n} O_r + \frac{\Delta_m^3}{3} \Phi_P, \tag{13}$$

denn man kann nach dem Satze S. 22 eine solche Länge L_r geben, dass wenn der größte unter den Durchmessern der $\omega_{m,u}$ mit $\Delta_{m,r}$ bezeichnet sei, L_r nicht überschreitet, ihre Summe Σ größer sein kann als $2\Delta_{m,r} O_r + \frac{\Delta_{m,r}^3}{3} \Phi_P$, und wenn wir den grö aller Durchmesser von allen der Schar T_m angehörigen Polye $\omega_{m,u}$ überhaupt Δ_m nennen und wenn dieser Durchmesser höch die kleinste der Längen $L_1, L_2 \ldots L_n$ erreicht, so kann die Su $\Sigma'' \omega_{m,u}^{(r)}$ nicht größer sein als $2\Delta_m O_r + \frac{\Delta_m^3}{3} \Phi_P$, so dass also, wir r die Werte $1, 2, \ldots n$ durchlaufen lassen und die bezügli Ungleichungen summieren, sofort Ungleichung (13) folgt.

Es ist daher

$$\Sigma'' \omega_{m,u} \leqq 2\Delta_m \sum_{r=1}^{n} O_r + \frac{\Delta_m^3}{3} \Phi_P$$

und

$$\Sigma_m'' < B\left\{2\Delta_m \sum_{r=1}^{n} O_r + \frac{\Delta_m^3}{3} \Phi_P\right\}. \tag{14}$$

Aus den Formeln (11) und (14) folgt daher

$$\Sigma_m \leqq \Sigma_m' + 2B\Delta_m \sum_{r=1}^{n} O_r + \frac{B\Delta_m^3}{3} \Phi_P. \tag{15}$$

Um nun weiterzukommen, theilen wir auch die Su $S = \sum_{r=1}^{n} g_r \omega_r$ in zwei Theile, indem wir jedes ω_r durch die Su der Theile, in die es durch die zweite Theilung zerfällt, ers und die Producte $g_r \omega_r$ in der angegebenen Weise auflösen. D erhaltenen Glieder von S trennen wir in zwei Gruppen und rechnen wir zur ersten Gruppe jene, bei denen der zweite F $\omega_{m,u}$ ganz innerhalb eines ω_r liegt, zur zweiten alle übrigen Gl Bezeichnen wir die Glieder der ersten Gruppe mit S', die zweiten mit S'', so ist

$$S = S' + S'' \tag{16}$$

und da $g_r \geqq 0$ ist, so ist auch $S'' \geqq 0$ und wegen (16) auch

$$S \geqq S'.$$

Aus (11) und (16) folgt:

$$\Sigma_m - S = (\Sigma'_m - S') + (\Sigma''_m - S'') < \Sigma'_m - S' + \Sigma''_m$$

weil

$$\Sigma''_m < B\left\{2\Delta_m \sum_{r=1}^{n} O_r + \frac{\Delta_m^3}{3}\Phi_P\right\}$$

$$\Sigma_m - S \leqq \Sigma'_m - S' + 2B\Delta_m \sum_{r=1}^{n} O_r + B\frac{\Delta_m^3}{3}\Phi_P.$$

Nun ist aber $\Sigma'_m - S' \leqq 0$, denn $\Sigma'_m - S' = \omega'_{m,u}(g_{m,u} - g_r) \leqq 0$, $\omega'_{m,u} \leqq g_r$ ist.

Daher ergibt sich aus (18)

$$\Sigma_m - S \leqq 2B\Delta_m \sum_{r=1}^{n} O_r + B\frac{\Delta_m^3}{3}\Phi_P.$$

Wählen wir nun m so groß, dass $\Delta_m < 1$, also $\Delta_m^3 < \Delta$ wird, uns ja freisteht und ferner, dass

$$\Delta_m < \varepsilon : \left\{2B\sum_{r=1}^{n} O_r + \frac{B}{3}\Phi_P\right\}$$

d. h, wählen wir m so groß, dass Δ_m kleiner wird als die kleinere den beiden Zahlen 1 und $\varepsilon : \left\{2B\sum_{r=1}^{n} O_r + \frac{B}{3}\Phi_P\right\}$, so wird $S < \varepsilon$, d. h. $\Sigma_m \leqq S$, was unmittelbar die verlangte Beziehung wenn wir beachten, dass nach (7) $\Sigma_m \geqq G$ ist.

Also ergibt sich

$$G \leqq S \quad \text{w. z. bew. w.}$$

Und nun können wir zum eigentlichen Beweise des Satzes (A) gehen in dem Falle I, dass $f(x, y, z) \geqq 0$ ist in jedem Punkte des Gebietes $\mathfrak{K}$.

Zu diesem Zwecke betrachten wir den Unterschied

$$\sum_{r=1}^{n} g_r \omega_r - G = \left(\sum_{r=1}^{n} g_r \omega_r - \Sigma_m\right) + \left(\Sigma_m - G\right)$$

geben dem m einen so großen Wert, dass für die Differenz

$\Sigma_m - G$ die Umgleichung (8) S. 29 besteht. Nun wird es darum handeln, für $\sum_{r=1}^{n} g_r \omega_r - \Sigma_m$ eine beliebige obere Grenz erhalten, d. h. man soll zeigen, dass dieser Unterschied kl gemacht werden kann, als jede beliebig vorgelegte Zahl. Di nun aber leicht. Wir brauchen nur im Vorhergehenden das Sy der Polyeder $\omega_{m,1}, \omega_{m,2} \ldots \omega_{m,n_m}$ mit dem Systeme der Poly $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$ zu vertauschen. Sei D der größte aller Durchm der Polyeder w_r und $O_{m,u}$ die Oberfläche des Polyeders $(u = 1, 2 \ldots n_m)$, so folgt direct aus (19), dass

$$(22) \qquad \sum_{r=1}^{n} g_r \omega_r - \Sigma_m < 2BD \sum_{u=1}^{n_m} O_{m,u} + B\frac{D^3}{3}\Phi_P$$

ist, und dies ist kleiner als $\frac{1}{2}\varkappa$, wenn D so groß genommen dass $D < \varkappa : \left\{ 4B \sum_{u=1}^{n_m} O_{m,u} + \frac{2}{3} B\Phi_P \right\}$ ist.

Dann ist aber nach (8) und (22) zufolge der Relation (

$$(23) \qquad \sum_{r=1}^{n} g_r \omega_r - G < \frac{1}{2}\varkappa + \frac{1}{2}\varkappa = \varkappa,$$

wenn nur $D < \varkappa : \left\{ 4B \sum_{u=1}^{n_m} O_{m,u} + \frac{2}{3} B\Phi_P \right\}$ ist und damit ist Satz für den Fall I erwiesen.

Ebenso könnte man für diesen Fall auch die zweite de in (1) S. 23 angeführten Relationen, d. i. $\lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n} k_r \omega_r = K$ erv

In Anschluss an diese Erörterung wollen wir nun das f ersten Fall erlangte Ergebnis auf die Function $f(x, y, z) = 1$ ja auch unter oben charakterisirte Functionen fällt, anw Es ist hier $g_r = k_r = 1$ für jedes $r = 1, 2 \ldots n$. Dann ist obiger Formel bei $\lim \omega_r = 0$ auch der Grenzwert von $\sum_{r=1}^{n}$ endliche nicht negative Zahl, also

$$(24) \qquad \lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n} \omega_r = \mathfrak{K}$$

dabei nach (10)

$$\sum_{r=1}^{n} \omega_r \geqq \mathfrak{K}.$$

Man hat aber auch nach (2)

$$\sum_{r=1}^{n} \omega_r < \mathfrak{K} + \varkappa;$$

er kann $\mathfrak{K}$ nicht negativ sein, denn wäre $\mathfrak{K} < 0$, gäbe es eine tive Zahl $\varkappa$ derart, dass $\mathfrak{K} + \varkappa < 0$ daher $\sum_{r=1}^{n} \omega_r < 0$ wäre, was öglich ist. Wenn $\mathfrak{K}$ ein Körper mit gewöhnlichen Oberflächen muss $\mathfrak{K} > 0$ sein, denn negativ kann es nach gerade Vorhernndem nicht sein, also bleibt nur der Fall $\mathfrak{K} = 0$ übrig. Dies ber widersinnig, denn dann wäre nach (26) $\sum_{r=1}^{n} \omega_r < \varkappa$. Eine Summe $\sum_{r=1}^{n} \omega_r$ ist ihrer Definition nach größer als der Inhalt vollständig in $\mathfrak{K}$ liegenden Polyeders.

Nun wollen wir zum zweiten Falle übergehen.

II. $f(x,y,z)$ kann im Gebiete $\mathfrak{K}$ sein Zeichen wechseln. Benen wir wieder wie früher mit k die untere Grenze von $f(x,y,z)$ en Punkten des Gebietes $\mathfrak{K}$, so ist $f(x,y,z) - k$ sicher nicht tiv und somit sicher eine Function, die unter I. fällt. Ihre Grenze in den Polyedern ω_r ist $g_r - k$. Wir finden also, n wir den für den Fall I. erwiesenen Satz anwenden, dass

$$\sum_{r=1}^{n} (g_r - k)\,\omega_r \quad (r = 1 \ldots n)$$

m $\omega_r = 0$ einen endlichen Grenzwert $H \geqq 0$ hat.

Und so bekommen wir, wenn wir berücksichtigen

$$\sum_{r=1}^{n} g_r \omega_r = \sum_{r=1}^{n} (g_r - k)\,\omega_r + k \sum_{r=1}^{n} \omega_r$$

$$\lim \sum_{r=1}^{n} g_r \omega_r = H + k\,\mathfrak{K},$$

gilt unser Satz auch für diesen Fall.

§. 4. Wir wollen nun weitergehen zur Betrachtung anderen Summe und zwar der Summe

$$\sum_{r=1}^{n'} g_r' \omega_r', \qquad \sum_{r=1}^{n'} k_r' \omega_r',$$

wo g_r' die obere und k_r' die untere Grenze der Function $f(x, y,$ den Polyedern ω_r' bedeutet, die ganz im Innern von $\mathfrak{R}$ liegen, also solcher Polyeder, deren Punkte sämmtlich Punkte des dimensionalen Systems $\mathfrak{R}$ sind. Dann gilt hier folgender Sat

„Die Summen $\sum_{r=1}^{n'} g_r' \omega_r'$ und $\sum_{r=1}^{n'} k_r' \omega_r'$ $(r = 1, 2 \ldots n)$ habe unbeschränkter und unbegrenzter Abnahme der Durchmesser Polyeder $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$ einen endlichen Grenzwert G' resp. in Worten ausgedrückt heißt das: „Es lässt sich einer jeden tiven Zahl $\varkappa$ eine andere ebenfalls positive Zahl λ so zuordnen,

$$\left| G' - \sum_{r=1}^{n'} g_r' \omega_r' \right| < \varkappa$$

ist, wenn nur $\omega_r < \lambda^3$ oder was dasselbe ist, wenn nur der D messer D_r eines jeden Polyeders ω_r $(r = 1 \ldots n)$ kleiner als

In Zeichen schreiben wir

$$\lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n'} g_r' \omega_r' = G'. \tag{28}$$

Falls es keine ω_r' von obiger Beschaffenheit gibt, so wir $G' = 0$.

Den Beweis dieses Satzes übergehe ich, da er im Wesent derselbe ist wie der vorhergehende bezüglich des Grenzwer Es ändern sich nur die Relationen (5) und (10), so dass unserem Falle heißt

$$\Sigma_{m+1} \geqq \Sigma_m$$

und ebenso

$$\sum_{r=1}^{n'} g_r' \omega_r' \leqq G'.$$

Wenn daher $f(x, y, z)$ nicht negative Werte annimmt,

$$\sum_{r=1}^{n} g_r' \omega_r' \leqq \sum_{r=1}^{n} g_r \omega_r,$$

er auch

$$G' \leqq G .$$

Nach diesem können wir daran gehen, die Körperzahl zu iren, und zwar ergibt sich der Unterschied äußere und innere perzahl.

Bereits in der Formel (25) haben wir bemerkt, dass $\mathfrak{K}$ die re Grenze für die Summe der Polyeder ω_r ist, und dass bei $\omega_r = 0$ $\lim \sum_{r=1}^{n} \omega_r = \mathfrak{K}$ ist. Dieser Grenzwert ist endlich und bezeichnen ihn als Körperzahl.

Allein diesen Begriff kann man noch verallgemeinern, wenn in der Relation (28) die Function $f(x,y,z) = 1$ sein lässt. n ist natürlich auch $g_r' = k_r' = 1$ und aus der Formel (28) , wenn wir den entsprechenden Grenzwert mit $\mathfrak{K}'$ bezeichnen

$$\lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n'} \omega_r' = \mathfrak{K}' .$$

Da

$$\sum_{r=1}^{n'} \omega_r' \leqq \sum_{r=1}^{n} \omega_r$$

o ist auch

$$0 \leqq \mathfrak{K}' < \mathfrak{K} .$$

Wenn nun $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}'$ ist, so heißt ihr gemeinsamer Wert die oder der Inhalt des Punktsystems $\mathfrak{K}$. Ist aber $\mathfrak{K} > \mathfrak{K}'$, so wird die äußere, $\mathfrak{K}'$ als die innere Körperzahl des dreidimensionalen ms bezeichnet.

Wenn $\mathfrak{K} = 0$ ist, so ist auch $\mathfrak{K}' = 0$, das endliche Punkt- n $\mathfrak{K}$ hat den Inhalt 0 und wird als discret bezeichnet. Ein s System ist dadurch charakterisirt, dass die ihm angehörigen e sämmtlich in Theilen $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$ des Gebietes $\mathfrak{K}$ liegen, Summe kleiner ist als eine beliebig vorgegebene Zahl ε. Es mlich

$$0 \leqq \mathfrak{K} < \sum_{r=1}^{n} \omega_r ,$$

$< \varepsilon$, woraus sich ohneweiteres, da ε jede beliebige Zahl ann, ergibt: $\mathfrak{K} = 0$.

Beim Beweise obigen Satzes dürfte es vielleicht befremden, vir $f(x,y,z)$ zuerst als positiv genommen haben. Ist jedoch

$f(x,y,z)$ negativ, so haben wir eben den zweiten der oben a
führten beiden Fälle, zu dem eben auch jener Fall zu rechne
dass $f(x,y,z)$ keinen positiven Wert annimmt im Gebiete $\mathfrak{K}$.

Wir wollen nun weiter einen Satz beweisen, der nu
diese vorhergehende Untersuchung passend gereiht werden k

„Wenn die äußere und innere Körperzahl des Syste
(wir bezeichnen hier, wo wir es mit einem Punktsystem im a
meinen zu thun haben, dies mit F, wie man auch auf
füglicher F geschrieben hätte) zusammenfallen, sind auch die G
werte von $\sum_{r=1}^{n} g_r \omega_r$ und $\sum_{r=1}^{n'} g_r' \omega_r'$ einander gleich."

Beweis: Wir behalten die früheren Bezeichnungen auf
und fügen noch eine weitere neue hinzu, indem wir die Randt
der $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$ mit $\omega_1'', \omega_2'' \ldots \omega_{n''}''$ bezeichnen, d. h. also dieje
Theile der $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$, die außer Punkten von F auch
außerhalb F gelegene Punkte enthalten, und entsprechend
$g_1'', g_2'' \ldots g_{n''}''$ die obere Grenze der Werte $f(xyz)$ in den b
lichen Theilen $\omega_1'', \omega_2'' \ldots \omega_{n''}''$ für die in ω_r'' vorhandenen Punkte v

Dann ist natürlich

$$\sum_{r=1}^{n} g_r \omega_r - \sum_{r=1}^{n'} g_r' \omega_r' = \sum_{r=1}^{n''} g_r'' \omega_r'' . \tag{29}$$

Nun ist aber, da $f(x,y,z)$ der Voraussetzung nach endli
auch $A < g_r'' < B$, also $|g_r''| < \Gamma$, wo Γ die größere der b
Zahlen $|A|$ und $|B|$ bedeuten möge.

Dann sieht man sofort, dass

$$\left| \sum_{r=1}^{n} g_r \omega_r - \sum_{r=1}^{n'} g_r' \omega_r' \right| < \Gamma \sum_{r=1}^{n''} \omega_r'' , \tag{30}$$

und hiemit ist obiger Satz erwiesen, da wenn $\lim \sum_{r=1}^{n''} \omega_r'' =$
d. h. $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}'$ (die äußere und innere Körperzahl des Syst
fallen zusammen) auch

$$\lim_{\omega_r = 0} \left(\sum_{r=1}^{n} g_r \omega_r - \sum_{r=1}^{n'} g_r' \omega_r' \right) = 0$$

ist, d. i. wenn es eine solche Zahl $\varkappa > 0$ gibt und ihr eine
Zahl λ entspricht, dass $\sum_{r=1}^{n''} \omega_r'' < \varkappa$ ist, wenn nur $\omega_r < \lambda^3$ (1
ist, dann ist auch

$$0 \leqq \sum_{r=1}^{n} g_r \omega_r - \sum_{r=1}^{n'} g_r' \omega_r' < \varkappa$$

$$G = G'.$$

Obige Gleichung $\lim \sum_{r=1}^{n''} \omega_r'' = 0$ oder $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}'$ besteht nun für

es stetige Punktsystem, das wir, um uns der geometrischen sdrucksweise zu bedienen, als einen von einer endlichen ge- nlichen Oberfläche begrenzten Körper $\mathfrak{K}$ erkennen, wenn wir er einer „gewöhnlichen" Oberfläche jene verstehen, die mit jeder allelen zur X- beziehungsweise zur Y- und Z-Axe höchstens e bestimmte Anzahl von Punkten gemein hat.

Für jedes räumliche Punktsystem ist

$$\lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n} \omega_r'' = \mathfrak{K} - \mathfrak{K}',$$

es wird sich darum handeln, dies für unseren Körper $\mathfrak{K}$ zu immen. Zu diesem Behufe wählen wir nur eine unbegrenzte ie von Scharen solcher Polyeder, deren Durchmesser sämmtlich ner als eine beliebig vorgegebene Zahl werden können. Wir den eine specielle Theilung an in rechtwinklige Parallelepipede γ_u, indem wir analog dem Früheren den ganzen Raum, den r Körper $\mathfrak{K}$ einnimmt, durch Ebenen im bezüglichen Abstande $= 1 \ldots n$), $\varepsilon_s (s = 1, 2 \ldots m)$ und $\gamma_u (u = 1 \ldots t)$ parallel den rdinatenebenen theilen.

Dann erhalten wir nach (30)

$$\left| \sum_{s=1}^{m} \sum_{u=1}^{t} g_{r,s,u} \delta_r \varepsilon_s \gamma_u - \sum_{r=1}^{n'} \sum_{s=1}^{m'} \sum_{u=1}^{t'} g'_{r,s,u} \delta_r' \varepsilon_s' \gamma_u' \right| < \Gamma \sum_{r=1}^{n''} \sum_{s=1}^{m''} \sum_{u=1}^{t''} \delta_r'' \varepsilon_s'' \gamma_u''.$$

Nun ist aber $\sum_r \sum_s \sum_u \delta_r'' \varepsilon_s'' \gamma_u''$ nichts anderes als die Summe der llelepipede, durch die die Oberfläche von $\mathfrak{K}$ läuft, und für e haben wir schon im Früheren eine obere Grenze aufgestellt:

$$\sum_{r=1}^{n''} \omega_r'' < 2p (b' - b)(c' - c) \Delta + 8 r \Gamma (a' - a)(b' - b)$$

dies ist gewiss kleiner als die Zahl $\varkappa$, wenn sowohl

$$8 r \Gamma (a' - a)(b' - b) < \frac{\varkappa}{2}, \text{ d. h. } \Gamma < \frac{\varkappa}{16 r (a' - a)(b' - b)}$$

als auch

$$2p\Delta(b'-b)(c'-c) < \frac{\varkappa}{2}, \text{ d. h. } \Delta < \frac{\varkappa}{4p(b'-b)(c'-c)}$$

ist.

Nun aber ist die linke Seite (30) so beschaffen, dass Grenzwert bei lim $\omega_r = 0$ $(r = 1, \ldots n)$ $|G - G'|$ ist. Dahe $|G - G'| < \varkappa$, d. h. $G = G'$. Ebenso kann man die Gleic von K und K' zeigen. Somit ist für jeden Körper obiger schaffenheit $\mathfrak{K} - \mathfrak{K}' = 0$.

Wir wollen nun noch eine wichtige Anwendung des S auf S. 23 besprechen, wenn wir $f(x, y, z) = 1$ annehmen. Dies steht darin, dass wir das positive Tripelintegral

$$\mathfrak{K} = S_{(\mathfrak{K})} d\mathfrak{K} = \iiint_{(\mathfrak{K})} dx\,dy\,dz$$

als die Zahl des von einfachen gewöhnlichen Oberflächen begre Körpers $\mathfrak{K}$ bezeichnen oder als seinen Inhalt. Nach dem stehenden convergiren sowohl $\sum_{r=1}^{n} \omega_r$ als $\sum_{r=1}^{n'} \omega'_r$ bei lim $\omega_r = 0$ endlichen Grenzwerte $\mathfrak{K}$, mögen wir unter ω_r was immer für Pol verstehen, die das Gebiet $\mathfrak{K}$ gerade erfüllen. Immer erhalten wir und nur einen Wert $\mathfrak{K}$, so dass wir berechtigt sind, dieses den Inhalt des Körpers $\mathfrak{K}$ anzusehen. Wie das Zeichen Inhaltes von $\mathfrak{K}$ genommen werden muss, haben wir berei Früheren S. 4 ausdrücklich erläutert. Zu bemerken ist nur dass sich auch aus den Prismen relative Größen ableiten l Setzt man in einer der beiden Grundflächen des Prismas bestimmten Umlauf fest, so erscheint dieser von jedem Punk anderen Grundfläche aus entweder als positive oder negative Dre Mit diesem Zeichen wird alsdann der Inhalt des Prismas ver und heißt dann die relative Zahl des Prismas. Lassen wi die $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$ sämmtlich positiv oder sämmtlich negativ se erhalten wir die relative Körperzahl, die das Zeichen nach de meinsamen Zeichen der ω_r erhält.

Im Anschlusse daran wollen wir noch zwei Beispiele beha Wenn $\mathfrak{K} = 0$ ist, ist auch $\mathfrak{K}' = 0$; das räumliche Punktsystem h Inhalt Null und wird, wie schon oben bemerkt, als discret bezei Ein solches und zwar ein vollständiges können wir leicht Wir brauchen nur die Punkte $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und x $y = \frac{1}{m}$, $z = \frac{1}{p}$, wo m, n, p jede natürliche Zahl sein könn betrachten.

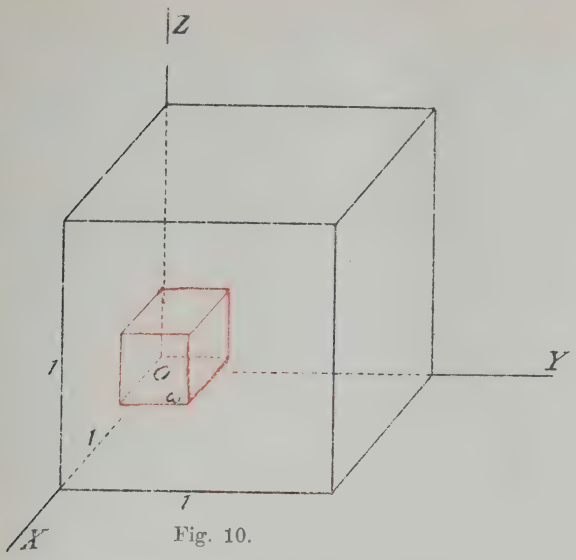


Fig. 10.

Dies lässt sich so zeigen. Schneiden wir vom Punkte $x=0$, $y=0$, $z=0$ ein kleines Gebiet ω aus, wie die Fig. 10 zeigt, liegen außerhalb desselben eine endliche Anzahl $\rho(\omega)$ von den Punkten $x=\frac{1}{n}$, $y=\frac{1}{m}$, $z=\frac{1}{p}$. Theilt man dann das Parallelepiped, das die Kantenlänge 1 hat, weniger dem kleinen Parallelepiede ω in Parallelepipede ω', so ist die Summe aller Parallelepiede, zu denen Punkte unseres Systems gehören, sicher kleiner als $\omega+2\rho(\omega)\omega'$ also gewiss kleiner als die beliebig vorgegebene Größe $\varkappa>0$, wenn man $\omega<\frac{\varkappa}{2}$ wählt und dann $\omega'<\frac{\varkappa}{4\rho(\omega)}$ nimmt. Dann ist

$$\omega+2\rho(\omega)\omega'<\frac{\varkappa}{2}+2\rho(\omega)\omega'<\frac{\varkappa}{2}+\frac{\varkappa}{2}=\varkappa;$$

das räumliche Punktsystem ist discret.

2. Um ein nichtstetiges räumliches Punktsystem zu erhalten, in beide Körperzahlen einander gleich sind, fügen wir zu den eben erwähnten Punkten alle Punkte

$$0>x\geqq-1,\ 0>y\geqq-1,\ 0>z\geqq-1.$$

Für diese ist sowohl die äußere wie innere Körperzahl $=1$.

Allgemeine Bedingung für das Vorhandensein eines eigentlichen dreifachen Integrals. Erklärung desselben durch einen Grenzwert.

§ 5. Was nun die Bedingung anlangt, unter der ein eigentliches dreifaches Integral der Function $f(x,y,z)$, die im Gebiete $\mathfrak{R}$ allenthalben eindeutig und endlich ist, existiert, so besteht folgender Satz:

„Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Exi
eines eigentlichen Tripelintegrals von der Function $f(x, y, z)$, die
das Gebiet $\mathfrak{R}$, d. h. im ganzen Gebiete $\mathfrak{R}$ eindeutig und en
ist, besteht darin, dass die beiden Grenzwerte G und K zusam
fallen, d. h. dass

$$G = \lim_{\omega_r = 1} \sum_{r=1}^{n} g_r \omega_r = K = \lim_{\omega_r = 1} \sum_{r=1}^{n} k_r \omega_r$$

ist, oder wenn wir dies in eine Formel zusammenfassen, das

$$\lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n} (g_r - k_r) \omega_r = 0 \tag{1}$$

ist, d. h. dass jedem $\varkappa > 0$ eine ebenfalls positive Zahl λ s
spricht, dass

$$0 \leqq \sum_{r=1}^{n} (g_r - k_r) \omega_r < \varkappa$$

ist, wenn nur $\omega_r < \lambda^3$ oder wenn der Durchmesser eines
Polyeders ω_r kleiner als λ ist.

Für die Differenz $g_r - k_r$ setzt man gewöhnlich nach Rie
σ_r und bezeichnet dieses σ_r als die Schwankung der Function $f(x$
im ω_r oder aber auch als kritische Summe.

Obige Bedingung ist jedoch einer bedeutenden Vereinfa
fähig, die wir im Folgenden aussprechen wollen:

„Die nothwendige und hinreichende Bedingung zur Ex
eines Tripelintegrals der Function $f(x, y, z)$ über das Gebiet
steht darin, dass jeder positiven Zahl $\varkappa$ mindestens ein S
das Gebiet $\mathfrak{R}$ gerade erfüllender Polyeder $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$ ents
derart, dass die nicht negative Summe $\sum_{r=1}^{n} \sigma_r \omega_r$ kleiner ist a
beliebig vorgegebene Zahl $\varkappa$."

Beweis: Dass diese hier gegebene Bedingung wirklich
wendig ist, erhellt unmittelbar aus dem ersten Satze dieses
graphen. Sie reicht aber auch vollständig aus. Vor allem
bemerken wir, dass, wenn für das System von Polyedern ω_1, ω_2

$$0 \leqq \sum_{r=1}^{n} \sigma_r \omega_r < \varkappa \tag{2}$$

ist, diese Ungleichung auch für jedes dem Systeme ω_1, ω_2
durch Zertheilung der $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$ angehörige System von Pol
gilt, denn die so entstehende neue Summe

$$(0 \leqq) \sum_{r=1}^{n} \sigma_r^0 \omega_r^0,$$

ω_r^0 die Polyeder bedeutet, die eben durch die Zerstückelung
ω_r entstehen, kann nicht größer sein als $\sum_{r=1}^{n} \sigma_r \omega_r$, denn die
ilung in die Theile $\omega_1^0, \omega_2^0 \ldots \omega_{n_0}^0$ zerschneidet die $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$,
ass einige Stücke der $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$ in der neuen Summe nicht
r vorkommen. Weiters aber ist $\sigma_r \geqq \sigma_r^0$, denn wie wir im
ieren gesehen haben, ist $g_r^0 \leqq g_r$ aber auch $k_r^0 \geqq k_r$, wo
nd k_r^0 die obere beziehungsweise untere Grenze in den Theilen ω_r^0
ω_r bedeuten.

Folglich ist

$$g_r - k_r \geqq g_r^0 - k_r^0$$

$$\sum_{r=1}^{n} \sigma_r \omega_r \geqq \sum_{r=1}^{n_0} \sigma_r^0 \omega_r^0$$

daher auch

$$\sum_{r} \sigma_r^0 \omega_r^0 < \varkappa.$$

Wir können also jetzt jedes der ω_r^0, für das wir einfach
er ω_r schreiben wollen, kleiner als λ^3 nehmen. Nun ist aber
einem der früheren Sätze, falls nur $\omega_r < \lambda^3$ $(r = 1, 2 \ldots n)$ ist,

$$G < \sum_{r=1}^{n} g_r \omega_r + \varkappa \text{ und } K > \sum_{r=1}^{n} k_r \omega_r - \varkappa$$

$$0 \leqq G - K < \sum_{r=1}^{n} (g_r - k_r) \omega_r + 2\varkappa = \sum_{r=1}^{n} \sigma_r \omega_r + 2\varkappa.$$

Nun ist aber

$$\sum_{r=1}^{n} \sigma_r \omega_r < \varkappa,$$

olgt

$$G - K < 3\varkappa,$$

d. h. dass nothwendig $G - K = 0$ sein muss und hiemit ist erwi
dass die oben angeführte Bedingung auch hinreichend ist
Existenz eines eigentlichen dreifachen Integrals.

Erklärung des dreifachen Integrals durch einen Grenzv

§ 6. Wir nehmen wieder unsere oben definirte Function $f(x,$
die im Gebiete $\mathfrak{R}$, das wir uns mit den Polyedern $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$ g
erfüllt denken, eindeutig definirt und endlich sei. Sind
die Grenzwerte der beiden Summen

$$\sum_{r=1}^{n} g_r \omega_r \quad \text{und} \quad \sum_{r=1}^{n} k_r \omega_r,$$

die wir mit G beziehungsweise K bezeichnet haben, (bei $\lim \omega$
einander gleich und zwar beide gleich dem Werte J, so ist

$$\lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n} f_r \omega_r = J, \tag{1}$$

wo

$$k_r \leqq f_r \leqq g_r$$

ist, d. h. irgend ein Wert von $f(xyz)$ im Intervalle $(g_r, k$
Gebiete ω_r."

Vorzüglich aber gilt der Satz:

„Wenn x_r, y_r, z_r irgend einen Punkt im Polyeder ω
deutet, und wenn

$$\sum_{r=1}^{n} f(x_r, y_r, z_r)\, \omega_r$$

bei $\lim \omega_r = 0$ bei jeder Wahl der Punkte $(x_r\, y_r\, z_r)$ den
endlichen Grenzwert J hat, so ist derselbe das dreifache In
von $f(x, y, z)$ über unseren vorgelegten Körper oder unser vorge
Gebiet $\mathfrak{R}$, d. h.

$$J = S_{(\mathfrak{R})} f(x, y, z)\, d\mathfrak{R} = \lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n} f(x_r, y_r, z_r)\omega_r." \tag{2}$$

Mit Worten bedeutet dies:

„Jedem $\varkappa > 0$ lässt sich eine andere positive Zahl λ
ordnen, dass

$$\left| \sum_{r=1}^{n} f(x_r, y_r, z_r)\, \omega_r - J \right| < \varkappa$$

wenn nur $\omega_r < \lambda^3 (r = 1, 2 \ldots n)$ ist, mag $x_r y_r z_r$ was immer ein Punkt von ω_r sein."

Beweis: Es ist der Voraussetzung nach

$$k_r \leqq f_r \leqq g_r,$$

also

$$\sum_{r=1}^{n} k_r \omega_r \leqq \sum_{r=1}^{n} f_r \omega_r \leqq \sum_{r=1}^{n} g_r \omega_r$$

Nun ist aber weiter nach Voraussetzung

$$G = \lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n} g_r \omega_r = \lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n} k_r \omega_r = K,$$

folgt (1) aus (3) unmittelbar nach der Methode der Bestimmung des Grenzwertes durch Einschließung zwischen zwei Grenzen. also $G = K = J$.

Jedoch schon aus (2) ersieht man unmittelbar die Gleichung $K = J$. Daher ist wirklich

$$\lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n} f_r \omega_r = J \quad \text{w. z. bew. w.}$$

Alles dies wäre ganz klar, wenn die Function $f(x, y, z)$ für Punkt (x'_r, y'_r, z'_r) eines jeden Polyeders ω_r die obere und nen anderen Punkt (x''_r, y''_r, z''_r) die untere Grenze erreichen ; wie es z. B. bei über das ganze Gebiet mit Einschluss der en stetigen Functionen der Fall ist. (Weierstraß.) Allein in m allgemeinen Falle muss das nicht statthaben.

Wir müssen uns also auf einen Satz berufen, der uns über Schwierigkeit hinweghebt und der lautet, dass eine Function $z)$ die obere (untere) Grenze nicht erreichen muss, dass es edenfalls einen Punkt (x'_r, y'_r, z'_r) in ω_r gibt, wofür eine positive $\sigma > 0$ existirt, dass

$$g_r \geqq f(x'_r, y'_r, z'_r) > g_r - \sigma$$

so

$$\sum_{r=1}^{n} g_r \omega_r \geqq \sum_{r=1}^{n} f(x'_r\, y'_r z)\, \omega_r > \sum_{r=1}^{n} g_r \omega_r - \sigma \sum_{r=1}^{n} \omega_r .$$

Aus (2*) findet man, wenn man $x_r = x_r', y_r = y_r', z_r$ setzt

$$J + \varkappa > \sum_{r=1}^{n} f(x_r', y_r', z_r')\, \omega_r > J - \varkappa, \tag{5}$$

wenn nur jedes Polyeder $\omega_r < \lambda^3$ ist, d. h. sein Durchm kleiner als λ.

Ebenso ist, da $\lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n} \omega_r = \mathfrak{K}$ ist, nach einer früheren F

$$\mathfrak{K} \leqq \sum_{r=1}^{n} \omega_r < \mathfrak{K} + \varkappa. \tag{6}$$

Daher folgt aus (4) und (5)

$$\sum_{r=1}^{n} g_r\, \omega_r > J - \varkappa, \text{ und } J + \varkappa > \sum_{r=1}^{n} g_r\, \omega_r - \sigma(\mathfrak{K} + \varkappa)$$

oder

$$J - \varkappa < \sum_{r=1}^{n} g_r\, \omega_r < J + \varkappa + \sigma(\mathfrak{K} + \varkappa)$$

$$\varkappa > J - \sum_{r=1}^{n} g_r\, \omega_r > -\varkappa - \sigma(\mathfrak{K} + \varkappa).$$

Denkt man nun σ so gewählt, dass

$$\sigma(\mathfrak{K} + \varkappa) < \varkappa$$

ist, so ist, wenn nur $D_r < \lambda\ (r = 1, 2, \ldots n)$ ist,

$$\left| J - \sum_{r=1}^{n} g_r\, \omega_r \right| < 2\varkappa,$$

d. h. es ist

$$\lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n} g_r\, \omega_r = J$$

und ebenso findet man auf ähnliche Weise

$$\lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n} k_r\, \omega_r = J,$$

wodurch die Existenz des dreifachen Integrals erwiesen ist,

rklärt durch den Grenzwert

$$\lim_{\omega_r = 1} \sum_{r=1}^{n} f(x_r, y_r, z_r)\, \omega_r = J.$$

Bisher haben wir alle Polyeder betrachtet, die überhaupt einen t von $\mathfrak{R}$ enthalten. Nun aber wollen wir zur Erklärung des achen Integrals nur jene Polyeder $\omega_1' \omega_2' \ldots \omega_{n'}'$, benützen, anz innerhalb $\mathfrak{R}$ liegen, d. h. jene, welche nur Punkte von $\mathfrak{R}$ lten. Alsdann bilden wir die ihnen entsprechende Summe

$$\sum_{r=1}^{n'} f(x_r', y_r', z_r')\, \omega_r',$$

$x_r' y_r' z_r'$) irgend einen Punkt des Polyeders ω_r' bedeutet. Diese ne hat ebenfalls, wenn wir wiederum die ω_r zur Null conren lassen, das dreifache Integral

$$J = S_{(\mathfrak{R})} f(x, y, z)\, d\mathfrak{R}$$

Grenzwerte.

Dies ergibt sich durch eine analoge Ableitung wie (2) aus ormel (*A*). Es ist also auch

$$\lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n'} f(x_r', y_r', z_r')\, \omega_r' = S_{(\mathfrak{R})} f(x, y, z)\, d\mathfrak{R}.$$

Diese Formeln (2) und (7) gelten auch für specielle Polyeder, Tetraeder, wenn sie nur so beschaffen sind, dass sie nach rei Dimensionen des Raumes ins Unendliche abnehmen können, umgekehrt folgen dann auch aus diesen specialisirten Formeln ch die allgemeinen, denn wenn die frühere Formel (1) des n Paragraphen für specielle Polyeder gilt, hat sie nach dem e früher erwähnten Satze auch allgemeine Geltung. Am häufigrendet man die specielle Theilung des Gebietes $\mathfrak{R}$ in rechtwinklige elepipede an, deren Begrenzungsflächen den Coordinatenebenen eise parallel sind. Sei $(x_{r,s,u}, y_{r,s,u}, z_{r,s,u})$ ein Punkt eines n Parallelepipeds, so hat man

$$J = \iiint_{(\mathfrak{R})} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \lim_{\delta_r = 0,\, \varepsilon_s = 0,\, \gamma_u = 0} \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{m} \sum_{u=1}^{t} f(x_{r,s,u}, y_{r,s,u}, z_{r,s,u})\, \delta_r\, \varepsilon_s\, \gamma_u.$$

Diese dreifache Summe rechts kann entweder wie früher auf olyeder erstreckt werden, die überhaupt einen Punkt mit $\mathfrak{R}$

gemein haben, oder aber auf solche, die nur Punkte von $\mathfrak{R}$ halten.

Die drei $\int$-Zeichen bezeichnen einfach die dreifache Su rechter Hand, wie auch ursprünglich von Leibniz das $\int$ al verlängertes $\int = \Sigma$ eingeführt worden ist, das die Summe, Grenzwert das Integral ist, andeuten soll. Die Formel (8 folgenden Wortlaut: „Jedem $\varkappa > 0$ lässt sich eine positive Z so zuordnen, dass

$$\left| \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{m} \sum_{u=1}^{t} f(x_{rsu}, y_{rsu}, z_{rsu})\, \delta_r\, \varepsilon_s\, \gamma_u - J \right|,$$

die dreifache Summe auf eine der beiden Polyederscharen e dehnt stets kleiner als $\varkappa$ ist für jede der Zahlen δ_r, deren Su $\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n = a' - a$, für jede der Zahlen ε_s: $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 +$ $+ \varepsilon_m = b' - b$ und endlich für jedes γ_u, deren Summe $\gamma_1 +$ $\cdots \gamma_t = c' - c$ ist, die bezüglich kleiner sind als λ, also $\delta_r < \lambda$, ε $\gamma_u < \lambda$. $(r = 1 \ldots n, s = 1 \ldots m, u = 1 \ldots t)$.

Auch diese Definitionen lassen sich ohneweiteres e wie die des Doppelintegrals (vergl. O Stolz: „Grundzüge der rential- und Integralrechnung“ III.) auf eine eindeutige com Function $f(x, y, z)$ der reellen Veränderlichen x, y, z ausdehn

Sei $f(x, y, z) = \varphi(x, y, z) + i\,\psi(x, y, z)$ so ist

$$\sum_{r=1}^{n} f(x_r, y_r, z_r)\, \omega_r = \sum_{r=1}^{n} \varphi(x_r, y_r, z_r)\, \omega_r + i \sum_{r=}^{n} \psi(x_r, y_r, z_r)$$

Seien wie dort I, K die Coordinaten von J, so ist

$$\left| \sum_{r=1}^{n} f(x_r, y_r, z_r)\, \omega_r - J \right| =$$

$$= \sqrt{\left(\sum_{r=1}^{n} \varphi(x_r, y_r, z_r)\, \omega_r - I \right)^2 + \left(\sum_{r=1}^{n} \psi(x_r, y_r, z_r)\, \omega_r - K \right.}$$

Daher ergibt sich aus der Relation

$$\left| \sum_{r=1}^{n} f(x_r, y_r, z_r)\, \omega_r - J \right| < \varkappa,$$

wenn nur $D_r < \lambda$ ist,

$$\left| \sum_{r=1}^{n} \varphi(x_r, y_r, z_r)\, \omega_r - I \right| < \varkappa \quad \text{und} \quad \left| \sum_{r=1}^{n} \psi(x_r, y_r, z_r)\, \omega_r - K \right|$$

Daher hat, falls $f(x, y, z)$ ein dreifaches Integral über das
et $\mathfrak{R}$ besitzt, auch die Function $\varphi(x, y, z)$ als auch die Function
$y, z)$ über das nämliche Gebiet $\mathfrak{R}$ ein dreifaches Integral und
t

$$S_{(\mathfrak{R})} f(x, y, z)\, d\mathfrak{R} = S_{(\mathfrak{R})} \varphi(x, y, z)\, d\mathfrak{R} + i\, S_{(\mathfrak{R})} \psi(x, y, z)\, d\mathfrak{R}.$$

Und nun gehen wir daran, jene Functionen aufzusuchen, die
igentliches dreifaches Integral über ein bestimmtes Gebiet $\mathfrak{R}$
sen, und zwar wollen wir, bevor wir einzelne Arten derselben
ıkterisiren, uns eine allgemeine Charakterisirung der drei-
integrirbaren Functionen zurechtlegen. Dies können wir aber
so ohneweiteres hier vorführen, sondern es ist nothwendig,
st ein Capitel einzuschalten.

unendliche Systeme oder Mengen von Punkten in der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit.

§. 7. Wir gehen nun daran, die Begriffe über unendliche
me oder Mengen von Punkten der eindimensionalen Mannig-
keit direct auf die dreidimensionale Mannigfaltigkeit zu über-
n. Wie folgende Überlegung für die zweidimensionale Man-
ltigkeit abzuändern ist, wird man aus Folgendem sofort er-
.

Wir nehmen also eine unendliche Menge von Werten x, y, z
von denen jedes x zwischen denselben endlichen Zahlen a
a', jedes y zwischen denselben b und b' und endlich jedes z
hen den nämlichen Zahlen c und c' liegen. Dann können wir
, dass es mindestens einen Wert gibt, in dessen Umgebung
llich viele Werte der Menge liegen. Um das Folgende leichter
indlich zu machen, bedienen wir uns wie oft der geometri-
Darstellung.

Wir denken uns die Werte x, y, z als Coordinaten in einem
ichen Coordinatensysteme und zwar die x als Abscissen, die
Ordinaten und endlich die z als Applikaten, so dass also
Werte x, y, z ein Punkt in dem von uns gewählten Gebiete,
ir $\mathfrak{R}$ nennen wollen, entspricht. Wir theilen nun das Intervall
$a = d$ auf der X-Axe in $p > 2$ gleiche Theile, ebenso das
all $b' - b = e$ der Y-Axe in $q > 2$ und das Intervall $c' - c = f$
-Axe in $r > 2$ gleiche Theile und legen durch diese Theilungs-
e parallele Ebenen zu den bezüglichen drei Coordinatenebenen,
ir es im Früheren ausführlich beschrieben haben.

Dann zerfällt unser Gebiet in lauter rechtwinklige Parallel-
le $p.q.r$ an der Zahl. Dann können wir behaupten, dass
darunter wenigstens eines befindet, in dem unzählig viele
e (x, y, z) vorhanden sind; denn wäre dem nicht so, hätten

wir es nicht mit einer unendlichen Punktmenge zu thun. wollen nun dieses rechtwinklige Parallelepiped einer näheren trachtung unterziehen oder falls es mehrere so beschaffene Pa epipede gibt, jenes, das dem das Gebiet $\mathfrak{R}$ im positiven Sinn schreibenden Beobachter zuerst begegnet. Dieses Parallele werde begrenzt von zwei zur XZ-Ebene parallelen Ebenen in stande $b+\frac{c_1 c}{q}$ resp. $b+\frac{c_1+1}{q}\cdot e$, von einem Paare zur YZ-l paralleler Ebenen im Abstande $a+\frac{c_1' d}{p}$, resp. $a+\frac{c_1'+1}{p}\cdot d$ schließlich von zwei zur XY-Ebene parallelen Ebenen im Abs $c+\frac{c_1''}{r}f$, resp. $c+\frac{c_1''+1}{r}\cdot f$, wobei

$$0 \leqq c_1 \leqq q-1; \quad 0 \leqq c_1' \leqq p-1; \quad 0 \leqq c_1'' \leqq r-1$$

ist. Theilt man nun dieses Pararallelepiped vom Inhalte $\frac{d}{p}$ wieder in $p.q.r$ Theile, so haben wir ganz Ähnliches. Der ist dann $\frac{d\,.\,e\,.\,f}{p^2\,.\,q^2\,.\,r^2}$ und es gibt unter diesen ein erstes zw den Grenzen

$$\left[a+\left(\frac{c_1'}{p}+\frac{c_2'}{p^2}\right)d;\quad a+\left(\frac{c_1'}{p}+\frac{c_2'+1}{p^2}\right)d\right]$$
$$\left[b+\left(\frac{c_1}{q}+\frac{c_2}{q^2}\right)e;\quad b+\left(\frac{c_1}{q}+\frac{c_2+1}{q^2}\right)e\right]$$

und

$$\left[c+\left(\frac{c_1''}{r}+\frac{c_2''}{r^2}\right)f;\quad c+\left(\frac{c_1''}{r}+\frac{c_2''+1}{r^2}\right)f\right],$$

das unzählig viele Punkte der gegebenen Menge enthält.

Diesen theilen wir wieder wie früher in $p\,.\,q\,.\,r$ g Theile u. s. w. Dadurch gelangen wir zu drei Zahlen

$$\alpha=\frac{c_1'}{p}+\frac{c_2'}{p^2}+\cdots+\frac{c_n'}{p^n}+\cdots$$
$$\beta=\frac{c_1}{q}+\frac{c_2}{q^2}+\cdots+\frac{c_n}{q^n}+\cdots$$
$$\gamma=\frac{c_1''}{r}+\frac{c_2''}{r^2}+\cdots+\frac{c_n''}{r^n}+\cdots,$$

so dass, wenn wir

$$\frac{c_1'}{p}+\frac{c_2'}{p^2}+\cdots+\frac{c_n'}{p^n}=S_n'$$
$$\frac{c_1}{q}+\frac{c_2}{q^2}+\cdots+\frac{c_n}{q^n}=S_n$$
$$\frac{c_1''}{r}+\frac{c_2''}{r^2}+\cdots+\frac{c_n''}{r^n}=S_n''$$

ren, in jedem Theile zwischen den Grenzen

$$\left[a+S_n'\,d,\quad a+(S_n'+p^{-n})\,d\right]$$
$$\left[b+S_n\,e,\quad b+(S_n+q^{-n})\,e\right]$$
$$\left[c+S_n''\,f,\quad c+(S_n''+r^{-n})\,f\right]$$

zählig viele Punkte der vorgelegten Menge enthalten sind. Nun aber gehören die Zahlen

$$a+\alpha\,d,\quad b+\beta\,e,\quad c+\gamma\,f$$

allen einem jeden solchen Parallelepipede an, weshalb in dem winkligen Parallelepipede zwischen den Grenzen

$$[a+\alpha\,d-\varepsilon,\quad a+\alpha\,d+\varepsilon]$$
$$[b+\beta\,e-\varepsilon',\quad b+\beta\,e+\varepsilon']$$
$$[c+\gamma\,f-\varepsilon'',\quad c+\gamma\,f+\varepsilon''],$$

ei $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ was immer für positive Zahlen bedeuten, unzählig von den gegebenen Punkten liegen müssen, denn man hat so groß zu nehmen, dass

$$p^{-n}<\frac{\varepsilon}{d},\ q^{-n}<\frac{\varepsilon'}{e}\ \text{und}\ r^{-n}<\frac{\varepsilon''}{f}$$

Nach dieser für das Folgende nicht unwesentlichen Erörterung wir nun über, die Definition der Grenzpunkte auch auf die mensionale Mannigfaltigkeit auszudehnen. Kommt z. B. in Systeme von Punkten x, y, z die unbegrenzte Schar von len

$$x_n, y_n, z_n\ (n=1, 2\ldots)$$

dafür x_n bei $\lim n=+\infty$ den endlichen Grenzwert X, y_n den ren Grenzwert Y und z_n endlich den endlichen Grenzwert tzt, so heißt (X, Y, Z) ein Grenzpunkt des betrachteten ystems.

Die übrigen Definitionen bleiben dieselben, wie in der ein-ionalen Mannigfaltigkeit, so der Begriff der Ableitung erster

und zweiter und höherer Art und der Begriff der Ordnung. W
verstehen auch hier nach G. Cantor unter Ableitung einer
lichen Punktmenge die Gesammtheit ihrer Grenzpunkte; we
einer Menge ihre Ableitung gehört, so nennen wir dies auch
mit C. Jordan „parfait", was O. Stolz mit „vollständig"
setzt. Wenn die Ableitung einer unendlichen Punktmenge
eine unendliche Menge ist, so hat sie auch ihrerseits eine Able
die dann die zweite Ableitung der ursprünglichen Menge ge
wird. Ebenso erklärt man die Begriffe dritte, vierte und
Ableitung. Besitzt eine unendliche Punktmenge im Endliche
eine endliche Anzahl von Ableitungen, so heißt sie von
Gattung und zwar von jener Ordnung, welche die letzte Abl
angibt; jede andere heißt von zweiter Gattung.

Allgemeine Charakterisierung der Functionen, welche
eigentliches Tripelintegral besitzen.

§ 8. Satz: „Die nothwendige und hinreichende Bedi
dazu, dass die im Gebiete $\mathfrak{R}$, das zwischen den Abscissen
$x = a'$, den Ordinaten $y = b$, $y = b'$ und den Applicaten
$z = c'$ gelegen ist, allenthalben eindeutig definirte und dari
liche Function $f(x, y, z)$ über dieses Gebiet $\mathfrak{R}$ ein dreifaches I
besitzt, besteht darin, dass zu jeder positiven Zahl ε ein di
System $\mathfrak{M}$ (das von der Zahl ε abhängt) von Punkten $(x$
gehört, in dem der Sprung der Function $f(x, y, z)$, d. i. der
schied: obere Unbestimmtheitsgrenze $O(x', y', z')$ weniger unte
bestimmtheitsgrenze $U(x', y', z')$ von $f(x, y, z)$ beim Punkte x
$y = y'$, $z = z'$ größer als ε ist."

Den Sprung der Function, d. i. $O(x', y', z') - U(x', y', z'$
bezeichnen wir mit $D(x', y', z')$.

Beweis: Vorerst wollen wir uns von der Nothwendigkei
Bedingung überzeugen. Zu diesem Zwecke wollen wir ann
dass der Punkt $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ zunächst ein be
Punkt unseres Gebietes $\mathfrak{R}$ sei, dass also seine Abscisse
zwischen a und a', seine Ordinate beliebig zwischen b
seine Applicate endlich beliebig im Intervalle der äußerste
katen von $\mathfrak{R}$ $z = c$, $z = c'$ sich befinden möge. Dann i
dass jedem $\varkappa > 0$ positive Zahlen δ_1, δ_2, δ_3 so zugeordnet
können, dass es im Gebiete $\mathfrak{F}$, das zwischen den Abscissen (
$x' + \delta_1$), den Ordinaten $(y' - \delta_2, y' + \delta_2)$ und den Applicaten
$z' + \delta_3$) liegt, mindestens einen Wert $x = x_1$, $y = y_1$,
gibt, dass

$$f(x_1, y_1, z_1) > O(x', y', z') - \varkappa$$

ist und ferner, dass es einen Wert $x = x_2$, $y = y_2$, $z =$
für den

$$f(x_2, y_2, z_2) < U(x', y', z') + \varkappa$$

t Subtrahiren wir diese beiden Ungleichungen, so erhalten wir

$$f(x_1, y_1, z_1) - f(x_2, y_2, z_2) > D(x', y', z') - 2\varkappa.$$

Wir theilen nun das ganze Gebiet $\mathfrak{K}$ in n beliebige Theile $\omega_2 \ldots \omega_n$. Wir wissen ja aus dem Früheren, wie das zu gehen hat. Unter diesen Theilen werden einige vorhanden sein, mindestens einen Punkt der Menge $\mathfrak{M}_r$ enthalten. Seien diese $\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_{k_n}$ bezeichnet, während wir die Schwankung der Function $f(x, y, z)$ in ω_r mit σ_r, in τ_s mit ρ_s bezeichnen.

Dann ist nach (1)

$$\rho_s > \varepsilon - 2\varkappa,$$

in τ_s befindet sich mindestens ein Punkt (x', y', z'), wofür $D(x', y', z') > \varepsilon$ ist. Daher hat man nun für die kritische Summe

$$\sum_{r=1}^{n} \sigma_r \omega_r > (\varepsilon - 2\varkappa) \sum_{s=1}^{k_n} \tau_s.$$

Wenn nun das Punktsystem x', y', z' eine positive äußere Inhaltszahl $\mathfrak{K}$ hätte, so wäre

$$\sum_{s=1}^{k_n} \tau_s > \mathfrak{K}$$

$$\sum_{r=1}^{n} \sigma_r \omega_r > (\varepsilon - 2\varkappa)\, \mathfrak{K}.$$

Man kann sich also die Theile ω_r noch so klein denken, stets $\sum_{r=1}^{n} \sigma_r \omega_r$ über einer positiven Constanten liegen und könnte nicht bei $\lim \omega_r = 0$ $(r = 1, 2 \ldots n)$ den Grenzwert Null

Obige Bedingung ist also gewiss nothwendig; sie ist auch ndig ausreichend.

Auch dies lässt sich leicht darthun, wenn wir auf einen Satz iren, von dem wir bereits einen speciellen Fall früher in ndung gebracht haben und welcher lautet:

„Wenn die im ganzen Gebiete $\mathfrak{K}$ von x, y, z zwischen den ichen Grenzen

$$x = a,\ x = a';\quad y = b,\ y = b';\quad z = c,\ z = c';$$

tige unendliche Function $f(x, y, z)$ in den Punkten desselben prünge macht, deren Betrag die Zahl ε nicht übersteigt, so

lässt sich der Zahl $\varkappa > 0$ eine andere ebenfalls positive Zahl λ so ordnen, dass, wenn (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1) irgend zwei Punkte Gebietes $\mathfrak{R}$ bedeuten, dass $|x_1 - x| < \lambda$, $|y_1 - y| < \lambda$, $|z_1 - z$ ist, alsdann stets

$$|f(x_1, y_1, z_1) - f(x, y, z)| < \varepsilon + \varkappa$$

ist."

Wir haben, wie gesagt, diesen Satz in einer specielleren schon öfters kennen gelernt und benützt. Diese speciellere ergibt sich aus dieser allgemeinen Gestalt des Satzes, wenn hier $\varepsilon = 0$ setzt.

Wir wollen jedoch auf den Beweis dieses Hilfssatzes noch nicht eingehen, sondern den zweiten Theil obigen Satze erst entwickeln, d. h. zeigen, dass oben aufgestellte Bedingung vollkommen dafür ausreichend ist, dass eine Function die den angegebenen Bedingungen genügt, dreifach integrirbar ist.

Wir nehmen also an, dass was x, y, z immer für Wer ihren Intervallen (a, a'), (b, b'), (c, c') annehmen mögen, u Function $f(x, y, z)$ endlich ist, d. h.

$$A < f(x, y, z) < B$$

ist und setzen obigen Hilfssatz voraus. Dann erhellt sofort, wenn nur jedes $\omega_r < \lambda^3$ ist, die kritische Summe

$$\sum_{r=1}^{n} \sigma_r \omega_r < (\varepsilon + \varkappa) \sum_{r}' \omega_r + (B - A) \sum_{s=1}^{k_n} \tau_s$$

ist, wo $\sum_{r}'$ sich auf alle jene Theile ω_r bezieht, die keinen der Menge $\mathfrak{M}_s$ in sich enthalten. Dabei sehen wir, dass na

$$\sum_{r}' \omega_r < (a' - a)(b' - b)(c' - c)$$

ist. Die Theile τ_s können wir ferner so klein annehmen

$$\sum_{s=1}^{k_n} \tau_s < \varkappa$$

ist. Und so erhalten wir

$$\sum_{r=1}^{n} \sigma_r \omega_r < (\varepsilon + \varkappa)(a' - a)(b' - b)(c' - c) + (B - A)\varkappa =$$

$$= \varepsilon(a' - a)(b' - b)(c' - c) + \varkappa[(a' - a)(b' - b)(c' - c) + 1$$

Hier kann nun die rechte Seite durch passende Wah und $\varkappa$ jeder beliebigen Zahl ε' gleich gemacht werden u

ılten

$$\sum_{r=1}^{n} \sigma_r \omega_r < \varepsilon',$$

. die Function $f(x,y,z)$ ist über das Gebiet $\mathfrak{R}$ dreifach integrirbar.

Nun sollte der Beweis obigen Hilfssatzes folgen. Da sich jedoch er Satz ebenso wie für eine Function einer Veränderlichen auch unsere Function $f(x,y,z)$ erweisen lässt, so glaube ich, dürfte enügen, an dieser Stelle unter Hinweis auf den Beweis dieses es für eine Function einer Variabeln x (O. Stolz: „Grundzüge Differential- und Integralrechnung III. Nachträge zum I. Theile 2* pag. 267—269“) denselben Beweis für eine Function $f(x,y,z)$ er Variabeln kurz zu skizziren.

Die Werte der Function $f(x,y,z)$ liegen auch hier für alle und z im Gebiete $\mathfrak{R}$ zwischen den nämlichen Zahlen A und B

$$A < f(x,y,z) < B,$$

ıalb die Unbestimmtheitsgrenzen $O(x,y,z)$ und $U(x,y,z)$ für jedes ıe x, y, z bestimmte Zahlen sind. Die Function $f(x,y,z)$ liegt ıt zwischen $U(x,y,z)$ und $O(x,y,z)$, d. h.

$$U(x,y,z) \leqq f(x,y,z) \leqq O(x,y,z).$$

Ferner kann einem jeden beliebigen $\varkappa > 0$ eine andere eben- positive Zahl δ so zugeordnet werden, dass für jedes $x', y'. z'$ Gebiete $\mathfrak{R}$

$$U(x,y,z) - \varkappa < f(x',y',z') < O(x,y,z) + \varkappa$$

venn nur

$$|x'-x| < \delta, \ |y'-y| < \delta, \ |z'-z| < \delta$$

Aus diesen beiden Umgleichungen folgt

$$(x,y,z) - \varkappa < f(x',y',z') - f(x,y,z) < O\underbrace{(x,y,z) - U(x,y,z)}_{D(x,y,z)} + \varkappa$$

$$|f(x',y',z') - f(x,y,z)| < D(x,y,z) + \varkappa \leqq \varepsilon + \varkappa,$$

rch unser Hilfssatz bewiesen ist. Allein dieses δ ist keine ıante, sondern abhängig von x, y, z, also eine Function von z, so dass wir, um uns daran zu erinnern, besser thun, dafür $y, z)$ zu schreiben. Dieses δ ist also jetzt noch zu bestimmen. wollen wir jedoch übergehen. Die Bestimmung bietet absolut Schwierigkeit, wenn man auch hier auf den Satz recurrirt, die positive Zahl $\delta(x,y,z)$, während x, y und z ihre gegebenen valle (a,a'), (b,b') (c,c') durchlaufen, d. h. der Punkt (x,y,z) ebiet $\mathfrak{R}$, eine positive untere Grenze Δ besitzt.

Der Beweis dieses Satzes erfordert nur eine etwas lä
Schreiberei, ist aber im wesentlichen derselbe, wie der im ana
Falle einer Function einer Variabeln. Man hat nur das, was
für eine Dimension gemacht ist, jetzt auf unsere drei Dimensi
zu übertragen.

Man kann also jetzt für $\delta(x, y, z)$ seine positive untere Gre
setzen und erhält dann, dass die Ungleichung

$$|f(x', y', z') - f(x, y, z)| < \varepsilon + \varkappa$$

besteht für je zwei Werte (x, y, z), (x', y', z') im Gebiete $\mathfrak{K}$, fü

$$|x' - x| < \Delta,\ |y' - y| < \Delta,\ |z' - z| < \Delta$$

ist.

Nachdem wir so die dreifach integrirbaren Functionen
mein charakterisirt haben, wollen wir noch der Vollständ
halber zwei Classen, und zwar die am nächsten liegenden
solcher Functionen erwähnen.

Dass es auch nicht dreifach integrirbare Functionen
kann man an einem einfachen Beispiele sehen. Nehmen wi
Function $f(x, y, z) = 1$, wenn die Coordinaten des Punktes, in
wir die Function $f(x, y, z)$ betrachten, rational sind, ist dies
der Fall, so setzen wir $f(x, y, z) = -1$. Natürlich kann von
Stetigkeit der Function keine Rede sein.

Es ist $g_r = 1$, $k_r = -1$ die obere und untere Grenze

Bilden wir nun die Summe $\sum_{r=1}^{n} g_r \omega_r$, so ist

$$\sum_{r=1}^{n} g_r \omega_r = \sum_{r=1}^{n} \omega_r$$

und

$$\sum_{r=1}^{n} k_r \omega_r = -\sum_{r=1}^{n} \omega_r,$$

und daher

$$\lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n} g_r \omega_r = \lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n} \omega_r = \mathfrak{K}$$

und

$$\lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n} k_r \omega_r = -\lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n} \omega_r = -\mathfrak{K}.$$

Wir finden also

$$\iiint_{(\mathfrak{K})} f^{(2)}(x, y, z)\, d\mathfrak{K} = \mathfrak{K} \text{ und } \iiint_{(\mathfrak{K})} f^{(1)}(x, y, z)\, d\mathfrak{K} = -\mathfrak{K};$$

Function $f(x,y,z)$ hat also schon bei dieser einfachen Annahme ein oberes und unteres aber kein eigentliches Tripelintegral.

Wir beginnen also mit Aufzählung der am nächsten liegenden Arten von dreifach integrirbaren Functionen:

I. „Eine reelle Function $f(x, y, z)$, die in jedem Punkte des ietes $\mathfrak{R}$ mit Einschluss der Begrenzung stetig ist in Bezug auf drei Veränderliche x, y, z, hat ein dreifaches Integral über s Gebiet."

Beweis: $f(x,y,z)$ ist stetig in jedem Punkte (x, y, z) von $\mathfrak{R}$. lich lässt sich jeder positiven Zahl $\varepsilon > 0$ eine andere ebenfalls ive Zahl δ so zuordnen, dass wenn $(x. y, z)$ und (x', y', z') zwei kte des Gebietes $\mathfrak{R}$ sind, deren Abstand

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

er als δ ist, stets

$$|f(x,y,z)-f(x',y',z')|<\varepsilon$$

Dieser wichtige Satz über stetige Functionen lässt sich für Veränderliche analog erweisen wie für zwei und eine Ver- rliche.

Diesen eben erwähnten Satz verbinden wir mit einem anderen, nämlich, dass eine in einem Gebiete allenthalben stetige tion von x, y, z ihre obere und untere Grenze daselbst er- t, d. h. dass es im Gebiete immer solche Werte x, y, z und $, z'$ gibt, dass

$$f(x,y,z)=g_r \text{ und } f(x',y',z')=k_r$$

Bilden wir nun σ_r, so ist

$$0 \leqq \sigma_r = g_r - k_r < \varepsilon$$

(1), wenn nur der Durchmesser D_r eines jeden Polyeders ω_r er als δ ist.

Ebenso erhält man

$$\sum_{r=1}^{n} \sigma_r \omega_r < \varepsilon \sum_{r=1}^{n} \omega_r,$$

$D_r < \delta$ ist.

Nach Früherem können wir δ so klein nehmen, dass

$$\sum_{r=1}^{n} \omega_r < \mathfrak{R} + \delta'$$

o δ' eine gegebene positive Zahl ist. Wenn also $D_r < \delta$ $1 \ldots n$) ist, so haben wir

$$0 \leqq \sum_{r=1}^{n} \sigma_r \omega_r < \varepsilon (\mathfrak{R} + \delta'),$$

wo $\varepsilon (\mathfrak{R} + \delta')$ auch eine beliebig vorgegebene Zahl > 0 sein k
Obige Formel bedeutet also

$$\lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n} \sigma_r \omega_r = 0.$$

Die Bedingung für die Existenz eines Tripelintegrals is
füllt, d. h. es ist ein dreifaches Integral vorhanden.

II. „Ein dreifaches Integral haben ferner alle Functi
$f(x, y, z)$, welche im Gebiete $\mathfrak{R}$ endlich und in allen Punkten
selben mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von einzelnen Pun
und den Punkten einer endlichen Anzahl von gewöhnlichen Li
stetig sind in Bezug auf alle drei Veränderliche x, y und z."

Beweis: Nach einem der früheren Sätze ist zur Existenz
dreifachen Integrals nothwendig und hinreichend, dass $\sum_{r=1}^{n} \sigma_r \omega$
ist, d. h. dass es zu jeder Zahl $\varkappa$ mindestens eine Schar vor
lyedern $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$ gibt, die das Gebiet $\mathfrak{R}$ gerade erfüllen,
obige Ungleichung besteht.

Um den einfachsten Fall zu nehmen, wählen wir als Pol
wie in manchen früheren Fällen rechtwinklige Parallelepipede δ_r
mit den Begrenzungsflächen parallel zu den Coordinateneb
Seien auch hier die $c_1, c_2 \ldots c_h$ die einzelnen Punkte, wo $f(x$
unstetig ist, $L_1, L_2 \ldots L_i$ die Unstetigkeitslinien von $f(x, y, z)$. F
bemerken wir, dass wir die Theile δ_r, ε_s und γ_u so wählen,
jeder der Punkte $c_1, c_2 \ldots c_h$ in ein solches $\delta_r . \varepsilon_s . \gamma_u$ fällt und
so, dass keine Linie $L_1, L_2 \ldots L_i$ durch eine Ecke eines so
Polyeders gehe, noch eine Kante bilde. Parallelepipede, w
Punkte von $\mathfrak{R}$ enthalten, bezeichnen wir mit $\omega_1'', \omega_2'' \ldots \omega_y''$ und
diesen jene, welche weder einen Punkt von $c_1 \ldots c_h$ enthalten,
einen Punkt mit $L_1 L_2 \ldots L_i$ gemein haben, seien mit ω_1^0, ω_1^0
bezeichnet. Die Function $f(x. y, z)$ sei im Gebiete $\mathfrak{R}$ endlich,
es gebe zwei Zahlen A und B, dass $A \leqq f(x, y, z) \leqq B$ ist.
ist, da

$$A \leqq g_r \leqq B$$
$$A \leqq k_r \leqq B$$
$$\sigma_r = g_r - k_r \leqq B - A.$$

ist, auch

Alsdann hat man

$$\sum_{r=k+1}^{n} \sigma_r^0 \omega_r^0 \leqq (B-A) \{h \Delta^3 + p \Delta (b'-b)(c'-c) + 4r(a'-a)(b'$$

das größte aller Theilchen δ_r, ε_s und γ_u bedeutet, p die größte
al von Punkten, die eine parallele Gerade zur X-Axe mit
$\ldots L_i$ gemein hat, ebenso q und r die größte Anzahl der
te, die eine Parallele zur Y- und Z-Axe mit dem Systeme
nstetigkeitslinien gemein hat.

h-Parallelepipede enthalten einen solchen Unstetigkeitspunkt
$\ldots c_h$ und nach Früherem ist die Anzahl der Parallelepipede,
it einer der Unstetigkeitslinien $L_1\ L_2 \ldots L_i$ mindestens einen
gemein haben, abgeschätzt.

ist nun eine Zahl $\varkappa > 0$ vorgelegt, so wird

$$\sum_{r=k+1}^{n} \sigma_r^0\, \omega_r^0 < \frac{1}{2}\varkappa,$$

$$-A)\left\{h\Delta^3 + p\Delta^2 (b'-b)(c'-c) + 4r(a'-a)(b'-b)\Delta\right\} < \frac{\varkappa}{2}$$

)a wir $\Delta < 1$ annehmen dürfen, so ist dies sicher der Fall,

$$< \varkappa : 2(B-A)\left\{h + p(b'-b)(c'-c) + 4r(a'-a)(b'-b)\right\}$$

ja gewiss $\Delta^3 < \Delta$ und ebenso $\Delta^2 < \Delta$ im angenommenen
st. So denken wir uns die Parallelepipede $\omega_{k+1}^0 \cdots \omega_N^0$ ge-
m. Im übrigen Theile des Gebietes $\mathfrak{R}$ ist die Function
$z)$ stetig und daher können wir jedem $\varkappa' > 0$ ein $\lambda' > 0$ so
en, dass

$$|f(x', y', z') - f(x, y, z)| < \varkappa'$$

nn nur $|x'-x| < \lambda'$, $|y'-y| < \lambda'$ und $|z'-z| < \lambda'$ sind.
s ist also

$$0 \leqq \sum_{r=1}^{k} \sigma_r^0\, \omega_r^0 < \varkappa' \sum_{r=1}^{k} \omega_r^0 = \varkappa'(a'-a)(b'-b)(c'-c),$$

ur $\delta_r < \lambda'$, $\varepsilon_s < \lambda'$ und $\gamma_u < \lambda'$ genommen wird.
ie Summe

$$\sum_{r=1}^{k} \sigma_r^0\, \omega_r^0$$

gewiss kleiner als $\frac{\varkappa}{2}$, wenn

$$\varkappa' = \frac{\varkappa}{2(a'-a)(b'-b)(c'-c)}$$

und darnach das λ' bestimmt wird.

Wir haben also für jede Schar obiger Art von Parallelepipe

$$\omega_1^0, \omega_1^0 \ldots \omega_N^0: \; 0 \leqq \sum_{r=1}^{N} \sigma_r^0 \, \omega_r^0 < \varkappa.$$

Daher haben wir auch in diesem Falle ein dreifaches Int der Function $f(x, y, z)$ über das Gebiet $\mathfrak{R}$.

Noch zu bemerken ist, dass der Wert des dreifachen Inte der obigen Function $f(x, y, z)$ über $\mathfrak{R}$ ganz und gar unabhäng von den Werten dieser Function in den Punkten $c_1 \ldots c_h$ u den Unstetigkeitslinien $L_1 L_2 \ldots L_i$.

Das ist ganz analog zu zeigen wie bei den Doppelinteg (vgl. O. Stolz: „Grundzüge" III., pag. 72).

Eine Function $f_1(x, y, z)$ habe in all diesen Punkten beli Werte, die nur so beschaffen sind, dass sie zwischen zwei endl Grenzen A' und B' liegen; in allen übrigen Punkten von $f_1(x, y, z) = f(x, y, z)$. Dann hat nach Früherem auch diese ein faches Integral J' über das Gebiet $\mathfrak{R}$ und zwar ist $J' = J$, J das dreifache Integral von $f(x, y, z)$ über das nämliche Geb bedeutet. Nach einer früheren Formel ist nämlich

$$J' = S_{(\mathfrak{R})} f_1(x, y, z) \, d\mathfrak{R} = \lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n} f(x_r, y_r, z_r) \, \omega_r,$$

welche Formel mit der von J zusammenfällt, denn da die Pu $c_1 \ldots c_h$ und die Linien $L_1 L_2 \ldots L_i$ keinen Körper erfüll braucht unter den Punkten $(x_1, y_1, z_1), \ldots (x_n, y_n, z_n)$ in obiger F keiner von ihnen vorzukommen, wie klein auch die $\omega_1, \omega_2 \ldots$ genommen werden mögen.

Auch hier kann man mittelst einer der Formel, S. 57, i lichen leicht zeigen, dass, wenn man als $\omega_1 \ldots \omega_n$ die Pa epipede $\delta_r \cdot \varepsilon_s \cdot \gamma_u$ nimmt und wenn sich auch unter den Pu $(x_1, y_1, z_1) \ldots (x_n, y_n, z_n)$ einige der Unstetigkeitspunkte vorfind

$$\lim_{\delta_r = 0, \; \varepsilon_s = 0, \; \gamma_u = 0} \sum_{r=1}^{n} f(x_r, y_r, z_r) \, \omega_r = 0$$

ist.

Beispiel: Als Beispiel für diese Art von Functionen v wir die Function $\dfrac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2}$. Diese hat über jedes im End gelegene Gebiet $\mathfrak{R}$ ein eigentliches Tripelintegral. Sie ist t in jedem endlichen Punkte außer $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Da die Function ohne Bedeutung.

Im Punkte $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ kann diese Function n stetig werden, mag man ihr dort was immer für einen We

denn auf dem Halbstrahle $x = r \cos\Theta \cos\beta$, $y = r \sin\Theta \cos\beta$, $= \sin\beta$ $(r > 0)$ hat die Function mit Ausnahme des Nullpunktes l den constanten Wert $\cos^2\Theta \cos^2\beta$, der mit Θ und β sich . Trotzdem ist die Function im ganzen Raume endlich, denn re Werte mit Ausnahme bei $x = y = z = 0$ liegen zwischen renzen 0 und 1. Wenn wir den Punkt $x = y = z = 0$ aus m Gebiete $\mathfrak{R}$ ausschalten, so haben wir eine durchwegs Function, so dass sie dann zur ersten der angeführten Arten , während sie im anderen Falle unter die zweite Art zu ist.

Weitere Arten solcher Functionen aufzuzählen, wollen wir sparen. Damit soll jedoch nicht gesagt sein, dass keine on ähnlicher Art mehr existire, die über $\mathfrak{R}$ ein eigentliches hes Integral zulasse; vielmehr wären gerade hier bei den ntegralen noch mehrere Arten solcher Functionen anzuführen, r aber leider des Platzmangels wegen übergehen und dem geren nachstellen müssen.

Damit wären wir nun an den Punkt gelangt, wo es der logische menhang erfordert, die allgemeinen Sätze und Rechnungs- über die dreifachen und zwar über die eigentlichen drei- Integrale aufzustellen.

Wir gehen deshalb über zum Capitel

jemeine Sätze über die eigentlichen Tripelintegrale.

. 9. Wir haben im Früheren das dreifache Integral durch Grenzwert definirt. Daraus lassen sich sofort einige Sätze n.

„Wechselt das Integrationsgebiet sein Zeichen, so auch das tegral:

$$S_{(-\mathfrak{R})} f(x, y, z)\, d\mathfrak{R} = -S_{(\mathfrak{R})} f(x, y, z)\, d\mathfrak{R}“,$$

enn das Integrationsgebiet sein Zeichen wechselt, so ändern ie ω_r ihr Zeichen. Es wird

$$\sum_{r=1}^{n} f(x_r, y_r, z_r)\, \omega_r = -\sum_{r=1}^{n} f(x_r, y_r, z_r)\omega_r$$

her ist auch

$$\lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n} f(x_r, y_r, z_r)\, \omega_r = -\lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n} f(x_r, y_r, z_r)\, \omega_r.$$

„Wenn wir unter C eine Constante versehen so ist

$$S_{(\mathfrak{R})}\, Cf(x, y, z)\, d\mathfrak{R} = C\, S_{(\mathfrak{R})} f(x, y, z\,) d\mathfrak{R}“,$$

$$\sum_{r=1}^{n} Cf(x_r, y_r, z_r)\, \omega_r = C \lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n} f(x_r, y_r, z_r)\, \omega_r.$$

3. „Das dreifache Integral einer Summe ist gleich der Su der dreifachen Integrale der Addenden, d. i.

$$(3)\quad S_{(\mathfrak{K})}\{f_1(x,y,z)+f_2(x,y,z)\}\,d\mathfrak{K}=S_{(\mathfrak{K})}f_1(x,y,z)\,d\mathfrak{K}+S_{(\mathfrak{K})}f_2(x,y,z)$$

Dies folgt ebenfalls aus der Definition des dreifachen Int mittels eines Grenzwertes, denn man hat:

$$\sum_{r=1}^{n}\{f_1(x_r,y_r,z_r)+f_2(x_r,y_r,z_r)\}\,\omega_r=$$

$$=\sum_{r=1}^{n}f_1(x_r,y_r,z_r)\,\omega_r+\sum_{r=1}^{n}f_1(x_r,y_r,z_r)\,\omega_r$$

und daraus folgt unmittelbar bei $\lim \omega_r = 0$ die Formel (3). Formel kann man bei beliebiger Anzahl von Summanden dem Integralzeichen anwenden.

Es ist auch

$$(4)\quad \begin{aligned} &S_{(\mathfrak{K})}\{f_1(x,y,z)+f_2(x,y,z)+\cdots+f_n(x,y,z)\}\,d\mathfrak{K}=\\ &=S_{(\mathfrak{K})}f_1(x,y,z)\,d\mathfrak{K}+Sf_2(x,y,z)\,d\mathfrak{K}+\cdots+S_{(\mathfrak{K})}f_n(x,y,z) \end{aligned}$$

4. „Ein von m einfachen geschlossenen Oberflächen begr Körper $\mathfrak{K}$ heißt m-fach zusammenhängend. Ein solcher kann $k\,(<m)$ Querschnitte in einen $(m-k)$-fach zusammenhäng Körper $\mathfrak{K}'$ verwandelt werden. [So z. B. kann man den in der Figur dargestellten, von zwei dreiseitigen Prismen ABC und $DEFD'E'F'$ begrenzten, zweifach zusammenhängenden durch den Schnitt $AEE'A'$ in den einfach zusammenhäng $ABCAEDFAEA'B'C'A'E'D'F'A'E'$ verwandeln. (Fig

Wir sagen dann, dass

$$(5)\quad S_{(\mathfrak{K})}f(x,y,z)\,d\mathfrak{K}=S_{(\mathfrak{K}')}f(x,y,z)\,d\mathfrak{K}$$

ist.“

5. „Wird das Gebiet $\mathfrak{K}$ durch eine einfache Fläche E i getrennte Gebiete $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ zerlegt, so hat die Function f die über $\mathfrak{K}$ ein dreifaches Integral besitzen soll, auch ein über jedes der Gebiete $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ und zwar ist

$$(6)\quad S_{(\mathfrak{K})}f(x,y,z)\,d\mathfrak{K}=S_{(\mathfrak{K}_1)}f(x,y,z)\,d\mathfrak{K}+S_{(\mathfrak{K}_2)}f(x,y,z)$$

Auch die Umkehrung dieses Satzes gilt:

„Hat die Function $f(x,y,z)$ über jedes von zwei anei grenzenden Gebieten $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ ein eigentliches dreifaches I so auch über das Gebiet $\mathfrak{K}$, das durch Vereinigung dieser $\mathfrak{K}_1+\mathfrak{K}_2=\mathfrak{K}$ entsteht.“

Beweis: Die beiden Integrale rechter Hand in For sind vorhanden. Dies folgt ohne Weiteres folgendermaßen:

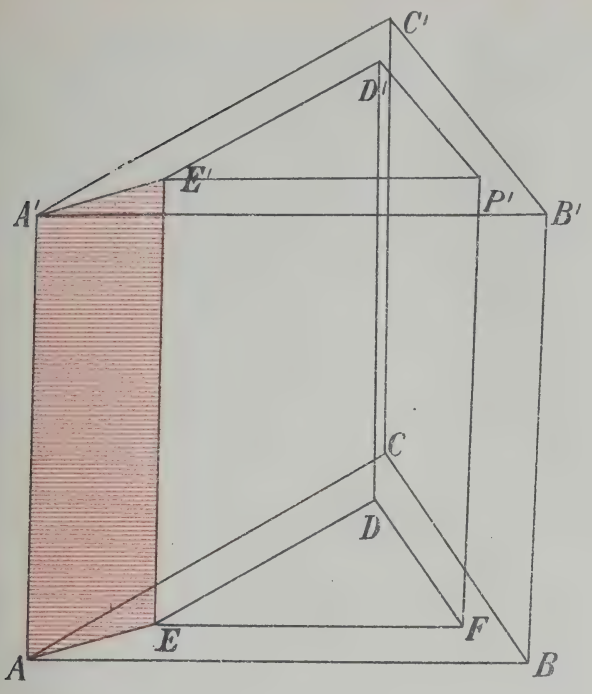


Fig. 11.

Sei $\sigma_r = g_r - k_r$ die Schwankung der Function $f(x, y, z)$ im
e $\mathfrak{R}$, d. h. in den einzelnen Polyedern ω_r $(r = 1 \ldots n)$, in
r uns das Gebiet $\mathfrak{R}$ getheilt denken, so ist, wenn σ_r' und σ_r''
hwankung der Function $f(x, y, z)$ in den zu $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ ge-
n Polyedern ω_r' und ω_r'' bedeuten,

$$\sum_{r=1}^{n} \sigma_r \omega_r = \sum_r \sigma_r' \omega_r' + \sum_r \sigma_r'' \omega_r''.$$

olglich ist

$$\sum_{r=1}^{n} \sigma_r \omega_r \geqq \sum_r \sigma_r' \omega_r' \quad \text{und ebenso} \quad \sum_{r=1}^{n} \sigma_r \omega_r \geqq \sum_r \sigma_r'' \omega_r''.$$

Da nun nach Voraussetzung

$$\lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n} \sigma_r \omega_r = 0$$

ist, so ist auch

$$\lim_{\omega_r = 0} \sum_r \sigma_r' \, \omega_r' = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\omega_r = 0} \sum_r \sigma_r'' \, \omega_r'' = 0$$

d. h. die Integrale rechter Hand in (6) sind vorhanden.

Um nun die Relation (6) zu erweisen, erfüllen wir wieder w früheren Gelegenheiten das Gebiet $\mathfrak{R}$ mit rechtwinkligen Par epipeden $\delta_r . \varepsilon_s . \gamma_u$ mit Begrenzungsflächen, die parallel sind z drei Coordinatenebenen und theilen die dasselbe gerade erfüll Parallelepipede $\omega_1^0 \, \omega_2^0 \ldots \omega_N^0$ in drei Abtheilungen:

1. jene, welche nur Punkte von $\mathfrak{R}_1$ enthalten, 2. jen welchen nur Punkte von $\mathfrak{R}_2$ gehören und endlich 3. solche eder, die mit der Begrenzung von $\mathfrak{R}$ oder der trennenden F mindestens je einen Punkt gemein haben. Daher wird also Berücksichtigung dieser drei Classen unsere Summe

$$\sum_{r=1}^{N} f(x_r, y_r, z_r) \, \omega_r^0$$

in drei Theile zerfallen

$$\sum_{r=1}^{N} f(x_r, y_r, z_r) \, \omega_r^{(0)} = \sum_r f(x_r, y_r, z_r) \, \omega_r^{(1)} +$$
$$+ \sum_r f(x_r', y_r', z_r') \, \omega_r^{(2)} + \sum_r f(x_r'', y_r'', z_r'') \, \omega_r^{(3)} .$$

Nun lassen wir die $\delta_r \, (r = 1 \ldots n)$ alle, alle $\varepsilon_s \, (s = 1 \ldots$ und ebenso alle $\gamma_u \, (u = 1, 2 \ldots t)$ zur Null convergiren, $\lim \omega_r^0 = 0$. Dann sehen wir, dass die linke Seite als Grenz das dreifache Integral $S_{(\mathfrak{R})} f(x, y, z) \, d\mathfrak{R}$, das erste Glied rech Grenzwert $S_{(\mathfrak{R}_1)} f(x, y, z) \, d\mathfrak{R}$ und endlich das zweite Glied r Hand als Grenzwert das dreifache Integral $S_{(\mathfrak{R}_2)} f(x, y, z) \, d\mathfrak{R}$ Was nun das letzte Summenglied rechter Hand anlangt, dies bei $\lim \omega_r^0 = 0$ den Grenzwert Null, so dass also sich

$$\lim_{\omega_r^0 = 0} \sum_{r=1}^{N} f(x_r, y_r, z_r) \, \omega_r^0 = \lim_{\omega_r^0 = 0} \sum_r f(x_r, y_r, z_r) \, \omega_r^{(1)} +$$
(7)
$$+ \lim_{\omega_r^0 = 0} \sum_r f(x_r', y_r', z_r') \, \omega_r^{(2)},$$

d. h.

$$S_{(\mathfrak{R})} f(x, y, z) \, d\mathfrak{R} = S_{(\mathfrak{R}_1)} f(x, y, z) \, d\mathfrak{R} + S_{(\mathfrak{R}_2)} f(x, y, z) \, d$$

d. i. Formel (6).

Ebenso lässt sich leicht die Umkehrung dieses Satzes er-
n. Wenn nämlich bekannt ist, dass die Function $f(x, y, z)$
jedes der beiden Gebiete $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$, die zusammen $\mathfrak{R}$ aus-
en, ein eigentliches Tripelintegral besitzt, so ergibt sich als
:wert der rechten Seite (7) bei $\lim \omega_r'' = 0$ $S_{(\mathfrak{R}_1)} f(x, y, z)\, d\mathfrak{R} +$
$_{\mathfrak{R}_2)} f(x, y, z)\, d\mathfrak{R}$ und folglich ist auch

$$\lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{N} f(x_r, y_r, z_r)\, \omega_r^0 = S_{(\mathfrak{R}_1)} f(x, y, z)\, d\mathfrak{R} + S_{(\mathfrak{R}_2)} f(x, y, z)\, d\mathfrak{R}.$$

Das dreifache Integral $S_{(\mathfrak{R})} f(x, y, z)\, d\mathfrak{R}$ ist also vorhanden
nach Früherem ist

$$S_{(\mathfrak{R})} f(x, y, z)\, d\mathfrak{R} = S_{(\mathfrak{R}_1)} f(x, y, z)\, d\mathfrak{R} + S_{(\mathfrak{R}_2)} f(x, y, z)\, d\mathfrak{R}.$$

Ein specieller Fall dieses Satzes (5) ist folgender:

„Die Zahl des aus zwei oder mehreren Theilen bestehenden
rs $\mathfrak{R}$ ist gleich der Summe der diesen Theilen zukommenden
a."

Jetzt gehen wir zu weiteren Sätzen über.

3. „Wenn $f(x, y, z)$ über das positive Gebiet $\mathfrak{R}$ dreifach inte-
r ist und in keinem Punkte desselben einen negativen Wert
imt, so ist

$$S_{(\mathfrak{R})} f(x, y, z)\, d\mathfrak{R} \geqq 0."$$

Wenn $f(x, y, z)$ entweder in $\mathfrak{R}$ oder doch in einem Theile
$\mathfrak{R}$ eine positive untere Grenze hat, so ist das dreifache
al

$$S_{(\mathfrak{R})} f(x, y, z)\, d\mathfrak{R}$$

, welche Bedingung bei einer Function $f(x, y, z)$ erfüllt ist,
allen Punkten innerhalb $\mathfrak{R}$ stetig ist und nicht überall ver-
det.

Beweis: $f(x, y, z)$ ist in dem ganzen positiven Körper $\mathfrak{R}$ nicht
; daher ist auch

$$\sum_{r=1}^{n} f(x_r, y_r, z_r)\, \omega_r \geqq 0,$$

das Zeichen von $\mathfrak{R}$ hat, das positiv genommen ist. Und so
h

$$\lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n} f(x_r, y_r, z_r)\, \omega_r \geqq 0,$$

s gilt (8

Der Zusatz ergibt sich leicht, wenn man auf die Defi des Tripelintegrals zurückgeht. Es ist

$$\sum_{r=1}^{n} f(x_r, y_r, z_r)\,\omega_r \geqq k \sum_{r=1}^{n} \omega_r = k\,(a'-a)\,(b'-b)\,(c'-c),$$

also bei $\lim \omega_r = 0$

$$S_{(\mathfrak{K})} f(x, y, z)\,d\mathfrak{K} \geqq k\,(a'-a)\,(b'-b)\,(c'-c) \geqq 0.$$

Wenn $k > 0$ ist, ist das Integral positiv, für $k = 0$ ka nicht negativ sein. k ist sicher positiv, wenn $f(x, y, z)$ fü ganze $\mathfrak{K}$ stetig und positiv ist. Analog verhält es sich, wenn $f($ in einem Theile $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{K}$ eine positive untere Grenze hat. ist dann nur nothwendig zum Beweise dieses Zusatzes für Fall, das Integral $S_{(\mathfrak{K})} f(x, y, z)\,d\mathfrak{K}$ zu zerlegen.

7. Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge des 6. Satze lautet: „Sind $f(x, y, z)$ und $g(x, y, z)$ zwei über das positiv biet $\mathfrak{K}$ dreifach integrirbare Functionen, und ist in jedem P von $\mathfrak{K}$

$$f(x, y, z) \geqq g(x, y, z),$$

so ist auch

$$S_{(\mathfrak{K})} f(x, y, z)\,d\mathfrak{K} \geqq S_{(\mathfrak{K})} g(x, y, z)\,d\mathfrak{K}.\text{“} \tag{9}$$

Dieser Satz folgt aus (6), wenn man dort statt $f(x, y,$ Differenz $f(x, y, z) - g(x, y, z)$, die ja $\geqq 0$ ist, setzt.

8. „Nehmen wir nun eine Function $f(x, y, z)$, die im ven Gebiete $\mathfrak{K}$ kein constantes Zeichen besitzt, also sowohl p als negative Werte annehmen kann, so folgt aus dem Vorh sein des dreifachen Integrals dieser Function $f(x, y, z)$ auch ein dreifaches Integral des absoluten Betrages dieser Functio das nämliche Gebiet $\mathfrak{K}$ existirt, d. h. dass $S_{(\mathfrak{K})} |f(x, y, z)|\,d$ handen ist.

Es ist ferner

$$|S_{(\mathfrak{K})} f(x, y, z)\,d\mathfrak{K}| \leqq S_{(\mathfrak{K})} |f(x, y, z)|\,d\mathfrak{K}. \tag{10}$$

Ferner kann man auch sagen, dass das Zeichen $<$ steht, wenn im Gebiete $\mathfrak{K}$ ein Gebiet $\mathfrak{G}'$ enthalten ist, in de Function $f(x, y, z)$ durchaus positiv und ferner ein Gebi indem sie durchaus negativ ist.“

Beweis: Zunächst kann man leicht die Existenz de fachen Integrals von $|f(x, y, z)|$ über das Gebit $\mathfrak{K}$ erweise die Schwankung des absoluten Betrages von $f(x, y, z)$ in während die Schwankung der Function $f(x, y, z)$ selbst σ_r ist sicher $\bar{\sigma}_r \leqq \sigma_r$, denn $\bar{\sigma}_r = \bar{g}_r - \bar{k}_r$. Nimmt nun $f(x, y, z)$ entgegengesetzte Zeichen an, so ist die obere Grenze von f

, d. i. g_r positiv und die unter k_r negativ. $\overline{g_r}$ ist jedenfalls
v, ebenso $\overline{k_r}$ entweder positiv oder Null. $\overline{g_r}$ ist dann entweder
g_r oder gleich $-k_r$. Daher finden wir

$$\overline{g_r} - \overline{k_r} \leqq \begin{cases} g_r \\ -k_r, \end{cases}$$

ewiss nicht größer als σ_r, woraus folgt

$$\sum_{r=1}^{n} \overline{\sigma}_r \omega_r \leqq \sum_{r=1}^{n} \sigma_r \omega_r;$$

$S_{(\mathfrak{R})} | f(x, y, z) | d\mathfrak{R}$ ist vorhanden.

Um die Ungleichung (10) nachzuweisen, recurriren wir auf
de Ungleichung:

$$-|f(x, y, z)| \leqq f(x, y, z) \leqq |f(x, y, z)|.$$

Daher ist nach (7)

$$-|f(x, y, z)|\, d\mathfrak{R} \leqq S_{(\mathfrak{R})} f(x, y, z)\, d\mathfrak{R} \leqq S_{(\mathfrak{R})} |f(x, y, z)|\, d\mathfrak{R},$$

$$|S_{(\mathfrak{R})} f(x, y, z)\, d\mathfrak{R}| \leqq S_{(\mathfrak{R})} |f(x, y, z)|\, d\mathfrak{R}.$$

Die Umkehrung dieses Satzes ist nicht immer gestattet. Als
dafür betrachten wir die Function $f(x, y, z)$, die in jedem
des Gebietes $\mathfrak{R}$ den Wert 1 hat. Diese hat ein eigentliches
ntegral über das Gebiet $\mathfrak{R}$, denn es ist $g_r = k_r = 1$ und
$\sum_{r=1}^{n} \sigma_r \omega_r = 0$. Nicht aber hat die früher erwähnte Function,
rationalen x, y und z den Wert 1, bei irrationalen Werten
y und z aber den Wert -1 hat, deren absoluter Betrag
n Wert 1 hat, ein Tripelintegral.

„Wenn die Function $f(x, y, z)$ im Innern von $\mathfrak{R}$ ihr
wechselt, so sei die Function $f_1(x, y, z)$ so beschaffen, dass
jedem Punkte, wo $f(x, y, z)$ positive Werte hat, gleich
) und in jedem anderen gleich Null sei. Eine zweite
n $f_2(x, y, z)$ sei in den Punkten, wo $f(x, y, z)$ negativ ist,
$-f(x, y, z)$ und in jedem anderen gleich Null. Dies vor-
zt können wir sagen, dass, falls $f(x, y, z)$ ein eigentliches
tegral über das Gebiet $\mathfrak{R}$ zulässt, auch die beiden Functionen
$z)$ und $f_2(x, y, z)$ ein dreifaches Integral über das nämliche
besitzen.“

eweis: Sei für jetzt einmal $f(x, y, z)$ eine stetige Function
y und z im ganzen Gebiete $\mathfrak{R}$, so sind natürlich auch

$f_1(x, y, z)$ und $f_2(x, y, z)$ stetige Functionen von x, y und besitzen daher nach Früherem ein eigentliches Tripelintegral mit der Satz für diesen Fall bewiesen ist.

Allein obiger Satz (9) gilt ganz allgemein. Bezeichne die Schwankung der Function $f(x, y, z)$ in ω_r wieder mit σ die von $f_1(x, y, z)$ und $f_2(x, y, z)$ bezw. mit $\sigma_r^{(1)}$ und $\sigma_r^{(2)}$, $\sigma_r = g_r - k_r$, $\sigma_r^{(1)} = g_r^{(1)} - k_r^{(1)}$ und $\sigma_r^{(2)} = g_r^{(2)} - k_r^{(2)}$ und wir dass $\sigma_r^{(1)} \leqq \sigma_r$, als auch $\sigma_r^{(2)} \leqq \sigma_r$ ist; denn g_r, die obere von $f(x, y, z)$ im Gebiete ω_r ($r = 1, 2, \ldots, n$), ist stets größe gleich $g_r^{(1)}$ oder $g_r^{(2)}$, den oberen Grenzen von $f_1(x, y, z)$ $f_2(x, y, z)$ in den entsprechenden Gebieten nach dem fr Satze:

„Ist ein Gebiet $\mathfrak{R}'$ ein Theil von $\mathfrak{R}$ und bedeuten g obere und untere Grenzen der Werte von $f(x, y, z)$ für d biet $\mathfrak{R}$, so hat man $g' \leqq g$ und $k' \geqq k$, wenn g' und k' die resp. untere Grenze derselben Function im Gebiete $\mathfrak{R}'$ bed

Also ist $g_r^{(1)} \leqq g_r$ und $k_r^{(1)} \geqq k_r$ und ebenso $g_r^{(2)} \leqq$ $k_r^{(2)} \geqq k_r$.

Folglich ist $\sigma_r^{(1)} = g_r^{(1)} - k_r^{(1)} < g_r - k_r = \sigma_r$ und $\sigma_r^{(2)} = g_r^{(2)} - k_r^{(2)} < g_r - k_r = \sigma_r$.

Daher ist auch $\lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n} \sigma_r^{(2)}\, \omega_r^{(2)} = 0$ als auch $\lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n} \sigma_r^{(1)}\, \omega$ und damit ist auch für diesen allgemeinen Fall unser S bewiesen.

10. „Wenn im positiven Gebiete $\mathfrak{R}$

$$| f(x, y, z) | \leqq C$$

ist und $\mathfrak{R}$ die Körperzahl des Körpers $\mathfrak{R}$ bezeichnet, so h

$$| S_{(\mathfrak{R})} f(x, y, z)\, d\mathfrak{R} | \leqq C\mathfrak{R}^{\alpha}, \tag{11}$$

denn nach (8) ist

$$| S_{(\mathfrak{R})} f(x, y, z)\, d\mathfrak{R} | \leqq S_{(\mathfrak{R})} C\, d\mathfrak{R} = C\, S_{(\mathfrak{R})}\, d\mathfrak{R} = C.\mathfrak{R}$$

w. z. bew. w.

11. „Wenn die Functionen $f(x, y, z)$ und $\varphi(x, y, z)$ ein liches Tripelintegral über das Gebiet $\mathfrak{R}$ besitzen, so hat a Product $f(x, y, z) \cdot \varphi(x, y, z)$ ein eigentliches Tripelintegral.

Dieser Satz ist natürlich für die Functionen der frü geführten zwei Classen. Man kann ihn jedoch auch ganz al nachweisen, wie ihn O. Stolz in den „Grundzügen der Diff und Integralrechnung“ III. pag. 79 ff. für die Functionen und $\varphi(x, y)$ nachgewiesen hat. Wir wollen diesen Beweis

nothwendigen Abänderungen der Vollständigkeit halber auch folgen lassen.

G_r und K_r seien die obere und untere Grenze von $f(x, y, z)$. $y, z)$ im Polyeder ω_r. Dann wissen wir, dass es nach einem einen Satze bezüglich der oberen und unteren Grenze, d. h. er nach der Definition der oberen und unteren Grenze, die ein üblich ist, zu jedem positiven σ Punkte $(x', y', z'), (x'', y'', z'')$ gibt, dass

$$f(x',\ y',\ z') \cdot \varphi(x',\ y',\ z') > G_r - \sigma$$

$$f(x'', y'', z'') \cdot \varphi(x'', y'', z'') < K_r + \sigma$$

ilden wir also die Differenz $G_r - K_r$, so ist diese

$$-K_r < f(x', y', z') \cdot \varphi(x', y', z') - f(x'', y'', z'') \cdot \varphi(x'', y'', z'') + 2\sigma$$

$$\leq G_r - K_r < f(x', y', z') \{\varphi(x', y', z',) - \varphi(x'', y'', z'')\} +$$
$$+ \varphi(x'', y'', z'') \{f(x', y', z') - f(x'', y'', z'')\} + 2\sigma.$$

ehmen wir nun an, für das ganze Gebiet $\mathfrak{R}$ sei $| f(x,y,z) | < C$ $(x, y, z) | < \Gamma$ und die Schwenkung von $f(x, y, z)$ im Ge- es Polyeders $\omega_r : \sigma_r$ und der Function $\varphi(x, y, z) : \sigma'_r$. ann ist

$$G_r - K_r < C\sigma'_r + \Gamma\sigma_r + 2\sigma$$

$$\sum_{r=1}^{n} (G_r - K_r)\,\omega_r < C \sum_{r=1}^{n} \sigma'_r\,\omega_r + \Gamma \sum_{r=1}^{n} \sigma_r\,\omega_r + 2\sigma \sum_{r=1}^{n} \omega_r .$$

araus ergibt sich nun, da nach Voraussetzung $f(x, y, z)$ $x, y, z)$ ein dreifaches Integral besitzen sollen, weshalb

$$\lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n} \sigma_r\,\omega_r = 0, \quad \lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n} \sigma'_r\,\omega_r = 0$$

da ferner $\lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n} \omega_r = \mathfrak{R}$ ist, sofort

$$\lim_{\omega_r = 0} \sum_{r=1}^{n} (G_r - K_r)\,\omega_r = 0,$$

existirt das

$$S_{(\mathfrak{R})} f(x, y, z) \cdot \varphi(x, y, z)\, d\mathfrak{R},$$ w. z. bew. w.

12. „Nehmen wir obige Function $\varphi(x, y, z)$ und leg noch die Eigenschaft bei, dass ihre Werte im Gebiete $\mathfrak{K}$ entgegengesetzt bezeichnet sind und setzen wir voraus, dass der Werte von $f(x, y, z)$ außerhalb des Intervalles (k, g) so können wir behaupten, dass das Tripelintegral

$$S_{(\mathfrak{K})} f(x, y, z) . \varphi(x, y, z) \, d\mathfrak{K}$$

nicht außerhalb des von den Zahlen

$$k \, S_{(\mathfrak{K})} \varphi(x, y, z) \, d\mathfrak{K} \text{ und } g \, S_{(\mathfrak{K})} \varphi(x, y, z) \, d\mathfrak{K}$$

gebildeten Intervalles liegt."

„Denken wir uns unter den Functionen $f(x, y, z)$ und $\varphi($ zwei im Gebiete $\mathfrak{K}$ stetige Functionen, von denen $\varphi(x, y, z$ in jedem Punkte desselben denselben Wert hat, so liegt Tripelintegral zwischen den oben eingeführten Zahlen. Nac Satze (6) ist $S_{(\mathfrak{K})} \varphi(x, y, z) \, d\mathfrak{K} \geqq 0$ und aus dem Satze (12) w Mittelwertsatz:

$$(12) \quad S_{(\mathfrak{K})} f(x, y, z) . \varphi(x, y, z) \, d\mathfrak{K} : S_{(\mathfrak{K})} \varphi(x, y, z) \, d\mathfrak{K} = f(X, Y, Z$$

wo X, Y, Z die Coordinaten eines nicht näher bekannten P im Innern des Gebietes $\mathfrak{K}$ bedeuten."

Beweis: Wir nehmen an, es sei im Gebiete $\mathfrak{K}$, und z ganzen Gebiete $\mathfrak{K}$ $\varphi(x, y, z) \geqq 0$. Zunächst bemerken wir, ganzen Gebiete $\mathfrak{K}$

$$g - f(x, y, z) \geqq 0 \text{ und } f(x, y, z) - k \geqq 0$$

ist. Daher ist, da wir, um etwas Bestimmtes anzunehmen, $\varphi(x, y$ voraussetzten,

$$[g - f(x, y, z)] . \varphi(x, y, z) \geqq 0 \text{ und ebenso } [f(x, y, z) - k] . \varphi(x, y,$$

Daraus folgt unter Berücksichtigung des 5. und 3. S

$$(13) \quad \begin{cases} g \, S_{(\mathfrak{K})} \varphi(x, y, z) \, d\mathfrak{K} - S_{(\mathfrak{K})} f(x, y, z) \, d\mathfrak{K} \geqq 0 \\ S_{(\mathfrak{K})} f(x, y, z) . \varphi(x, y, z) \, d\mathfrak{K} - k \, S_{(\mathfrak{K})} \varphi(x, y, z) \, d\mathfrak{K} \geqq 0 \end{cases}$$

d. h. dass $S_{(\mathfrak{K})} f(x, y, z) . \varphi(x, y, z) \, d\mathfrak{K}$ zwischen oben ge Zahlen liegt, w. z. bew. w.

Die Ungleichungen (13) dürfen wir, wenn

$$S_{(\mathfrak{K})} \varphi(x, y, z) \, d\mathfrak{K}$$

positiv ist, dadurch dividiren und erhalten

$$g \geqq S_{(\mathfrak{K})} f(x, y, z) . \varphi(x, y, z) \, d\mathfrak{K} : S_{(\mathfrak{K})} \varphi(x, y, z) \, d\mathfrak{K} \geqq$$

Der Quotient liegt also zwischen den Zahlen g und nun, wenn $f(x, y, z)$ eine in allen Punkten von $\mathfrak{K}$ stetige

so können wir auch noch den Schluss des Satzes erweisen, lich den Mittelwertsatz, dass es dann nothwendig in $\mathfrak{R}$ einen kt X, Y, Z gibt, wofür die Function $f(x, y, z)$ den Wert μ an- nt. Die Function $f(x, y, z')$ ist stetig; daher gibt es einen kt (x', y', z'), wofür $f(x', y', z) = g$, und ebenso gibt es einen kt (x'', y'', z''), in dem $f(x, y, z)$ die untere Grenze k annimmt. indet man die Punkte (x', y', z') und (x'', y'', z'') durch irgend stetige Linie, die das Gebiet $\mathfrak{R}$ nicht verlässt, und sich durch leichung: $x = \varphi(\tau, v)$, $y = \psi(\tau, v)$, $z = \chi(\tau, v)$ darstellen lässt. len Punkten (x', y', z') und (x'', y'', z'') die bezüglichen Werte τ und v, nämlich τ', v' und τ'', v'' zugehören. Die Functionen $\upsilon)$, $\psi(\tau, \upsilon)$ und $\chi(\tau, \upsilon)$ sollen stetig sein im ganzen Intervalle $; \tau'', v'')$. Bezeichnet man nun die Function

$$f[\varphi(\tau, v), \psi(\tau, v), \chi(\tau, v) \text{ mit } F(\tau, v),$$

auch diese stetig bei oben genannten Werten von τ und v es ist

$$F(\tau', v') = f(x', y', z') = g$$

ebenso

$$F(\tau'', v'') = f(x'', y'', z'') = k.$$

Nun aber gibt es nach einem Satze über stetige Functionen Wert T und U zwischen τ' v' und τ'', v'', für den

$$F(T, U) = \mu$$

Man erhält also, wenn man

$$\varphi(T, U) = X, \psi(T, U) = Y \text{ und } \chi(T, U) = Z$$

ässt

$$f X, Y, Z) = \mu,$$

bew. w.

andlung des eigentlichen dreifachen Integrals in ein zwei- es Integral, von dem eines ein eigentliches Doppelintegral, das andere ein einfaches bestimmtes Integral ist.

§ 10. Ebenso wie das Doppelintegral sich direct nicht be- en lässt und nur selten in den einfachsten Fällen bei den hsten Annahmen hinsichtlich des Integrationsgebietes eine e Berechnung gestattet, so dass es nothwendig ist, deshalb be in ein zweimaliges Integral zu verwandeln, ebenso ist es unmöglich, das dreifache Integral auf directem Wege aus- nen, sondern seine Berechnung ist nur durch Zurückführung en auf ein dreimaliges Integral möglich.

Wir wollen also im Folgenden die Berechnung desselben n lernen, und zwar zunächst die Umwandlung desselben in reimaliges Integral von oben angeführter Zusammensetzung.

Diesbezüglich gibt es zwei Sätze, die sich auf den gewöh
vorkommenden Fall beschränken, als angenommen wird, dass
Integrationsgebiet $\mathfrak{K}$ nur eine einzige Oberfläche hat, die von
Parallelen zu jeder der drei Coordinatenaxen, sowohl zur X
Y- und Z-Axe in höchstens zwei Punkten durchbrochen wir

Satz I. Als Integrationsgebiet nehmen wir einen Körp
von folgender Beschaffenheit (vgl. Fig. 12):

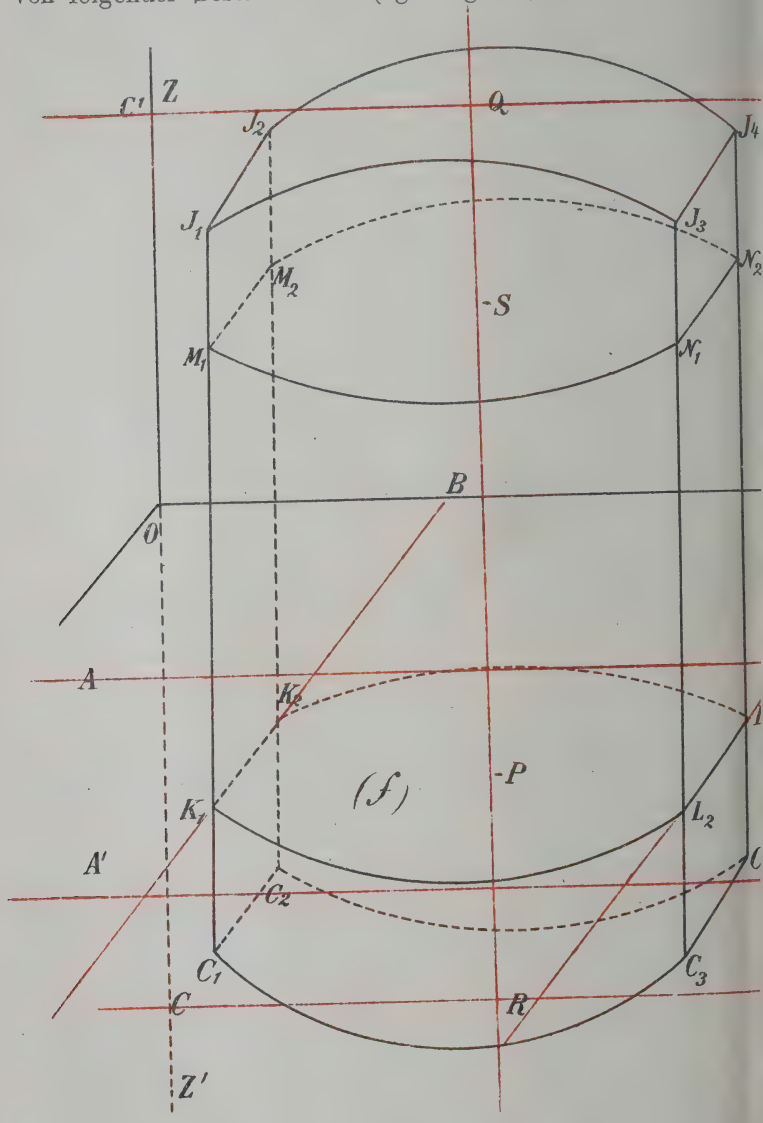


Fig. 12.

Er sei einerseits begrenzt von den zur XZ-Ebene parallelen
ei Ebenen $C_1 C_2 J_1 J_2$ und $C_3 C_4 J_4 J_3$ und den gewöhnlichen
erflächen $C_1 C_2 C_3 C_4$ und $J_1 J_2 J_3 J_4$ (zwei Kuppen oben und
en) und $K_1 L_2 N_1 M_1$ und $K_2 L_1 N_2 M_2$, die von einer paral-
n Geraden zur Z- und X-Achse in höchstens zwei Punkten
chnitten werden, d. h. jede in je einem Punkte. Die Geraden
K_2 und $C_1 C_2$ oder $L_1 L_2$ und $C_3 C_4$ und anderseits die ent-
echenden Geraden oben $M_1 M_2$ und $J_1 J_2 J_3 J_4$ und $N_1 N_2$
ebenso die Punkte M_1 und M_2, J_1 und J_2, N_1 und N_2, J_3 und J_4,
nso K_1 und K_2, C_1 und C_2 und die Punkte L_1 und L_2, C_3 und C_4
nen auch zusammenfallen und ebenso können auch noch obige
ade und die eben genannten Punkte zugleich zusammenfallen.
e früher sei $OA = a$, $OA' = a'$, $OB = b$, $OB' = b'$ und $OC = c$,
$' = c'$. Die zu einem Punkte P der XY-Ebene gehörigen Appli-
n der Flächen $J_1 J_2 J_3 J_4$ und $C_1 C_2 C_3 C_4$ seien

$$\begin{cases} PR = z_1 = \varphi_1(x, y) \\ PQ = z_2 = \varphi_2(x, y) \end{cases},$$

$\varphi_1(x, y)$ und $\varphi_2(x, y)$ im Gebiete der XY-Ebene, das begrenzt
von den Ordinaten (b, b') und den Abscissen (a, a') eindeutige
stetige Functionen von x und y bedeuten.

Ferner sei $f(x, y, z)$ für jeden Punkt von $\mathfrak{R}$ eindeutig definirt
darin endlich, so dass für jeden Punkt von $\mathfrak{R}$

$$|f(x, y, z)| < C$$

ınd ferner möge die Function $f(x, y, z)$ über das Gebiet $\mathfrak{R}$ ein
ntliches Tripelintegral

$$J = \iiint_{(\mathfrak{R})} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

ssen.

Lassen wir nun x und y constant $(a \leqq x \leqq a',\ b \leqq y \leqq b')$
. betrachten wir den Punkt P, so beschreibt z das Intervall
$= \varphi_1(x, y)$, $z_2 = \varphi_2(x, y)]$. Wir können nicht sagen, ob $f(x, y, z)$
lieser Stelle nach z integrirbar ist, wohl aber können wir be-
pten, dass, da die Function $f(x, y, z)$ im Intervalle $[\varphi_1(x, y)$,
$; y)]$ von z endlich ist, die Function $f(x, y, z)$ über dieses
rvall ein oberes und unteres Integral nach z besitzt, also ein

$$G(x, y) = \int_{z_1}^{z_2(1)} f(x, y, z)\, dz \text{ und } K(x, y) = \int_{z_1}^{z_2(2)} f(x, y, z)\, dz.$$

Bilden wir nun eine Function

$$\Phi(x, y) = K(x, y) + [G(x, y) - K(x, y)]\, \Theta(x, y),$$

$\Theta(x, y)$ irgend eine Function von x und y bedeutet, deren
te im Intervalle $(0, 1)$ liegen, so lautet unser Satz, dass diese

so gebildete Function $\Phi(x, y)$ über das Gebiet f zwischen Grenzen a und a' von x und b und b' von y ein eigentliches Do integral besitzt, und zwar ist

$$\iint_{(f)} \Phi(x, y)\, dx\, dy = J. \tag{4}$$

Noch zu bemerken ist, dass, wenn das obere und u Integral von $f(x, y, z)$ nach z einander gleich sind, d. h. als Function $f(x, y, z)$ ein eigentliches Integral zwischen den Gr $\varphi_1(x, y)$ und $\varphi_2(x, y)$ zulässt, wenn also

$$\int_{z_1}^{z_2(1)} f(x, y, z)\, dz = \int_{z_1}^{z_2(2)} f(x, y, z)\, dz$$

ist, so ist

$$\Phi(x, y) = \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz.“$$

Den Beweis dieses wichtigen Satzes können wir zurückf auf den Beweis eines einfachen Falles desselben, nämlich auf dass das Integrationsgebiet zwischen den Abscissen (a, a') Ordinaten (b, b') und den Applicaten c und c' ein rechtwin Parallelepiped $EFGHJKLM$ ist (Fig. 13).

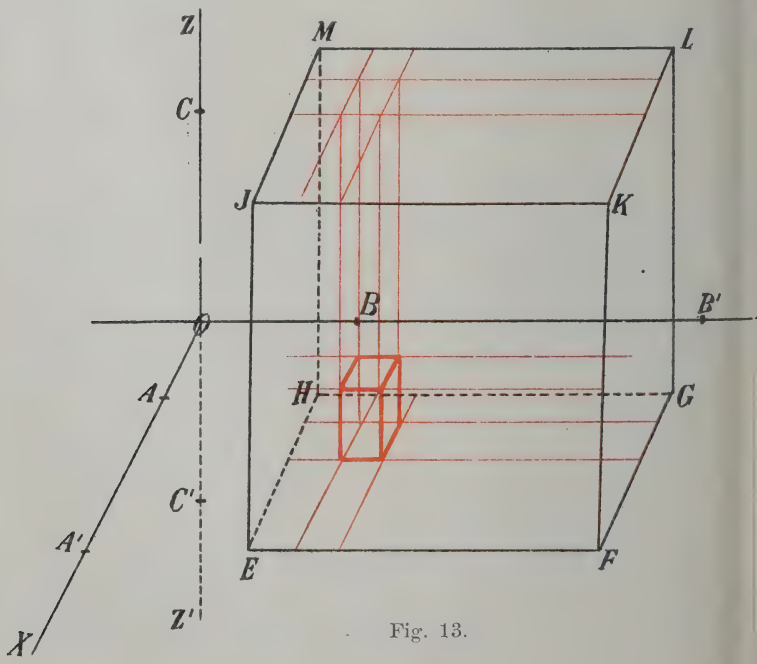


Fig. 13.

Wie früher, denken wir uns zwischen (a, a') der Reihe nach ndwelche Werte $a_1, a_2 \ldots a_{n-1}$ eingeschaltet, setzen

$$\begin{aligned} a_1 - a &= \delta_1 \\ a_2 - a_1 &= \delta_2 \\ &\vdots \\ a_n - a_{n-1} &= \delta_n \end{aligned}$$

ebenso denken wir uns zwischen b und b' und c und c' der ıe nach die bezüglichen Werte

$$b_1, b_2 \ldots b_{m-1}$$
$$c_1, c_2 \ldots c_{t-1}$$

eschaltet, so dass

$$b_1 - b = \varepsilon_1,\ b_2 - b_1 = \varepsilon_2 \ldots b_m - b_{m-1} = \varepsilon_m \text{ und}$$
$$c_1 - c = \gamma_1,\ c_2 - c_1 = \gamma_2 \ldots c_t - c_{t-1} = \gamma_t$$

ınd legen durch die bezüglichen Theilungspunkte die parallelen ıen zur XY-, YZ- und ZX-Ebene und erhalten so das ganze e Parallelepiped $EFGHJKLM$ in lauter kleine rechtwinklige llelepipede $\delta_r \varepsilon_s \gamma_u$, $m \cdot n \cdot t$ an der Zahl getheilt. Sei nun x_r ıeliebiger Wert im Intervalle (a_{r-1}, a_r) $(r = 1, 2 \ldots n)$, ebenso y_s ıeliebiger Wert im Intervalle (b_{s-1}, b_s) $(s = 1, 2 \ldots m)$ und deshen z_u ein beliebiger Wert des Intervalles (c_{u-1}, c_u) $(u = 1, 2 \ldots t)$, lässt sich das dreifache Integral nach Früherem auch so ıiben

$$\text{ı} = \iiint_{(EFGHJKLM)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \lim_{\delta_r = 0,\ \varepsilon_s = 0,\ \gamma_u = 0} \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{m} \sum_{u=1}^{t} f(x_r, y_s, z_u)\, \delta_r\, \varepsilon_s\, \gamma_u.$$

Diese dreifache Summe rechter Hand hat $m.n.t$ Glieder, von ı jedes einem der mnt Parallelepipede entspricht.

Um unseren Satz zu erweisen, müssen wir zeigen, dass

$$\lim_{\delta_r = 0,\ \varepsilon_s = 0} \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{m} \Phi(x_r, y_s)\, \delta_r\, \varepsilon_s = J_1$$

Zu diesem Zwecke betrachten wir den Unterschied

$$\sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{m} \Phi(x_r, y_s)\, \delta_r\, \varepsilon_s - J_1 =$$

$$\left[\sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{m} \Phi(x_r, y_s)\, \delta_r\, \varepsilon_s - \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{m} \sum_{u=1}^{t} f(x_r, y_s, z_u)\, \delta_r\, \varepsilon_s\, \gamma_u \right] +$$

$$+\left[\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}\sum_{u=1}^{t} f(x_r, y_s, z_u)\,\delta_r\,\varepsilon_s\,\gamma_u - J_1\right]$$

Der Ausdruck in der dritten Zeile von (7) hat nach (5 $\lim \delta_r = 0$ $(r = 1 \ldots n)$, $\lim \varepsilon_s = 0$ $(s = 1 \ldots m)$ und $\lim \gamma_u$ $(u = 1 \ldots t)$ den Grenzwert Null.

Jetzt haben wir noch die erste Differenz auf der re Seite in (7) zu betrachten, und auch von dieser muss bew werden, dass sie den Grenzwert Null hat bei ins Unendlich nehmenden δ_r, ε_s und γ_u, damit unser Satz besteht. Bezeichnen w Kürze halber

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}\sum_{u=1}^{t} f(x_r, y_s, z_u)\,\delta_r\,\varepsilon_s\,\gamma_u$$

mit S und formen nun die Differenz

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{m} \Phi(x_r, y_s)\,\delta_r\varepsilon_s - S$$

um, indem wir nach $\delta_r\ \varepsilon_s$ ordnen.

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{m} \Phi(x_r, y_s)\,\delta_r\,\varepsilon_s - S =$$

(8)

$$= \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}\left[\Phi(x_r, y_s) - \sum_{u=1}^{t} f(x_r, y_s, z_u)\,\gamma_u\right]\delta_r\,\varepsilon_s .$$

Nun ist aber

(9) $$K(x_r, y_s) \leqq \Phi(x_r, y_s) \leqq G(x_r, y_s).$$

Bezeichnen wir die obere Grenze von $f(x_r, y_s, z)$ im Int (c_{u-1}, c_u) von z mit $g_u^{(r,s)}$, so haben wir, da $g_u^{(r,s)} \leqq g_{r,s,u}$ ist, w die obere Grenze von $f(x, y, z)$ im ganzen Parallelepipede δ bedeutet

(10a) $$G(x_r, y_s) \leqq \sum_{u=1}^{t} g_u^{(r,s)}\,\gamma_u \leqq \sum_{u=1}^{t} g_{r,s,u}\,\gamma_u ,$$

und auf ähnliche Weise hat man

(10b) $$K(x_r, y_s) \geqq \sum_{u=1}^{t} k_{r,s,u}\,\gamma_u .$$

Aus diesen beiden Ungleichungen und aus (9) folgt

$$\sum_{u=1}^{t} k_{r,s,u}\,\gamma_u \leqq \Phi(x_r, y_s) \leqq \sum_{u=1}^{t} g_{r,s,u}\,\gamma_u .$$

Nun hat man aber, da

$$g_{r,s,u} \geqq f(x_r, y_s, z_u) \geqq k_{r,s,u}$$

auch

$$\sum_{u=1}^{t} k_{r,s,u}\,\gamma_u \leqq \sum_{u=1}^{t} f(x_r, y_s, z_u)\,\gamma_u \leqq \sum_{u=1}^{t} g_{r,s,u}\,\gamma_u .$$

Aus (11) und (12) folgt dann

$$\left.\sum_{u=1}^{t} g_{r,s,u}\,\gamma_u - \sum_{u=1}^{t} k_{r,s,u}\,\gamma_u\right] \leqq \Phi(x_r, y_s) - \sum_{u=1}^{t} f(x_r, y_s, z_u)\,\gamma_u \leqq$$

$$\leqq \sum_{u=1}^{t} g_{r,s,u}\,\gamma_u - \sum_{u=1}^{t} k_{r,s,u}\,\gamma_u ,$$

ich

$$\left|\Phi(x_r, y_s) - \sum_{u=1}^{t} f(x_r, y_s, z_u)\,\gamma_u\right| \leqq \sum_{u=1}^{t} (g_{r,s,u} - k_{r,s,u})\,\gamma_u$$

auch, wenn wir auf die Ungleichung recurriren, von der wir gangen sind

$$\left|\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{m} \Phi(x_r, y_s)\,\delta_r\,\varepsilon_s - S\right| \leqq \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{m} \delta_r\,\varepsilon_s \sum_{u=1}^{t} (g_{r,s,u} - k_{r,s,u})\,\gamma_u .$$

Die Function $f(x, y, z)$ soll nach Voraussetzung ein eigentliches iches Integral über das Gebiet $\mathfrak{R}$ besitzen; daher muss

$$\lim_{\delta_r = 0,\ \varepsilon_s = 0,\ \gamma_u = 0} \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}\sum_{u=1}^{t} (g_{r,s,u} - k_{r,s,u})\,\delta_r\,\varepsilon_s\,\gamma_u = 0$$

d. h. jeder positiven Zahl ε muss eine ebenfalls positive Zahl δ tsprechen, dass

$$0 \leqq \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}\sum_{u=1}^{t} (g_{r,s,u} - k_{r,s,u})\,\gamma_u < \varepsilon$$

venn nur jedes δ_r, jedes ε_s und jedes Theilchen γ_u kleiner s δ.

Daher ist nach (13)

$$\left| \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{m} \Phi(x_r, y_s) - S \right| < \varepsilon$$

und damit ist der oben angeführte Satz erwiesen, denn jetzt

$$\lim_{\delta_r=0,\ \varepsilon_s=0,\ \gamma_u=0} \left\{ \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{m} \Phi(x_r, y_s)\, \delta_r\, \varepsilon_s - \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{m} \sum_{u=1}^{t} f(x_r, y_s, z_u)\, \delta_r\, \varepsilon_s\, \gamma \right.$$

Um nun auf den allgemeinen Beweis des Satzes I zu kon nehmen wir eine zweite Function $F(x, y, z)$, die in allen Pu des vorgegebenen Integrationsgebietes $\mathfrak{R}$ gleich der gege Function $f(x, y, z)$ sei und in allen übrigen Punkten des winkligen Parallelepipeds $EFGHJKLM$ zwischen den Abs a, a', den Ordinaten b, b' und den Applicaten c, c' verschw Diese neue Function $F(x, y, z)$ lässt zufolge des Satzes II, ein dreifaches Integral über genanntes Parallelepiped zu und erhalten wir nach dem Satze 5, S. 60. da die Tripelintegrale die einzelnen Theile von $EFGHJKLM$, welche nach Weg des Gebietes $\mathfrak{R}$ zurückbleiben. Null sind,

$$(A) \qquad \iiint_{(EFGHJKLM)} F(x, y z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{(\mathfrak{R})} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \ (= J)$$

Nach dem gerade Früheren ist aber

$$(B) \qquad \iiint_{(EFGHJKLM)} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_{(f)} \overline{\Phi(x, y)}\, dx\, dy,$$

wo

$$\overline{\Phi(x, y)} = \int_{c}^{c'(2)} F(x, y, z)\, dz + \left\{ \int_{c}^{c'(1)} F(x, y, z)\, dz - \int_{c}^{c'(2)} F(x, y, z)\, dz \right\}$$

ist.

Nun ist aber

$$\int_{c}^{c'(1)} F(x, y, z)\, dz = \int_{c}^{z_1} F(x, y, z)\, dz + \int_{z_1}^{z_2(1)} f(x, y, z)\, dz + \int_{z_2}^{c'} F(x, y,$$

Hier verschwindet das erste und dritte Glied auf der r Seite, da im Intervalle (c, z_1) und (z_2, c') $F(x, y, z)$ und som das Integral darüber verschwindet.

Es ist also

$$\int_{c}^{c'(1)} F(x, y, z)\, dz = \int_{z_1}^{z_2(1)} f(x, y, z)\, dz.$$

Ebenso findet man

$$\int_{c}^{c'(2)} F(x, y, z)\, dz = \int_{z_1}^{z_2(2)} f(x, y, z)\, dz .$$

Wir können also

$$\Phi(\overline{x, y}) = \Phi(x, y)$$

n und erhalten also aus (A) und (B) sofort die zu erweisende
iel

$$\iint_{(f)} \Phi(x, y)\, dx\, dy = J.$$

Dieselbe Schlussweise können wir auch bei beliebiger Gestalt Gebietes $\mathfrak{K}$ in Anwendung bringen.

Man könnte nun aber leicht glauben, dass für jede Function, ıe ein Tripelintegral über das Gebiet $\mathfrak{K}$ besitzt, das zweimalige ral

$$\iint_{(f)} dx\, dy \int_{\varphi_2(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz$$

nur einen Sinn zu haben braucht; wie man leicht durch ein iel erläutern könnte, folgt dies aus Vorstehendem keineswegs.

Um nun das so erhaltene zweimalige Integral

$$\iint_{(f)} \Phi(x, y)\, dx\, dy = \iint_{(f)} dx\, dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz$$

ein dreimaliges Integral zurückzuführen, bedarf es nur der ıerung an das entsprechende Capitel in der Lehre der Doppel- rale, nach welchem unter den oben angegebenen Bedingungen

$$\iint \Phi(x, y)\, dx\, dy = \int_{b}^{b'} dy \int_{\varrho_1(y)}^{\varrho_2(y)} \Phi(x, y)\, dx = \int_{b}^{b'} dy \int_{\varrho_1(y)}^{\varrho_2(y)} dx \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz$$

$\varrho_1(y) = x_1$ und $\varrho_2(y) = x_2$ die zur Ordinate $OP = y$ zwischen b' gehörigen Abscissen der Linie $K_1 L_2$ und $K_2 L_1$ sind. haben ja im Früheren angenommen, dass eine Parallele zur e dieselben in zwei Punkten, d. h. jede in einem Punkte idet.

II. Satz: „Ist $f(x, y, z)$ eine eindeutige und stetige Function em Punkte des Gebietes $\mathfrak{K}$, so hat man

$$\iiint_{(\mathfrak{K})} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_{b}^{b'} dy \int_{\varrho_1(y)}^{\varrho_2(y)} dx \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz.“$$

Denn ist $f(x, y, z)$ auch stetig im Gebiete $\mathfrak{R}$, d. h. im Gebiete $\mathfrak{R}$, so ist das dreifache Integral links vorhanden und so das einfache

$$\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz, \quad (a \leqq x \leqq a',\ b \leqq y \leqq b')$$

da $f(x, y, z)$ bei constantem (x, y) eine stetige Function von bei allen Werten von $z: \varphi_1(x, y) \leqq z \leqq \varphi_2(x, y)$.

Es wird also

$$\Phi(x, y) = \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz, \tag{15}$$

so dass wir erhalten

$$J = \int_{b}^{b'} dy \int_{\varrho_1(y)}^{\varrho_2(y)} dx \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz, \text{ w. z. bew. w.}$$

III. Satz: „Obige Relation (14) hat jedoch auch f zweite der früher angeführten Classen Geltung, für Fun nämlich, die im Gebiete $\mathfrak{R}$ endlich und stetig sind mit Aus einer endlichen Anzahl von Punkten und gewöhnlichen welche entweder parallel sind zur YZ-Ebene oder mit jeder lelen zur ihr höchstens eine bestimmte Anzahl von Punkt mein haben."

Der Beweis dieses Satzes ist dem des vorhergehenden a

Das Integral

$$\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz$$

ist höchstens für eine endliche Anzahl von Werten von x im Gebiete f jetzt nicht vorhanden. Für alle anderen x und die im Intervalle $\{\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)\}$ von z endliche F $f(x, y, z)$ Unstetigkeiten nur bei einer endlichen Anzahl von des z, von $z = \varphi_1(x, y)$ bis $z = \varphi_2(x, y)$ und besitzt daher zwischen diesen Grenzen ein eigentliches Integral.

IV. Satz: „Nehmen wir nun auch noch an, dass das $\mathfrak{R}$, von dem wir schon im Satze I voraussetzten, dass desser fläche von einer zur XZ-Ebene parallelen Ebene in einer ein geschlossenen convexen Linie, d. i. einer solchen, die vo parallelen Geraden zur X- und Z-Axe in nur zwei Punk schnitten wird, geschnitten wird, nun auch von einer pa Geraden zur Y-Axe höchstens in zwei Punkten geschnitte d. h. dass die Oberfläche von $\mathfrak{R}$ von einer Parallelen zur in höchstens zwei Punkten durchbrochen wird, so dass Punkte der Ebene zwischen den Abscissen a', a und den Ap

zwei Punkte der Oberfläche von $\mathfrak{K}$ gehören, deren Ordinaten

$$y_1 = \psi_1(x, z), \quad y_2 = \psi_2(x, z)$$

, so besteht, falls die Function $f(x, y, z)$ ein Tripelintegral das Gebiet $\mathfrak{K}$ zulässt und außerdem die im Satze II und III gebenen Eigenschaften besitzt, auch die Formel

$$\int_b^{b'} dy \int_{\varrho_1(y)}^{\varrho_2(y)} dx \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz = \int_c^{c'} dz \int_{\sigma_1(z)}^{\sigma_2(z)} dz \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dy$$

endlich, wenn wir im Satze I das über z Gesagte mit dem x Gesagten vertauschen, erhalten wir

$$= \int_b^{b'} dy \int_{\tau_1(y)}^{\tau_2(y)} dz \int_{\chi_1(y,z)}^{\chi_2(y,z)} f(x, y, z)\, dx.^{u}$$

Diese drei Formeln in (16) und (17) sind einander gleich, sie sind alle dem dreifachen Inregrale von $f(x, y, z)$ über Gebiet $\mathfrak{K}$ gleich. Dieses letztere folgt unmittelbar aus den ehenden Sätzen, denn die Formel rechts in (16) unterscheidet von der links nur durch Vertauschung der Applicate mit der iate, während sich die Formel (17) aus (16) ergibt durch die uschung der Abscisse mit der Applicate.

Vertauscht man in (16) links noch die Abscisse mit der Ordi- so erhält man ein weiteres Glied dieser Gleichung, nämlich

$$\int_a^{a'} dx \int_{\omega_1(x)}^{\omega_2(x)} dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz,$$

Formel, die sich aus dem Satze über die zweimaligen Inte- ergibt, dass man bei solchen angenommenen Functionen die ationsordnung der beiden ersten Integrale vertauschen kann uf Grund dieses Satzes ergeben sich noch zwei analoge Glieder Gleichung.

Wir gelangen also zum Satze, dass die Reihenfolge der drei ationen in einem eigentlichen dreimaligen Integrale beliebig lert werden kann, ohne dass damit sich der Wert des drei- n Integrals ändert.

Um nun bezüglich der Berechnung des dreifachen Integrals nfaches Beispiel anzuführen, wählen wir die Berechnung des integrals

$$\iiint_{(P)} \frac{x^2 z^2}{x^2 + y^2}\, dx\, dy\, dz,$$

das Prisma (Fig. 14) $OABC'A'B'$ bedeutet, in dem $AB = OC' = 1$ ist.

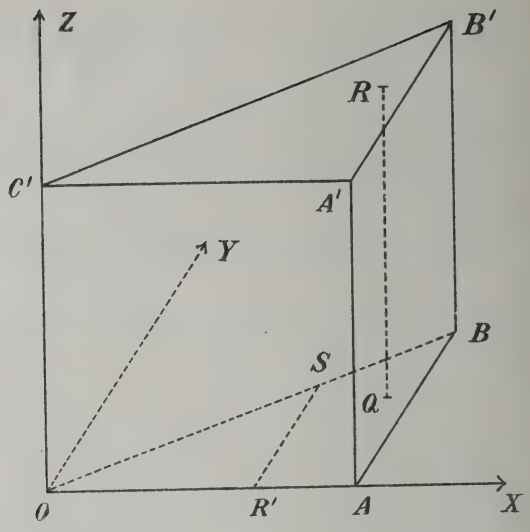


Fig. 14.

Lässt man zunächst x und y constant, z. B. im Punk so nimmt z in dem Prisma $OABC'A'B'$ alle Werte a $z=0$ bis $z=QR=1$.

Also erhält man

$$J=\iiint_{(P)}\frac{x^2z^2}{x^2+z^2}\,dx\,dy\,dz=\iint_{(OAB)}dx\,dy\int_0^1\frac{x^2z^2}{x^2+y^2}dz=$$

$$=\iint_{(OAB)}\frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy\int_0^1 z^2\,dz$$

$$J=\frac{1}{3}\iint_{(OAB)}\frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

Es handelt sich also noch um die Berechnung dieses D integrals. Lassen wir nun x constant $=OR'$, so nimmt y i Dreiecke OAB alle Werte zwischen $y=0$ und $y=R'S=$ denn da OB den Winkel XOY halbirt, hat es die Glei $y=x$. x selbst durchläuft den Spielraum $x=0$ bis $x=1$.

Man erhält also weiter

$$J=\frac{1}{3}\iint_{(OAB)}\frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy=\frac{1}{3}\int_0^1 x\,dx\int_0^x\frac{x\,dy}{x^2+y^2}.$$

Wenn x positiv ist, so ist

$$\int_0^x \frac{x\,dy}{x^2+y^2} = \Big|_{y=0}^{y=x} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \frac{\pi}{4}.$$

Also ist

$$J = \frac{\pi}{12}\int_0^1 x\,dx = \frac{\pi}{12}\Big|_{x=0}^{x=1} \frac{x^2}{2} = \frac{\pi}{24}.$$

§ 11. Jetzt gehen wir weiter zu einigen Anwendungen des rgehenden Satzes.

1. Unter $\mathfrak{K}$ wollen wir das nämliche Gebiet verstehen wie ; dann haben wir die Körperzahl von $\mathfrak{K}$ definirt als

$$\iiint_{(\mathfrak{K})} dx\,dy\,dz.$$

Nun ist aber nach dem früheren Satze I

$$dy\,dz = \iint_{(J)} dx\,dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} dz = \iint_{(J)} \{\varphi_2(x,y) - \varphi_1(x,y)\}\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{(J)} \varphi_2(x,y)\,dx\,dy - \iint_{(J)} \varphi_1(x,y)\,dx\,dy.$$

Dies zeigt uns eine bekannte Formel für den Inhalt unseres s, die schon in der Lehre der Doppelintegrale angeführt

Das Doppelintegral

$$\iint_{(J)} \varphi_2(x,y)\,dx\,dy$$

Inhalt des oberhalb der XY-Ebene liegenden Stückes unseres s und das zweite Doppelintegral

$$\iint_{(J)} \varphi_1(x,y)\,dx\,dy$$

s die Körperzahl des noch übrigen Theiles des Körpers $\mathfrak{K}$. hat das entgegengesetzte Zeichen des ersteren Körperstückes her ist sie mit entgegengesetztem Zeichen zu addiren, um al des gesammten Körpers zu erhalten.

eutlicher wird dies alles, wenn der Körper $\mathfrak{K}$ in Fig. 12 nz oberhalb der XY-Ebene befindet. Da ist es sofort klar, e Körperzahl

$$\iiint_{(\mathfrak{K})} dx\,dy\,dz = \iint_{(J)} \varphi_2(x,y)\,dx\,dy - \iint_{(J)} \varphi_1(x,y)\,dx\,dy$$

ist.

Ebenso erhält man natürlich dieselbe Körperzahl, wenn der Reihe nach die Coordinatenebenen vertauscht.

Lassen wir jetzt die untere Fläche $C_1\,C_2\,C_3\,C_4$ mit der XY zusammenfallen, d. h. mit der in dieser Coordinaten liegenden Fläche $\mathfrak{F}$, so wird natürlich $\varphi_1(x,y) = 0$ und w halten für die Zahl unseres Körpers $\mathfrak{K}$

$$\iint_{(J)} \varphi_2(x,y)\,dx\,dy.$$

Wenn dieser so beschaffene über $\mathfrak{F}$ aufstehende Körpe noch durch eine beliebige Fläche mit der Gleichung $z_1 = \chi$

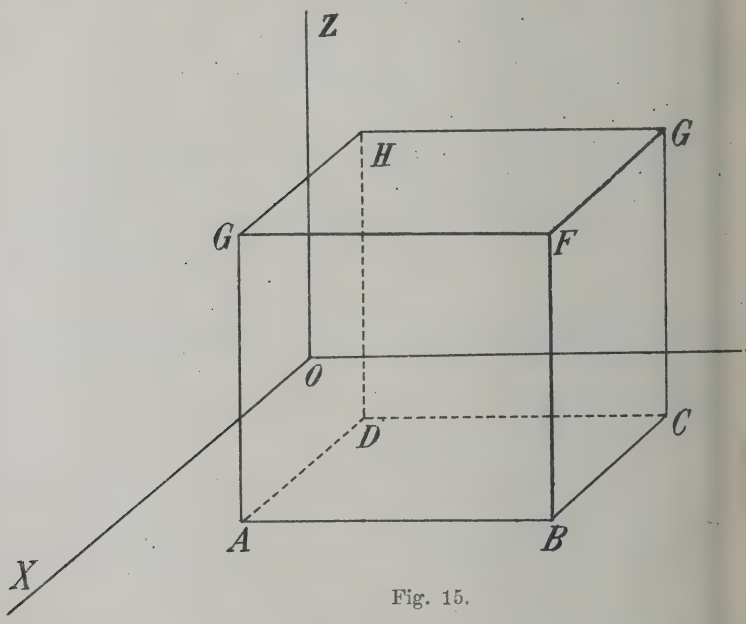


Fig. 15.

in zwei Theile getheilt wird, so erhalten wir für den Inh in der Lehre der Doppelintegrale die Zahl

$$\iint_{(J)} \varphi_2(x,y)\,dx\,dy - \iint_{(J)} \chi_1(x,y)\,dx\,dy = \iint_{(J)} \{\varphi_2(x,y) - \chi_1(x,y)\}\,d$$

und analog, wenn sie in mehrere Theile zerfällt.

2. Wenn die im endlichen Intervalle (a, a') eindeuti endliche Function $f(x)$ mindestens bei allen innerhalb diese

gelegenen Werten von x endlich und stetig ist und minde-
bei allen innerhalb des Intervalles (b, b') gelegenen Werten
$g(y)$, endlich mindestens bei allen im Intervalle (c, c') ge-
en z $h(z)$ endlich und stetig sind, so bildet das Product
$g(y).h(z)$ eine im rechtwinkligen Parallelepipede $ABCDEFGH$
15) endliche und innerhalb desselben durchaus stetige Func-
von x, y und z.

Daher hat man nach dem II. und III. Satze des Vorherge-
n

$$\iiint_{(ABCDEFGH)} f(x).g(y).h(z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{(ABCD)} dx\,dy \int_c^{c'} f(x)\,g(y)\,h(z)\,dz$$

$$= \iint_{(ABCD)} f(x)\,g(y)\,dx\,dy \int_c^{c'} h(z)\,dz.$$

Nach einem Satze über Doppelintegrale (vergl. O. Stolz:
dzüge III." pag. 91) ist aber

$$\iint_{(ABCD)} f(x).g(y)\,dx\,dy = \int_a^{a'} f(x)\,dx \int_b^{b'} g(y)\,dy,$$

s also

$$\iiint_{GH)} f(x).g(y).h(z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^{a'} f(x)\,dx \int_b^{b'} g(y)\,dy \int_c^{c'} h(z)\,dz$$

. Haben wir eine Function $f(x, y, z)$, die eindeutig definirt
dem eben erwähnten Parallelepipede stetig ist, entweder
mslos oder ohne aufzuhören endlich zu sein in einer end-
Anzahl von Punkten und ganzen Linien unstetig ist, so er-
an aus den Formeln (16) und (17) die Gleichung

$$\int_b^{b'} dy \int_a^{a'} dx \int_c^{c'} f(x,y,z)\,dz = \int_c^{c'} dz \int_a^{a'} dx \int_b^{b'} f(x,y,z)\,dy =$$

$$= \int_b^{b'} dy \int_c^{c'} dz \int_a^{a'} f(x,y,z)\,dx,$$

en sich dann sofort drei weitere Formeln ergeben.

Sei $f(x, y, z)$ wie in 3 definirt, und verstehen wir unter N
unkt im Innern des Parallelepipeds $ABCDEFGH$ mit
rdinaten x, y, z, doch nicht auf den Seitenflächen $ABCD$,
und $ADHE$ gelegen (Fig. 16), so ergibt sich nach 3:

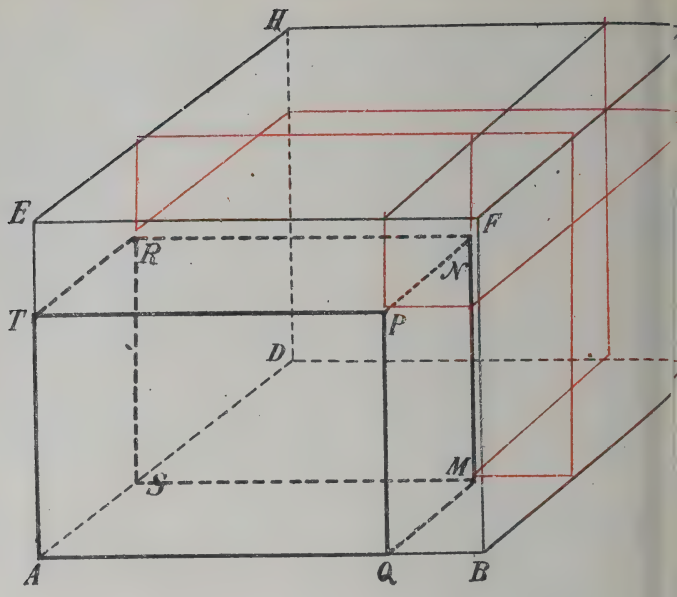


Fig. 16.

$$(C)\qquad \iiint_{(AQMSTPNR)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^x dx \int_b^y dy \int_c^z f(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int_b^y dx \int_c^z dz \int_a^x f(x,y,z)\,dy = \int_b^y dy \int_c^z dz \int_a^x f(x,y,z)\,dx.$$

Dieses dreifache Integral ist eine eindeutige Functi
x, y und z, für die wir $F(x,y,z)$ schreiben wollen. Fes
wollen wir darüber Folgendes:

$$F(x,y,c) = 0 \quad (a \leqq x \leqq a',\ b \leqq y \leqq b')$$
$$F(x,b,z) = 0 \quad (a \leqq x \leqq a',\ c \leqq z \leqq c')$$
$$F(a,y,z) = 0 \quad (b \leqq y \leqq b',\ c \leqq z \leqq c').$$

Nun erhalten wir den Satz, dass diese Function F
stetig ist in Bezug auf die drei reellen Veränderlichen x, y
in jedem Punkte des Parallelepipeds $ABCDEFGH$, ur
ferner dieses $F(x,y,z)$ an den Stellen, wo $f(x,y,z)$ ste
partielle Differentialquotienten I. Ordnung nach x, y und z
und zwar ist

$$(D)\qquad \frac{\partial F}{\partial x} = \iint_{(AQPT)} f(x,y,z)\,dy\,dz,\quad \frac{\partial F}{\partial y} = \iint_{(ASRT)} f(x,y,z)\,dx\,dz$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \iint_{(AQMS)} f(x, y, z)\, dx\, dy.“$$

Beweis: Dass $F(x, y, z)$ diese partiellen Differentialquotienten
:t, folgt sofort aus dem ähnlichen Satze in der Lehre der
elintegrale (O. Stolz: „Grundzüge III., pag. 92) und durch
n Anwendung auf obige Formel (C), d. h. richtiger aus dem
gen Satze in der Lehre des einfachen Integrals (vgl. O. Stolz:
ndzüge der Differential- und Integralrechnung I. X., pag. 9).
Nun gehen wir daran, die Stetigkeit dieser Function $F(x, y, z)$
weisen. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Differenz

$$F(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) - F(x, y, z).$$

Es ist

$$'(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) - F(x, y, z) = S_{(\mathfrak{R}')} f(x, y, z)\, d\mathfrak{R} -$$

$$S_{(AQMSTPNR)} f(x, y, z)\, d\mathfrak{R} = S_{[\mathfrak{R}'-AQMSTPNR)]} f(x, y, z)\, d\mathfrak{R},$$

' das Gebiet ist, das aus $\mathfrak{R}$ entsteht, wenn man x um ξ, y um η
: um ζ vergrößert und durch die so entstehenden Punkte
r parallele Ebenen zu den Ebenen von $AQMSTPNR$ legt.
ird ein neues Parallelepiped entstehen, das wir eben mit $\mathfrak{R}'$
hnen.
Nun ist die Function im Gebiete $ABCDEFGH$ endlich,
es gibt eine Zahl C derart, dass

$$|f(x, y, z)| \leqq C$$

aher erhalten wir

$$+\xi, y+\eta, z+\zeta) - F(x, y, z)| \leqq C \iiint_{(AQMSTPNR)} dx\, dy\, dz = C\mathfrak{R} < \varepsilon,$$

nur $\mathfrak{R} < \frac{\varepsilon}{C}$ ist.

)amit ist die Stetigkeit von $F(x, y, z)$ bewiesen:
'erner folgt aus (D), dass wenigstens für die Punkte, für
$f(x, y, z)$ stetig ist,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \int_c^z f(x, y, z)\, dz \text{ und } \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\right] = f(x, y, z)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \int_a^x f(x, y, z)\, dx \text{ und } \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\right] = f(x, y, z)$$

endlich

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) = \int_b^y f(x,y,z)\,dy \text{ und } \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\right] = f(x,y,z)$$

also alle drei einander gleich sind.

Dieser Satz IV enthält als besonderen Fall den Satz I wir im Früheren angeführt haben.

Und so können wir auch die weiteren Sätze, die u nämlichen Capitel der Doppelintegrale begegnen (vgl. O. S „Grundzüge III.“, pag. 93 ff.), auch hier für unseren Fal sprechen und beweisen.

5. Sei $f(x,y,z)$ dieselbe Function wie oben in 3 und $F($ eine Function, die folgendermaßen beschaffen ist, dass sie in Punkte des Parallelepipeds $ABCDEFGH$ mit Einschluss Oberfläche stetig ist in Bezug auf x, y und z, dass sie ferne stetigen partiellen Differentialquotienten nach x, y oder z und dass sie wenigstens in den Punkten innerhalb des Parallele wo $f(x,y,z)$ stetig ist, die Bedingungen erfüllt

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\right] = f(x,y,z)$$

resp.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\right] = f(x,y,z),$$

resp.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\right] = f(x,y,z),$$

so hat man

$$\iiint_{(ABCDEFGH)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = F(a',b',c') - F(a',b',c) -$$

$$-F(a',b,c') + F(a',b,c) - F(a,b',c') + F(a,b',c) + F(a,b,c') - F$$

Dieser Satz folgt daraus, dass man in der Formel

$$J = \iiint_{(ABCDEFGH)} f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \int_a^{a'} dx \int_b^{b'} dy \int_c^{c'} f(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int_a^{a'} dx \int_c^{c'} dz \int_b^{b'} f(x,y,z)\,dy = \int_c^{c'} dz \int_b^{b'} dy \int_a^{a'} f(x,y,z)\,dx$$

die rechte Seite berechnet.

6. „Es gibt eine und nur eine Function von x, y und z, die
unkte $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ den vorgegebenen Wert c hat,
en Punkten stetig ist und als partielle Differentialquotienten
x und y, z und y, endlich x und z die in den genannten
ten stetige Functionen $\psi(x, y, z)$, $\chi(x, y, z)$, endlich $\varphi(x, y, z)$
lie wenigstens in den Punkten im Innern des Parallelepipeds
ıder Bedingung genügen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \chi}{\partial x} = f(x, y, z),$$

ie Function $f(x, y, z)$ in diesen Punkten des Parallelepipeds
$DEFGH$ in Bezug auf x, y und z stetig und dort endlich
nöge."

Beweis: Der Beweis dieses Satzes bietet keine Schwierigkeit
ehnen wir wieder wie oben mit $F(x, y, z)$ das Tripelintegral

$$\iiint_{(AQMSTPNR)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \int_c^z \frac{\partial \psi(x, y, z)}{\partial z}\, dz = \psi(x, y, z) - \psi(x, y, c)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \int_a^x \frac{\partial \chi(x, y, z)}{\partial x}\, dx = \chi(x, y, z) - \chi(a, y, z)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) = \int_b^y \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial y}\, dy = \varphi(x, y, z) - \varphi(x, b, z).$$

Unseren Bedingungen entspricht also die Function

$$, z) = c + F(x, y, z) - F(x_0, y_0, z_0) + \int_{x_0}^{x} dx \int_{z_0}^{z} \varphi(x, b, z)\, dz +$$

$$+ \int_{x_0}^{x} dx \int_{y_0}^{y} \psi(x, y, c)\, dy + \int_{y_0}^{y} dy \int_{z_0}^{z} \chi(a, y, z)\, dz.$$

Denn es ist $H(x_0, y_0, z_0) = c$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + \psi(x, y, c) = \psi(x, y, z)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) + \chi(a, y, z) = \chi(x, y, z)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) + \varphi(x, b, z) = \varphi(x, y, z).$$

Dass $H(x, y, z)$ die einzige derartige Function ist, ergil leicht durch einen indirecten Beweis, indem man eine a Function $K(x, y, z)$ mit denselben Eigenschaften wie $H(x$ annimmt und aus bekannten Sätzen vom Verschwinden der par Differentialquotienten aus den Relationen

$$H(x_0, y_0, z_0) - K(x_0, y_0, z_0) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(H - K\right)\right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(H - K\right)\right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(H - K\right)\right] = 0$$

die gesuchte Gleichheit von H und K ableitet.

Zu diesem Satze noch die eine Bemerkung, dass bezügli noch übrigen durch cyklische Vertauschung der x, y und obiger Bedingungsgleichung der $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ und $\chi(x$ sich eine analoge Function H' aufstellen lässt, die aus $H(x, y, z)$ entsteht, wenn man dort die Buchstaben, d. h. n Functionszeichen φ, ψ, χ rückwärts cyklisch vertauscht, d. h. φ d ψ durch φ und χ durch ψ ersetzt.

Nun wollen wir damit die Reihe dieser Sätze besch obwohl es noch einige sehr interessante Anwendungen d Beginne dieses Capitels erwähnten Satzes gäbe und wir w uns jetzt zum Green'schen Satze.

Der Green'sche Satz.[1])

§ 12. Bereits in der Lehre von den Doppelintegralen wir diesen so wichtigen Satz kennen sammt einigen beme werten Anwendungen desselben. Allein der Green'sche Sat behandelt, ist nur ein besonderer Fall des Satzes, der gewö als Green'scher bezeichnet wird für dreifache Integrale, d an dieser Stelle passend einschalten können. Zur Ableitun selben bedarf es zunächst der Formeln für die Richtungsco der inneren (oder äußeren) Normalen n für den geschlossenen $\mathfrak{K}$ mit der Gleichung

$$(1) \qquad x = \varphi(u, v),\ y = \psi(u, v),\ z = \chi(u, v).$$

[1]) Vgl. O. Stolz: „Grundzüge der Differential- und Integralrechnu pag. 227.

Bezeichnen wir die drei Functionaldeterminanten

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial u}$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{\partial\chi}{\partial v}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u}$$

'ste mit $J(u,v)$, die zweite mit $K(u,v)$ und endlich die dritte (u,v) und, wenn mindestens eine dieser Determinanten von verschieden ist, die positive Zahl

$$\sqrt{J^2+K^2+L^2}$$

so ist

$$J=\rho\cos\overset{\wedge}{xn},\quad K=\rho\cos\overset{\wedge}{yn},\quad L=\rho\cos\overset{\wedge}{zn},$$

n den Halbstrahl bedeutet, entweder für alle diese Punkte berfläche O von $\mathfrak{K}$ die innere, d. h. die nach dem Innern on ihr begrenzten Körpers $\mathfrak{K}$ oder aber für alle die äußere ıle. Dass obige Relationen (2) in der That richtig sind, zeigt ıadrirung und Addition derselben, denn

$$\cos^2\overset{\wedge}{xn}+\cos^2\overset{\wedge}{yn}+\cos^2\overset{\wedge}{zn}=1;$$

ist wirklich

$$J^2+K^2+L^2=\rho^2.$$

Nach diesen Voraussetzungen lautet nun der Green'sche Satz eifache Integrale:

Sei ein dreifaches Integral

$$I=\iiint_{(\mathfrak{K})} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$x,y,z)$ für alle x. y und z von $\mathfrak{K}$ eindeutig definirt und tens für jeden Punkt im Innern des Körpers $\mathfrak{K}$ stetig ist. n, und kennt man eine Function $F(x,y,z)$, die in jedem von $\mathfrak{K}$ eindeutig definirt und mit Einschluss der Begrenzung stetig ist, deren partieller Differentialquotient nach x min- in den Punkten innerhalb $\mathfrak{K}$ gleich der vorgegebenen Function z) ist, so ist, wenn man dx, dy und dz als positiv voraussetzt,

$$\iiint_{(\mathfrak{K})} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iint_{(\Phi)} F\{\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v)\}\,J(u,v)\,du\,dv,$$

lie Zeichen von du, dv so zu nehmen sind, dass das Pro-

duct $J(u, v)\,du\,dv$ positiv wird (allgemein: das Zeichen von hat: $\operatorname{sign} J(u, v)\,du\,dv = \operatorname{sign} dx\,dy$), wenn u, v jene Wer nehmen, denen der größte Wert der Abscisse x an der Obe O entspricht. Ebenso ist bei derselben Annahme über die Z von $du\,dv$, wenn wir unter $G(x, y, z)$ eine in jedem Punk $\mathfrak{R}$ eindeutige und stetige Function verstehen, deren pa Differentialquotient nach y wenigsten in den Punkten im I von $\mathfrak{R}$ gleich $f(x, y, z)$ ist,

$$(4) \qquad I = \iint_{(\Phi)} G\{\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)\} K(u, v)\,du\,dv,$$

und endlich ist, falls $H(x, y, z)$ eine in $\mathfrak{R}$ allenthalben tige und stetige Function mindestens in allen Punkten in $\mathfrak{R}$ ist, die $f(x, y, z)$ zum partiellen Differentialquotienten nach

$$(5) \qquad I = \iint_{(\Phi)} H\{\varphi(u, v)\,\psi(u, v), \chi(u, v)\}\, L(u, v)\,du\,dv.“$$

Beweis: Dieser Satz für die dreifachen Integrale läs in ähnlicher Weise beweisen wie für die Doppelintegrale wollen uns zunächst auf den einfachsten Fall beschränken die Oberfläche O von einer Parallelen zur X-Axe höchs zwei Punkten geschnitten wird mit den Abscissen

$$x_1 = \rho_1(y, z), \quad x_2 = \rho_2(y, z),$$

wo z. B. $x_1 < x_2$ sei.

Nun ist nach Voraussetzung

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(x, y, z)$$

und daher, wenn wir von $x = x_1$ bis $x = x_2$ integriren

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, z)\,dz = F(x_2, y, z) - F(x_1, y, z).$$

Sei F_1 die Projection von O auf die YZ-Ebene, so is

$$\iiint_{(\mathfrak{R})} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{(F_1)} F(x_2, y, z)\,dy\,dz - \iint_{(F_1)} F(x_1, y, z)\,d$$

Diese beiden Doppelintegrale rechter Hand wollen v transformiren, indem wir statt y und z die beiden Veränd u und v einführen, die mittelst der Gleichungen

$$y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)$$

mit den alten Variablen verbunden sind.

Dadurch erhalten wir einen neuen Bereich Φ, der sich in Theile Φ_1 und Φ_2 zerlegen lässt, von denen jedem eindeutig läche F_1 entspricht. Die Functionaldeterminante, die mit der formation unter dem Doppelintegral erscheint, ist

$$J(u,v) = \frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial u},$$

zwar ist sie in Φ_1 und Φ_2 entgegengesetzt bezeichnet, denn $\cos \widehat{xn}$. Wenn also J auf der einen Seite dieser Normalen men wird, ist es positiv.

$J = 0$, wenn $\cos \widehat{xn} = 0$ ist, also $\widehat{xn} = \frac{\pi}{2}$, d. h. dort, wo die le zur X-Axe in den Punkten von O senkrecht steht, ist sie

Gehen wir weiter, so wird $\cos \widehat{xn}$ negativ und daher auch glich ändert J in den Punkten von O, wo die Normale zur e senkrecht steht, sein Zeichen.

Wenn nun Φ_2 jene Hälfte von O ist, wo die Abscisse ihren n Wert erreicht, ist

$$\iiint_{(\Phi_2)} F(x_2, y, z)\, dy\, dz = \iint_{(\Phi_1)} F\{\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)\} J(u,v)\, du\, dv.$$

Dabei muss sign $J(u,v)\, du\, dv = \text{sign}\, dy\, dz$ $(u, v$ im Gebiete so nach unserer Annahme $J(u,v)\, du\, dv$ positv sein.

Nun haben wir gesehen, dass $J(u,v)$ für die u und v der e Φ_1 und Φ_2 entgegengesetzte Zeichen hat, also ist

$$\iiint_{(\Phi_1)} F(x_1, y, z)\, dy\, dz = -\iint_{(\Phi_1)} F\{\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)\} J(u,v)\, du\, dv$$

ir erhalten, wenn wir diese beiden Relationen (6) und (7) n die zu erweisende Gleichung (3) des Green'schen Satzes

$$\iiint_{(\Phi)} \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint_{(\Phi)} F\{\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)\} J(u,v)\, du\, dv.$$

anz analog erhält man die beiden anderen Seiten des Green'-Satzes, indem, wenn n die innere Normale bedeutet, so- $\cos \widehat{yn}$ in dem Punkte von O, wo die Ordinate y ihren Wert erreicht, als $\cos \widehat{zn}$, wo das mit der Applicate z der gleich -1 ist.

esen Satz können wir sofort für die Cubaturformel anwen- Sei $\mathfrak{R}$ wieder der im Früheren gewählte Körper und $z) = 1$, so ist

$$F(x, y, z) = x, G(x, y, z) = y, \; H(x, y, z) = z$$

und ferner ist

$$\Re = \iint_{(\Phi)} x J(u, v) \, du \, dv$$

$$\Re = \iint_{(\Phi)} y K(u, v) \, du \, dv$$

$$\Re = \iint_{(\Phi)} z L(u, v) \, du \, dv.$$

Addirt man diese drei Ausdrücke, erhält man als C formel

$$\Re = \frac{1}{3} \iint \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} du \, dv.$$

Der Green'sche Satz in allgemeiner Form, insoweit er Betracht kommt.[1])

§ 13. Wir gehen nun daran, den Green'schen Satz zu gemeinern und bedienen uns der in der Note citirten Abha von J. A. Gmeiner.

Da ist es jedoch nothwendig, sofort zu bemerken, d treffs der Annahme des Integrationsgebietes J. A. Gmeiner gemeineren Voraussetzungen ausgeht, wie wir es im Früher than haben. Er beschränkt sich nicht auf sog. Primitivgebie sind solche mit der Gleichungsform

$$G = [k_r(x_1, x_2) \leqq x_r \leqq g_r(x_1, x_2)]^2) \; (r = 1, 2, 3),$$

sondern er zieht auch solche Gebiete in Betracht, die nich in dieser Gleichungsform darstellbar sind, die sich aber endliche Anzahl von Primitivgebiete zerlegen lassen, so d Gleichung seiner Integrationsgebiete sein wird

$$G = \sum_{s=1}^{m} [k_{r,s}(x_1, x_2) \leqq x_r \leqq g_{r,s}(x_1, x_2) \; (r = 1, 2, 3).$$

Als einfachstes Beispiel für ein solches Gebiet mi

[1]) Vgl. J. A. Gmeiner: „Green'scher Satz für dreifache Integrale. Monatshefte VI. (1895).]

[2]) Der Kürze halber ist hier für x, y und z : x_1, x_2 und x_3 gesetz

der angeführt werden, über dessen Grundflächen noch je eine
e sich erhebt. Des Näheren siehe die S. 92 citierte Ab-
lung!

Wir nehmen ein endliches Gebiet F. Es lasse sich in Theil-
te zerlegen und zwar in Theilgebiete $F_{3,r}$, die sich analytisch
rstellen lassen

$$F_{3,r} = [a_{3,r} \leqq x \leqq a'_{3,r}, \quad \omega_{3,r}(x) \leqq y \leqq \omega'_{3,r}(x), \\ \varrho_{3,r}(x,y) \leqq z \leqq \varrho'_{3,r}(x,y)],$$

also in Stücke $F'_{3,r}$ $(r = 1 \ldots n)$, die zwischen den Abscissen
$'_{2,r}$, den Ordinaten $\omega_{3,r}(x)$, $\omega'_{3,r}(x)$ und den Applicaten
$, y)$, $\varrho'_{3,r}(x, y)$ liegen, dass also $F = \sum_{r=1}^{n} F'_{3,r}$ ist.

Voraussetzen wollen wir wieder, dass $f(x, y, z)$ im ganzen
hen Gebiete F eine eindeutige und stetige Function von x, y
sei und ferner, dass eine solche Function $F(x, y, z)$ gegeben
r die $\frac{\partial F}{\partial z} = f(x, y, z)$ ist, ferner eine $G(x, y, z)$, dass $\frac{\partial G}{\partial y} =$
$, y, z)$ und endlich eine $H(x, y, z)$, wofür $\frac{\partial H}{\partial x} = f(x, y, z)$
. h. die Function $f(x, y, z)$ soll mindestens einer dieser Re-
n genügen. Dann ist, wenn

$$I = \iiint_{(F)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \iint_{(P'_r)} F(x, y, \varrho'_{3,r}(x, y))\, dx\, dy - \sum_{r=1}^{n} \iint_{(P_r)} F(x, y, \varrho_{3,r}(x, y))\, dx\, dy,$$

das Gebiet bedeutet zwischen den Abscissen $x = a_{3,r}$, $x = a'_{3,r}$
n Ordinaten $y = \omega_{3,r}(x)$ und $y = \omega'_{3,r}(x)$.
un transformiren wir wieder, indem wir annehmen, dass

$$\varrho'_{3,r}(u, v), \quad y = \psi'_{3,r}(u, v), \quad z = \varrho'_{3,r}(\varphi'_{3,r}, \psi'_{3,r}) = \chi'_{3,r}(u, v)$$

adurch wird dem Gebiete P_r je ein Gebiet Q_r der neuen
erlichen u, v so zugeordnet, dass jedem Wertepaare (x, y) im
P_r ein und nur ein Wertepaar (u, v) in Q_r entspricht und
ehrt. Bezüglich des Randes braucht dies nicht zu gelten.
ie früher sei nun

$$\frac{\partial \varphi'_{3,r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \psi'_{3,r}}{\partial v} - \frac{\partial \varphi'_{3,r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \psi'_{3,r}}{\partial u} = J'_{3,r}(u, v),$$

das im ganzen Gebiete Q_r constantes Vorzeichen besitzt, da
als positiv annehmen dürfen, da man ja, um es positv zu m
nur die einzelnen Glieder zu vertauschen braucht.

Es wird also

$$\sum_{r=1}^{n} \iint_{(P_r)} F\{x, y, \varrho'_{3,r}(x,y)\}\, dx\, dy = \sum_{r=1}^{n} \iint_{(Q_r)} F\{\varphi'_{3,r}, \psi'_{3,r}, \chi'_{3,r}\} J'_{3,r}(u,v)$$

Desgleichen können wir den Subtrahend umformen u
halten

$$\sum_{r=1}^{n} \iint_{(P_r)} F\{x, y, \varrho_{3,r}(x,y)\}\, dx\, dy = \sum_{r=1}^{n} \iint_{(R_r)} F\{\varphi''_{3,r}, \psi''_{3,r}, \chi''_{3,r}\} J'_{3,r}(u,v)$$

Folglich wird

$$I = \sum_{r=1}^{n} \left\{ \iint_{(Q_r)} F(\varphi'_{3,r}, \psi'_{3,r}, \chi'_{3,r})\, J'_{3,r}(u,v)\, du\, dv + \right.$$
$$\left. + \iint_{(R_r)} F(\varphi''_{3,r}, \psi''_{3,r}, \chi''_{3,r})\, J'_{3,r}(u,v)\, du\, dv \right\}.$$

Nehmen wir nun an, dass mehrere der Gebiete der Q_r u
zusammen ein einziges zusammenhängendes Gebiet $\Phi_{3,p}$ ausm
und das für dieses Gebiet auch die entsprechenden Function
und $\varphi''_{3,r}$, $\psi'_{3,r}$ und $\psi''_{3,r}$, endlich $\chi'_{3,r}$ und $\chi''_{3,r}$ zu je einer s
Function $\varphi_{3,p}$, $\psi_{3,p}$, $\chi_{3,p}$ zusammenfließen, wird

$$(I) \qquad I = \sum_{p=1}^{m_3} \iint_{(\Phi_{3,p})} F\{\varphi_{3,p}, \psi_{3,p}, \chi_{3,p}\} J_{3,p}(u,v)\, du\, dv,$$

wo $m_3 < 2n$ ist. Ferner ist noch zu bemerken, dass die
formation so vorgenommen sein soll, dass für die oberen z-
$J_{3,p} \geqq 0$, für alle unteren z-Ränder $J_{3,p} \leqq 0$ sei.

Diese Formel (I) kann man sofort zu Cubaturen verw
z. B. zur Cubatur eines Rotationskörpers.

Wenn eine Curve $y = f(x)$ um die X-Axe eines rech
ligen Coordinatensystems rotirt, so bildet der so entstehend
tionskörper ein Gebiet, das gelegen ist zwischen den Ab
(a, a') und den Ordinaten $+f(x)$ und $-f(x)$ und den
caten z

$$a \leqq x \leqq a', \quad -f(x) \leqq y \leqq +f(x).$$

Die Applicaten z findet man leicht, wenn man folgende egung an Fig. 17 anstellt.

$$x = OP, y = PM = f(x)$$
$$AA' = f(a), BB' = f(b)$$
$$x = OP, y = PQ, z = QN$$
$$\hat{MPN} = \omega$$
$$y^2 + z^2 = \overline{PN}^2 = \overline{PM}^2 = f(x)^2$$
$$z = \pm \sqrt{f(x)^2 - y^2}$$

z hat also den Spielraum von:

$$-\sqrt{f(x)^2 - y^2} \leqq z \leqq +\sqrt{f(x)^2 - y^2}.$$

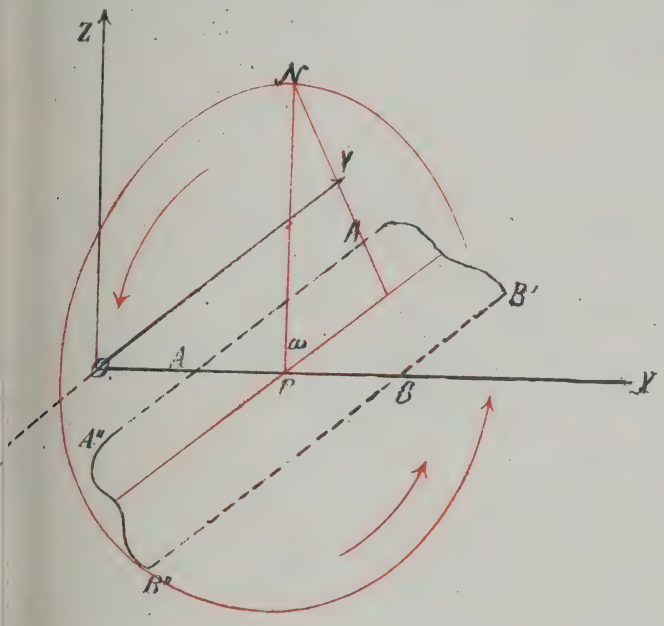


Fig. 17.

)er Körperinhalt ist allgemein

$$\mathfrak{K} = \iiint_{(P)} dx\, dy\, dz.$$

etzt man $x = x, y = f(x) \sin \omega$, zu welcher Transformation biet Φ zwischen den Abscissen $x = a, x = a'$ und $0 \leqq \omega \leqq 2\pi$ und

$$z = \sqrt{f(x)^2 (1 - \sin^2 \omega)} = f(x) \cos \omega$$

Dies entspricht unserer Bedingung, denn für unseren Fall $; y, z) = f(x) \cos \omega$.

Da nun

$$J(u,v) = -\frac{\partial\{f(x)\sin\omega\}}{\partial\omega} - \frac{\partial x}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial\{f(x)\sin\omega\}}{\partial x} = f(x)\cos\omega$$

und

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial\{f(x)\cos\omega\}}{\partial z} = 1$$

ist, so wird

$$\mathfrak{K} = \iint_{(\Phi)} f(x)^2\cos^2\omega\, dx\, d\omega = \int_a^{a'} f(x)^2\, dx \int_0^{2\pi}\cos^2\omega\, d\omega = \pi\int_a^{a'} f(x)$$

eine Formel für den Inhalt eines Rotationskörpers, die i
Lehre der Doppelintegrale auf etwas andere Art abgeleitet

Ein weiteres Beispiel ist die Cubatur eines geraden Cyli
dessen Grundfläche in der XY-Ebene liegt.

Das Gebiet ist also hier die Grundfläche f und

$$0 \leqq z \leqq h(x,y).$$

Führen wir hier die Substitution $x = x$, $y = y$ ein, so
man

$$\iiint_{(F)} dx\, dy\, dz = \iint_{(f)} h(x,y)\, dx\, dy.$$

Als weiteres Beispiel wählen wir die Cubatur eines
axigen Ellipsoides mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Das Integrationsgebiet F wird also analytisch durch di
gleichung $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqq 1$ dargestellt, wo $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=$
türlich den Rand, d. h. die Oberfläche des Ellipsoides bede

$$z = \pm c\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}, \quad \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqq 1\right).$$

So erhalten wir den oberen bez. unteren z-Rand.
beiden Rändern entspricht die Substitution

$$x = a\sin\alpha\cos\beta, \quad y = b\sin\alpha\sin\beta$$

mit dem transformirten Gebiete

$$G \equiv [0 \leqq \alpha \leqq \pi, \quad 0 < \beta < 2\pi]$$

$$z = \pm c\sqrt{1-\frac{a^2\sin^2\alpha\cos^2\beta}{a^2} - \sin^2\alpha\sin^2\beta} = c\cos\alpha,$$

$$J(u,v)=\frac{\partial x}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial y}{\partial \beta}-\frac{\partial x}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial x}{\partial \alpha}=a\,b\sin\alpha\cos\alpha,$$

ıss

$$I=a\,b\,c\iint\limits_{(G)}\sin\alpha\cos^2\alpha\,d\alpha\,d\beta,$$

ıs ohne Weiteres $I=\frac{4}{3}\,a\,b\,c\,\pi$ folgt, die bekannte Volums-l für das Ellipsoid.

So sehen wir die große Verwendbarkeit dieser Formel (I) des ı'schen Satzes in vielen Beispielen, die sich dadurch sehr h lösen lassen, und so wollen wir denn auch noch die beiden en Seiten des Satzes etwas näher beleuchten, nämlich einerseits all, dass es eine Function $G(x,y,z)$ gibt, dass $\frac{\partial G}{\partial y}=f(x,y,z)$ nd anderseits den Fall, dass eine Function $H(x,y,z)$ vor-n ist, wofür $\frac{\partial H}{\partial x}=f(x,y,z)$ ist. Je nachdem das eine oder ndere eintrifft, sagt man, das Integrationsgebiet F sei nach x darstellbar, während man im ersten schon früher behan-Falle das Integrationsgebiet F nach z darstellbar heißt. ei also wieder $f(x,y,z)$ eindeutig und stetig im ganzen Ge-F oder doch nur in einer endlichen Anzahl von Punkten ewöhnlichen Linien unstetig, und sei

$$\frac{\partial G}{\partial y}=f(x,y,z)\;[\text{bez.}\;\frac{\partial H}{\partial x}f(x,y,z)],$$

ilt man analog obiger Ableitung außer der Formel (I) noch ndere, nämlich

$$I=\sum_{p=1}^{m_2}\iint\limits_{(\Phi_{2,p})}G(\varphi_{2,p},\psi_{2,p},\chi_{2,p})\,J_{2,p}(u,v)\,du\,dv$$

$$I=\sum_{p=1}^{m_1}\iint\limits_{(\Phi_{1,p})}H(\varphi_{1,p},\psi_{1,p},\chi_{1,p})\,J_{1,p}(u,v)\,du\,dv,$$

$$J_{2,p}(u,v)=\frac{\partial \chi}{\partial u}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v}-\frac{\partial \chi}{\partial v}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial u}$$

$$J_{1,p}(u,v)=\frac{\partial \psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial v}-\frac{\partial \psi}{\partial v}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial u}$$

Diese drei Integrale (*I*), (*II*) und (*III*) werden sich i gemeinen nicht über die nämlichen Ränder des ursprün Integrationsgebietes F erstrecken. Nur für jene Gebiete die jeder z-Rand in der Darstellung des Gebietes nach y Rand und in jener des Gebietes nach x als x-Rand auftr umgekehrt, sind es dieselben Ränder, auf die sich die dre grale beziehen. Dies ist z. B. der Fall, wenn die z- als die x-Ränder je für sich den gesammten Rand des Gebietes machen.

Ehe wir weitergehen, möge die Bemerkung platzgreife man die Integrale I, II und III formell so erweitert denke dass sie sich auf den ganzen Rand des Gebietes F erstreck

Wie wir gesehen haben, erstreckt sich die Integratio alle Theilgebiete $F_{3,r}$, welche folgende Ränder haben:

$$(A)\quad \begin{cases} [a \leqq x \leqq a', \quad \omega(x) \leqq y \leqq \omega'(x), \quad z = \rho(x,y)] \\ [a \leqq x \leqq a', \quad \omega(x) \leqq y \leqq \omega'(x), \quad z = \rho'(x,y)] \end{cases}$$

$$(B)\quad \begin{cases} [a \leqq x \leqq a', \quad y = \omega(x), \quad \rho(x,\omega(x)) \leqq z \leqq \rho'(x,\omega(x)) \\ [a \leqq x \leqq a', \quad y = \omega'(x), \quad \rho(x,\omega'(x)) \leqq z \leqq \rho'(x,\omega'(x)) \end{cases}$$

$$(C)\quad \begin{cases} [x = a, \quad \omega(a) \leqq y \leqq \omega'(a), \quad \rho(a,y) \leqq z \leqq \rho'(a,y) \\ [x = a', \quad \omega(a') \leqq y \leqq \omega'(a), \quad \rho(a',y) \leqq z \leqq \rho'(a',y) \end{cases}$$

Wie wir gesehen haben, erstreckt sich das Integral I n die Ränder (*A*). Dies kann aber auch, falls F auch noch w Ränder von der Form (*B*) oder (*C*) enthält, formell auch a ausgedehnt werden, ohne dadurch eine Änderung des W erleiden. Dies ist leicht einzusehen. Transformirt man die (*B*) und (*C*) durch irgend eine Substitution α, β und fügt diese Ränder sich ergebenden transformirten Integrale zur Seite von I hinzu, so ändert sich dadurch dies nicht, da hinzugekommenen Integrale verschwinden, indem darin $J_{3,p}$ denn für die Ränder (*C*) ist x constant, daher $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial v} =$ $J_{3,p} = 0$. Für die Ränder (*B*) hingegen ist y eine Functio weshalb $\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial u}$; $\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}$; daher ist wieder $J_{3,p} =$ $-\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = 0$.

Wir können also in den Integralen I, II und III di formation über alle wirklichen Ränder von F erstreckt dass jedes $\sum_{p=1}^{m_3} \Phi_{3,p}$, jedes $\sum_{p=1}^{m_2} \Phi_{2,p}$, und endlich jedes $\sum_{p=1}^{m_1} \Phi_{1,1}$ sammten Rande von F entspricht. Dann ist aber leicht zu e

die $\varphi_{1,p}$; $\psi_{1,p}$; $\chi_{1,p}$; $\varphi_{2,p}$; $\psi_{2,p}$, $\chi_{2,p}$, endlich $\varphi_{3,p}$, $\psi_{3,p}$, $\chi_{3,p}$ nämlichen x, y und z sind.

Können wir also ein einfaches Gebiet Φ oder allgemeiner eine Summe von Gebieten $\Phi_s (s = 1 \ldots m)$ der Variabeln u, v finden, für welche diese Bedingungen für I, II und III zugleich erfüllt sind, so ist

$$\sum_{s=1}^{m} \iint_{(\Phi_s)} H(\varphi_s, \psi_s, \chi_s) J_{1,s}(u,v)\, du\, dv = \sum_{s=1}^{m} \iint_{(\Phi_s)} G(\varphi_s, \psi_s, \chi_s) J_{2,s}\, du\, dv =$$

$$= \sum_{s=1}^{m} \iint_{(\Phi_s)} F(\varphi_s, \psi_s, \chi_s) J_{3,s}\, du\, dv.$$

Daher finden wir

$$I = \frac{1}{3} \sum_{s=1}^{m} \iint_{(\Phi_s)} \{H J_{1,s} + G J_{2,s} + F J_{3,s}\}\, du\, dv,$$

es dann ersichtlich ist

$$I = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{m} \iint_{(\Phi_s)} \begin{vmatrix} H, & G, & F \\ \frac{\partial \varphi_s}{\partial u}, & \frac{\partial \psi_s}{\partial u}, & \frac{\partial \chi_s}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_s}{\partial v}, & \frac{\partial \psi_s}{\partial v}, & \frac{\partial \chi_s}{\partial v} \end{vmatrix} du\, dv,$$

$J_{3,s} + G J_{2,s} + H J_{1,s}$ nichts anderes ist als die eben angegebene Determinante.

Diese Gleichung (IV) zeigt uns die Green'sche Randintegration in symmetrischer Form.

Wir wollen nun diese Relation (IV) anwenden auf die allgemeine Cubaturformel:

Für $f(x, y, z) = 1$ ist, wie wir früher (S. 92) gesehen haben, $H(x, y, z) = x$, $G(x, y, z) = y$, $F(x, y, z) = z$, also hat man nach (IV) neben $\mathfrak{K} = \iiint_{(\mathfrak{K})} dx\, dy\, dz$ auch die Formel

$$\mathfrak{K} = \frac{1}{3} \sum_{s=1}^{m} \iint_{(\Phi_s)} \begin{vmatrix} \varphi_s, & \psi_s, & \chi_s \\ \frac{\partial \varphi_s}{\partial u}, & \frac{\partial \psi_s}{\partial u}, & \frac{\partial \chi_s}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_s}{\partial v}, & \frac{\partial \psi_s}{\partial v}, & \frac{\partial \chi_s}{\partial v} \end{vmatrix} du\, dv,$$

eine Formel für den Cubikinhalt eines Körpers, die auf analytischem Wege abgeleitet wurde ohne Zuhilfenahme de metrischen Calculs.

Diese Formel stimmt denn auch mit obiger früher gefun Cubaturformel überein, wie J. A. Gmeiner in diesen M heften VI. (1895), pag. 317 ff. auch nachgewiesen hat.

Transformation der eigentlichen dreifachen Integrale Einführung dreier neuer Integrationsveränderliche

§ 14. Wir gehen nun über zu einem der wichtigsten dieser Abhandlung, nämlich zur Transformation der eigen dreifachen Integrale. Die Tranformation ist besonders für d rechnung der Tripelintegrale wichtig, indem sie auch no andere als auf die ursprünglich möglichen Weisen die Verwa in ein dreimaliges Integral gestattet. Diese Transformatio sich ausführen nach folgendem Satze:

Satz: „Verstehen wir unter $\varphi(u, v, w)$, $\psi(u, v, w)$, $\chi($ drei eindeutige Functionen der Veränderlichen u, v, w, so diese u, v, w so beschaffen sein, dass, wenn wir ihnen den in lichen gelegenen von gewöhnlichen Oberflächen begrenzten Kö im Raume mit den Coordinatenaxen U, V, W zuweisen, die der x, y und z, die wir aus den Gleichungen

$$x = \varphi(u, v, w),\ y = \psi(u, v, w),\ z = \chi(u, v, w)$$

als diesen u, v, w entsprechend entnehmen, im (x, y, z) Rau ebenfalls von gewöhnlichen Oberflächen begrenzte Gebiet vorgegebenen eigentlichen dreifachen Integrals

$$I = \iiint_{(\mathfrak{R})} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

einmal beschreiben oder mit anderen Worten, wir nehmen a jedem Wertsysteme u, v, w ein Wertsystem x, y, z entsprech auch umgekehrt, dass jedem Systeme x, y, z ein System u, v spreche und für Punkte u, v, w innerhalb Φ nur dieses eine Bezüglich der Begrenzung, d. h. Oberfläche von $\mathfrak{R}$ muss ke deutiges Entsprechen stattfinden, es können vielmehr einem x, y, z der Oberfläche von $\mathfrak{R}$ mehrere, ja unendlich viele systeme u', v', w' entsprechen."

Voraussetzen wollen wir noch weiter, dass bei jedem u, v, w des Gebietes Φ sowohl im Innern als an der Ob desselben sowohl die Functionen

$$\varphi(u, v, w),\ \psi(u, v, w),\ \chi(u, v, w)$$

als ihre partiellen Differentialquotienten I. Ordnung nach u,

sind in Bezug auf u, v und w, und dass die Functional-minante

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u}, & \frac{\partial \psi}{\partial u}, & \frac{\partial \chi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v}, & \frac{\partial \psi}{\partial v}, & \frac{\partial \chi}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial w}, & \frac{\partial \psi}{\partial w}, & \frac{\partial \chi}{\partial w} \end{vmatrix}$$

alb Φ ihr Zeichen nicht wechselt und höchstens in einzelnen en verschwindet.

„Dann ist

$$\iota \iiint_{(\Phi)} f[\varphi(u,v,w),\ \psi(u,v,w),\ \chi(u,v,w)]\, J(u,v,w)\, du\, dv\, dw,$$

lieselbe Bedeutung hat wie an derselben Stelle in der Lehre oppelintegrale, nämlich $+1$ oder -1 und hier so zu wählen ss das Product $\iota J(u,v,w)\, du\, dv\, dw$ im Zeichen mit $\mathfrak{R}$, d. h. $dy\, dz$ übereinstimmt."

Nun hat $du\, dv\, dw$ das Zeichen von Φ:

$$\operatorname{sign} du\, dv\, dw = \operatorname{sign} \Phi,$$

b $\operatorname{sign} \iota J(u,v,w) \cdot \Phi = \operatorname{sign} \mathfrak{R}$ ist, wo $\mathfrak{R}$ und Φ die Zahlen tsprechenden Körpers bedeuten. Daraus folgt, dass, wenn das Zeichen von $\mathfrak{R} \cdot J(u,v,w)$ geben, dann $\iota = +1$ zu ist.

Beweis: Um nun diesen Satz zu beweisen, gehen wir anfangs nliche Weise vor wie bei früheren anderen Gelegenheiten. as Gebiet Φ sei zwischen den Abscissen (α, α'), den Ordinaten nd endlich den Applicaten γ und γ' gelegen. Theilen wir s Intervall (α, α') in n Theile, so dass

$$\alpha' - \alpha = d_1 + d_2 \ldots + d_n$$

ner das Intervall zwischen β und β' in m und das Intervall n p Theile, dass also

$$\beta' - \beta = e_1 + e_2 + \ldots + e_m$$
$$\gamma' - \gamma = f_1 + f_2 + \ldots + f_p$$

$\alpha,\ \alpha_1 = \alpha + d_1,\ \alpha_2 = \alpha_1 + d_2, \ldots \alpha' = \alpha_n = \alpha_{n-1} + d_n,$
$\beta,\ \beta_1 = \beta + e_1,\ \beta_2 = \beta_1 + e_2, \ldots \beta' = \beta_m = \beta_{m-1} + e_m,$
$\gamma,\ \gamma_1 = \gamma + f_1,\ \gamma_2 = \gamma_1 + f_2, \ldots \gamma' = \gamma_p = \gamma_{p-1} + f_p.$

ir construiren nun im Raume mit den Axen X, Y, Z, den z als (x, y, z) Raum bezeichnen wollen, während wir den

mit den Axen U, V, W kurz (u, v, w) Raum benennen das Sy
von Flächen

$$x = \varphi(\alpha_r, v, w),\ y = \psi(\alpha_r, v, w),\ z = \chi(\alpha_r, v, w)\ (r = 1, 2 \ldots$$

wobei u constant gleich einem der Werte $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n$ ist und f
das System von Flächen

$$x = \varphi(u, \beta_s, w),\ y = \psi(u, \beta_s, w),\ z = \chi(u, \beta_s, w)\ (s = 1 \ldots$$

wobei v constant einer der $(m+1)$ Werte $\beta_0, \beta_1 \ldots, \beta_m$ ist,
endlich construiren wir eine dritte Flächenschar, indem wir w co
lassen und zwar gleich einem der Werte $\gamma_0, \gamma_1 \ldots \gamma_p$ nämlic
Schar

$$x = \varphi(u, v, \gamma_t),\ y = \psi(u, v, \gamma_t),\ z = \chi(u, v, \gamma_t)\ (t = 1, 2 \ldots$$

Der Kürze halber wollen wir die ersteren als u-, die zw
als v- und endlich die letzten als w-Flächen bezeichnen.

Diese u, v, w-Flächen werden sich schneiden und von
Schnittpunkten je einer u-Fläche mit einer v und w-Fläche
höchstens einer innerhalb des Gebietes $\mathfrak{R}$.

Bezeichnen wir

$$\varphi(\alpha_r, \beta_s, \gamma_t) = a_{r,s,t},\ \psi(\alpha_r, \beta_s, \gamma_t) = b_{r,s,t},\ \chi(\alpha_r, \beta_s, \gamma_t) = c_{r,s}$$

und den Punkt des Körpers $\mathfrak{R}$, der diese Coordinaten hat
$A_{r,s,t}$, so betrachten wir die von ebenen Flächen begrenzten
eckigen Polyeder

$$(1)\qquad \begin{matrix} A_{r-1,s-1,t-1},\ A_{r,s-1,t-1},\ A_{r,s,t-1},\ A_{r-1,s,t-1}, \\ A_{r,s-1,t},\ A_{r,s,t},\ A_{r-1,s,t},\ A_{r-1,s-1,t}, \end{matrix}$$

zu denen Punkte von $\mathfrak{R}$ gehören. Sie erfüllen das Gebiet
zwar convergirt ein jedes von ihnen bei unbegrenzter Abn
der bezüglichen d_r, e_s und f_t zur Null.

Diese Polyeder (1) wollen wir nun im Folgenden berec
Zu diesem Zwecke wollen wir unter M, M^{I}, M^{II}, M^{III}, M^{IV}
M^{VI}, M^{VII}, die Punkte des (x, y, z)-Raumes verstehen mit f
den Coordinaten

$$\begin{array}{lll}
M & \ldots x = \varphi(u, v, w); & y = \psi(u, v, w); \\
M^{\mathrm{I}} & \ldots x_1 = \varphi(u+d, v, w); & y_1 = \psi(u+d, v, w); \\
M^{\mathrm{II}} & \ldots x_2 = \varphi(u, v+e, w); & y_2 = \psi(u, v+e, w); \\
M^{\mathrm{III}} & \ldots x_3 = \varphi(u, v, w+f); & y_3 = \psi(u, v, w+f); \\
M^{\mathrm{IV}} & \ldots x_4 = \varphi(u+d, v+e, w); & y_4 = \psi(u+d, v+e, w \\
M^{\mathrm{V}} & \ldots x_5 = \varphi(u+d, v, w+f); & y_5 = \psi(u+d, v, w+ \\
M & \ldots x_6 = \varphi(u, v+e, w+f); & y_6 = \psi(u, v+e, w+ \\
M^{\mathrm{VII}} & x_7 = \varphi(u+d, v+e, w+f); & y_7 = \psi(u+d, v+e, w
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
z &= \chi(u, v\, w),\\
z_1 &= \chi(u+d, v, w),\\
z_2 &= \chi(u, v+e, w),\\
z_3 &= \chi(u, v, w+f),\\
z_4 &= \chi(u+d, v+e, w),\\
z_5 &= \chi(u+d, v, w+f),\\
z_6 &= \chi(u, v+e, w+f),\\
z_7 &= \chi(u+d, v+e, w+f).
\end{aligned}
$$

Denken wir uns nun das achteckige Polyeder $M^{IV}\, M^{VII}\, M^{VI}$ $M^{I}\, M^{V}\, M^{III}\, M$ construirt (Fig. 18), so ist

$$
\begin{aligned}
M^{VII}\, M^{VI}\, M^{II}\, M^{I}\, M^{V}\, M^{III}\, M = {} & M^{II}\, M^{IV}\, M^{VI}\, M\, M^{I}\, M^{III} + \\
& + M^{VI}\, M^{IV}\, M^{VII}\, M^{III}\, M^{I}\, M^{V},
\end{aligned}
$$

wobei unter Berücksichtigung des Zeichens wie auch das Folgende nur mit dem Zeichen zu verstehen ist.

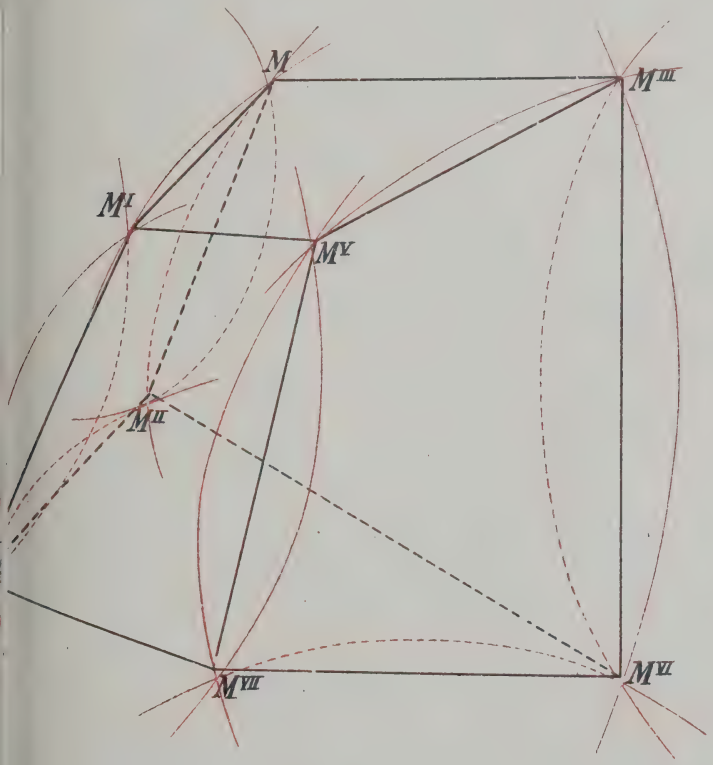


Fig. 18.

Nun ist

$$M^{II}M^{IV}M^{VI}MM^{I}M^{III} = M^{IV}M^{VI}M^{II}M^{III} + M^{III}M^{IV}M$$
$$+ M^{IV}M^{III}MM^{I}$$
$$M^{VI}M^{IV}M^{VII}M^{III}M^{I}M^{V} = M^{VI}M^{IV}M^{VII}M^{I} + M^{I}M^{VI}M^{V}M$$
$$+ M^{VI}M^{I}M^{V}M^{III}.$$

Es handelt sich also jetzt um die Berechnung dieser Tetraeder. Sei nun u' ein beliebiger Wert im Intervalle $(u, u$ v' ein im Intervalle $(v, v+e)$ und endlich w' ein solcher zwi w und $w+f$, so ist

$$(2)\quad \begin{cases} x_1 = x + \left[\frac{\partial\varphi}{\partial u'} + \rho\ (d)\right]d; \quad x_2 = x + \left[\frac{\partial\varphi}{\partial v'} + \sigma'\ (e)\right] \\ x_3 = x + \left[\frac{\partial\varphi}{\partial w'} + \tau\ (f)\right]f; \\ y_1 = y + \left[\frac{\partial\psi}{\partial u'} + \rho'\ (d)\right]d; \quad y_2 = y + \left[\frac{\partial\psi}{\partial v'} + \sigma'\ (e)\right] \\ y_3 = y + \left[\frac{\partial\psi}{\partial w'} + \tau'\ (f)\right]f \\ z_1 = z + \left[\frac{\partial\chi}{\partial u'} + \rho''(d)\right]d; \quad z_2 = z + \left[\frac{\partial\chi}{\partial v'} + \sigma''(e)\right] \\ z_3 = z + \left[\frac{\partial\chi}{\partial w'} + \tau''(f)\right]f, \end{cases}$$

wobei ρ, ρ', ρ'' zugleich mit d, $\sigma, \sigma', \sigma''$ mit e und endlich τ, zugleich mit f zur Null convergiren gleichmäßig für alle u, v, w des Gebietes Φ.

Dies ist leicht zu sehen, denn nach dem Mittelwertsat z. B.

$$x_1 - x = \varphi'_u(u + \Theta d, v, w)d \quad (0 < \Theta > 1),$$

woraus nach (2) folgt

$$\rho(d) = \varphi'_u(u + \Theta d, v, w) - \varphi'_u(u', v', w').$$

Nun ist aber $\varphi'_u(u, v, w)$ im ganzen Gebiete Φ mit Eins dessen Grenzen stetig, d. h es entspricht jeder positiven Zahl ein $\delta > 0$ so, dass, wenn (u'', v'', w'') und (u', v', w') irgend Punkte von Φ sind für die $|u'' - u'| < \delta$, $|v'' - v' <$ $|w'' - w'| < \delta$ ist,

$$|\varphi'_u(u'', v'', w'') - \varphi'_u(u', v', w')| < \varepsilon$$

ist. Nun aber ist $|u + \Theta d - u'|$ sicher kleiner als $|d|$ und e $|v' - v| < |e|$ und $|w' - w| < |f|$, weshalb wir, wenn sowol als $|e|$ und $|f|$ kleiner als δ gewählt werden, dann sicher $|\rho(d)$

us immer für Punkte u, v, w des Gebietes Φ genommen werden . Ebenso zeigt man auch, dass $\lim_{e=0} \sigma(e) = \lim_{e=0} \sigma'(e) = \lim_{e=0} \sigma''(e) = 0$,

$f) = \lim_{f=0} \tau'(f) = \lim_{f=0} \tau''(f) = 0$ und ebenso, dass $\lim_{d=0} \rho'(d) =$

$\rho''(d) = \lim_{d=0} \rho(d) = 0$ ist.

Weiter gelangt man zu folgenden Formeln:

$$x_4 = x_1 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial v'} + \Sigma\ (d, e)\right] e = x_2 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u'} + P\ (d, e)\right] d$$

$$y_4 = y_1 + \left[\frac{\partial \psi}{\partial v'} + \Sigma'\ (d, e)\right] e = y_2 + \left[\frac{\partial \psi}{\partial u'} + P'\ (d, e)\right] d$$

$$z_4 = z_1 + \left[\frac{\partial \chi}{\partial v'} + \Sigma''(d, e)\right] e = z_2 + \left[\frac{\partial \chi}{\partial u'} + P''(d, e)\right] d$$

$$x_5 = x_1 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial w'} + T\ (d, f)\right] f = x_3 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u'} + I\ (d, f)\right] d$$

$$y_5 = y_1 + \left[\frac{\partial \psi}{\partial w'} + T'\ (d, f)\right] f = y_3 + \left[\frac{\partial \psi}{\partial u'} + I'\ (d, f)\right] d$$

$$z_5 = z_1 + \left[\frac{\partial \chi}{\partial w'} + T''(d, f)\right] f = z_3 + \left[\frac{\partial \chi}{\partial u'} + I''(d, f)\right] d$$

$$x_6 = x_2 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial w'} + K\ (e, f)\right] f = x_3 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial v'} + \Lambda\ (e, f)\right] e$$

$$y_6 = y_2 + \left[\frac{\partial \psi}{\partial w'} + K'\ (e, f)\right] f = y_3 + \left[\frac{\partial \psi}{\partial v'} + \Lambda'\ (e, f)\right] e$$

$$z_6 = z_2 + \left[\frac{\partial \chi}{\partial w'} + K''(e, f)\right] f = z_3 + \left[\frac{\partial \chi}{\partial v'} + \Lambda''(e, f)\right] e$$

$$x_4 = x_4 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial w'} + M\ (d, e, f)\right] f = x_5 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial v'} + N\ (d, e, f)\right] e =$$
$$= x_6 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u'} + \Omega\ (d, e, f)\right] d$$

$$y_4 = y_4 + \left[\frac{\partial \psi}{\partial w'} + M'\ (d, e, f)\right] f = y_5 + \left[\frac{\partial \psi}{\partial v'} + N'\ (d, e, f)\right] e =$$
$$= y_6 + \left[\frac{\partial \psi}{\partial u'} + \Omega'\ (d, e, f)\right] d$$

$$z_4 = z_4 + \left[\frac{\partial \chi}{\partial w'} + M''(d, e, f)\right] f = z_5 + \left[\frac{\partial \chi}{\partial v'} + N''(d, e, f)\right] e =$$
$$= z_6 + \left[\frac{\partial \chi}{\partial u'} + \Omega''(d, e, f)\right] d,$$

e diese Zahlen $\Sigma, \Sigma', \Sigma'', P, P', P'', T, T', T'', I, I', I''$,

ebenso K, K', K'', Λ, Λ' Λ'', M, M', M'', N, N', N'', Ω, Ω', $\lim d = 0$, $\lim e = 0$, $\lim f = 0$ gleichmäßig für alle Punkte von Φ zur Null convergiren.

Nun ist

$$6\,M^{\mathrm{IV}}\,M^{\mathrm{VI}}\,M^{\mathrm{II}}\,M^{\mathrm{III}} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_4-x_2,\ x_6-x_2,\ x_3-x_2 \\ y_4-y_2,\ y_6-y_2,\ y_3-y_2 \\ z_4-z_2,\ z_6-z_2,\ z_3-z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_4-x_2,\ x_6-x_2,\ (x_3-x)+(x- \\ y_4-y_2,\ y_6-y_2,\ (y_3-y)+(y- \\ z_4-z_2,\ z_6-z_2,\ (z_3-z)+(z- \end{vmatrix}$$

$$= 0 + \begin{vmatrix} x_4-x_2,\ x_2-x,\ x_6-x_2 \\ y_4-y_2,\ y_2-y,\ y_6-y_2 \\ z_4-z_2,\ z_2-z,\ z_6-z_2 \end{vmatrix} = [J(u', v', w') + R(d, e, f)]\,o$$

$$6\,M^{\mathrm{III}}\,M^{\mathrm{IV}}\,M\,M^{\mathrm{II}} = \begin{vmatrix} x_3-x_2,\ x_4-x_2,\ x_2-x \\ y_3-y_2,\ y_4-y_2,\ y_2-y \\ z_3-z_2,\ z_4-z_2,\ z_2-z \end{vmatrix} =$$

$$= [J(u', v', w') + S(d, e, f)\,d.e.f$$

$$6\,M^{\mathrm{IV}}\,M^{\mathrm{III}}\,M\,M^{\mathrm{I}} = \begin{vmatrix} x_4-x_1,\ x_3-x_1,\ x_1-x \\ y_4-y_1,\ y_3-y_1,\ y_1-y \\ z_4-z_1,\ z_3-z_1,\ z_1-z \end{vmatrix} =$$

$$= [J(u', v', w') + T(d, e, f)]\,d.c.f.$$

Jetzt erübrigt noch die Berechnung der drei übrigen Te in die das Polyeder $M^{\mathrm{VI}}\,M^{\mathrm{IV}}\,M^{\mathrm{VII}}\,M^{\mathrm{III}}\,M^{\mathrm{I}}\,M^{\mathrm{V}}$ zerlegt ist.

$$6M^{\mathrm{VI}}M^{\mathrm{IV}}M^{\mathrm{VII}}M^{\mathrm{I}} = \begin{vmatrix} x_6-x_7, x_4-x_7, x_1-x_7 \\ y_6-y_7, y_4-y_7, y_1-y_7 \\ z_6-z_7, z_4-z_7, z_1-z_7 \end{vmatrix} = [J(u'v'w') + U(d,$$

$$6M^{\mathrm{I}}M^{\mathrm{VI}}M^{\mathrm{V}}M^{\mathrm{VII}} = \begin{vmatrix} x_7-x_1, x_7-x_6, x_7-x_5 \\ y_7-x_1, y_7-y_6, y_7-y_5 \\ z_7-z_1, z_7-z_6, z_7-z_5 \end{vmatrix} = [J(u'v'w') + V(d,$$

$$6M^{\mathrm{VII}}M^{\mathrm{I}}M^{\mathrm{V}}M^{\mathrm{III}} = \begin{vmatrix} x_6-x_3, x_3-x_1, x_5-x_3 \\ y_6-y_3, y_3-y_1, y_5-y_3 \\ z_6-z_3, z_3-z_1, z_5-z_3 \end{vmatrix} = [J(u'v'w') + W(d$$

Jetzt haben wir diese sechs Tetraeder zu addiren, Volumen des achteckigen Polyeders $M^{\mathrm{IV}}\,M^{\mathrm{VII}}\,M^{\mathrm{VI}}\,M^{\mathrm{II}}\,M^{\mathrm{I}}\,M$ zu erhalten.

$$M^{\text{VII}} M^{\text{VI}} M^{\text{II}} M^{\text{I}} M^{\text{V}} M^{\text{III}} M = [6 J(u' v' w') + R(d, e, f) +$$
$$e, f) + T(d, e, f) + U(d, e, f) + V(d, e, f) + W(d, e, f)] d e f.$$

$$M^{\text{IV}} M^{\text{VII}} M^{\text{VI}} M^{\text{II}} M^{\text{I}} M^{\text{V}} M^{\text{III}} M =$$
$$= \left\{ J(u' v' w') + \frac{1}{6} [R + S + T + U + V + W] \right\} d e f.$$

lier sind nun R, S, T, U, V, W ganze Functionen von be-
$\rho, \rho', \rho'', \sigma, \sigma', \sigma'', \tau, \tau', \tau'', \Sigma, \Sigma', \Sigma''$, P, P′, P″, T, T′, T″, I, I′, I″,
$\Lambda, \Lambda', \Lambda''$, M, M′, M″, N, N′, N″, $\Omega, \Omega', \Omega''$ [z. B. $R(d, e, f)$
anze Function ohne constantes Glied von P, P′, P″, $\sigma, \sigma', \sigma''$,
Λ''] ohne constantes Glied. Da ist nun klar, dass auch
U, V, W, somit auch $\frac{1}{6} [R + S + T + U + V + W]$ bei
$= 0$, lim $e = 0$ und lim $f = 0$ gleichmäßig zur Null con-
n für alle Punkte von Φ, d. h. jedem $\varepsilon > 0$ lässt sich eine
s positive Zahl δ so zuordnen, dass

$$f) + S(d, e, f) + T(d, e, f) + U(d, e, f) + V(d, e, f) + W(d, e, f)| < \varepsilon$$

n nur $|d|$, $|e|$ und $|f|$ kleiner als δ sind, mag (u, v, w)
ner für ein Punkt von Φ sein.

us (7) ersehen wir, dass, wenn $J(u, v, w)$ nicht verschwindet,
teckige Polyeder $M^{\text{IV}} M^{\text{VII}} M^{\text{VI}} M^{\text{II}} M^{\text{I}} M^{\text{V}} M^{\text{III}} M$ bei ge-
leinem $|d|$, $|e|$ und $|f|$ das Zeichen von $J(u, v, w)$.
das sich innerhalb Φ nicht ändert, hat. Damit also M^{IV}
$^{\text{VI}} M^{\text{II}} M^{\text{I}} M^{\text{V}} M^{\text{III}} M$ und damit auch der Körper Φ mit
bezeichnet werde, muss man $M^{\text{IV}} M^{\text{VII}} M^{\text{VI}} M^{\text{II}} M^{\text{I}} M^{\text{V}} M^{\text{III}} M$
t $\iota = \pm 1$ multipliciren.

i nun $\omega_{r,s,t}$ das mit ι multiplicirte Polyeder (1), wo u_r
einen Wert des Intervalles (α_{r-1}, α_r); v_s einen beliebigen
rischen β_{s-1} und β_s und endlich w_t irgend einen Wert im
e $(\gamma_{p-1}\, \gamma_p)$ bedeutet, und setzen wir

$$\varphi(u_r, v_s, w_t) = x_{r,s,t}$$
$$\psi(u_r, v_s, w_t) = y_{r,s,t}$$
$$\chi(u_r, v_s, w_t) = z_{r,s,t}$$

$$I = \lim \sum_{r,s,t} f(x_{r,s,t}, y_{r,s,t}, z_{r,s,t})\, \omega_{r,s,t}$$

die Summe auf alle Polyeder $\omega_{r,s,t}$ bezieht, die Punkte
thalten. Darauf wenden wir nun unsere früher gefundene
ür das Volumen eines solchen Polyeders (7) an, indem

wir $u' = u_r, v' = v_s, w' = w_t$ setzen und statt $\frac{1}{6}[R + S + U + V + W]$ bezogen auf $u = \alpha_{r-1}, v = \beta_{s-1}, w = \gamma_{t-1}$ $H_{r,s,t}$ schreiben.

Dann wird

$$\sum_{r,s,t} f(x_{r,s,t}, y_{r,s,t}, z_{r,s,t})\, \omega_{r,s,t} =$$

$$= \iota \sum_{r,s,t} f[\varphi(u_r, v_s, w_t), \psi(u_r, v_s, w_t), \chi(u_r, v_s, w_t)]\, J(u_r, v_s, w_t) \cdot$$

$$+ \iota \sum_{r,s,t} f(x_{r,s,t}, y_{r,s,t}, z_{r,s,t})\, H_{r,s,t}\, d_r e_s f_t.$$

Nun ist aber

$$\lim_{d_r = 0,\ e_s = 0,\ f_t = 0} \sum_{r,s,t} f(x_{r,s,t}, y_{r,s,t}, z_{r,s,t})\, H_{r,s,t}\, d_r e_s f_t = 0 \quad \begin{matrix}(r = 1 \\ (s = 1 \\ (t = 1\end{matrix}$$

Dies ist leicht ersichtlich, wenn man betrachtet $f(x_{r,s,t}, y_{r,s,t}, z_{r,s,t})$ im ganzen Gebiete $\mathfrak{R}$ endlich sein soll,

$$|f(x_{r,s,t}, y_{r,s,t}, z_{r,s,t})| < C,$$

und dass früher gezeigt wurde, dass, wenn sowohl $|d_r| <$ $|e_s| < \delta$ und $|f_t| < \delta$ ist,

$$|H_{r,s,t}| < \varepsilon$$

ist. Daher ist obige Summe

$$\left|\sum_{r,s,t} f(x_{r,s,t}, y_{r,s,t}, z_{r,s,t})\, H_{r,s,t}\, d_r e_s f_t\right| < C \cdot \varepsilon \sum_{r,s,t} |d_r e_s f_t|$$

$$\leqq C \cdot \varepsilon\, |\alpha' - \alpha| \cdot |\beta' - \beta| \cdot$$

Es besteht also die Formel

$$I = \lim_{d_r = 0,\ e_s = 0,\ f_t = 0} \iota \sum_{r,s,t} f\{\varphi(u_r, v_s, w_t), \psi(u_r, v_s, w_t), \chi(u_r, v_s, w$$

$$J(u_r, v_s, w_t)$$

Nach Früherem besagt dies, dass die Function

$$f\{\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)\}$$

ein dreifaches Integral über Φ besitzt, das wir so ange haben, dass es mit jeder Parallelen zu den drei Coordinatenax und Z höchstens eine bestimmte Anzahl von Punkten geme

Daher können wir schreiben:

$$\pm \iiint_{(\mathfrak{P})} f\{\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w), \chi(u,v,w)\} J(u,v,w)\, du\, dv\, dw.$$

ei z. B. $f(x,y,z) = 1$, so erhalten wir eine andere Form Körperzahl

$$\iiint_{(\mathfrak{K})} dx\, dy\, dz = \pm \iiint_{(\mathfrak{P})} J(u,v,w)\, du\, dv\, dw.$$

uch hier ist noch zu bemerken, dass auch bei dreifachen len das Integral manchmal zerlegt werden muss vor Ein- neuer Integrationsveränderlichen.

lere Substitutionen für die Integrationsveränderlichen x, y und z in einem dreifachen Integrale.

15. Wir wollen nun einige besondere Substitutionen er-, die einiges Interesse bieten:

Die erste bestehe in Folgendem:

s hänge x bloß von u, y nur von v und endlich z nur von lso

$$x = \varphi(u),\ y = \psi(v),\ z = \chi(w),$$

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u}, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{\partial \psi}{\partial v}, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{\partial \chi}{\partial w} \end{vmatrix} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial w}.$$

bei ist jedoch zu bemerken, dass es keineswegs hinreichend $J(u,v,w)$ innerhalb des Integrationsgebietes Φ sein Zeichen chselt, sondern es darf weder $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ noch $\frac{\partial \psi}{\partial v}$ und $\frac{\partial \chi}{\partial w}$ sein innerhalb Φ wechseln. Dass dem so sein muss, ist leicht ; denn gäbe es im Innern von Φ einen solchen Punkt , an dem das Äußerste eintritt, dass nämlich für $u = u_0$ $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ v_0 $\frac{\partial \psi}{\partial v}$ und endlich für $w = w_0$ $\frac{\partial \chi}{\partial w}$ sein Zeichen wechselt, ächen für diesen extremen Fall einem bestimmten Punkte gar drei Punkte u, v, w von Φ, was wir ja ausgeschlossen

2. Jetzt betrachten wir noch eine ganze lineare Subs für x, y und z:

$$x = \alpha u + \beta v + \gamma w + \delta$$
$$y = \alpha' u + \beta' v + \gamma' w + \delta'$$
$$z = \alpha'' u + \beta'' v + \gamma'' w + \delta''.$$

Dann ist

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \beta, & \beta', & \beta'' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'' \end{vmatrix},$$

welche zufolge obiger von einander unabhängiger Gleic gewiss von Null verschieden ist.

Wir wollen nun die u-Flächen, d. h. deren Gleichu suchen. Man erhält sie offenbar, wenn man in obigen Gleic v und w eliminirt, d. h. obige Gleichungen nach u auflöst

Da erhält man

$$J(u, v, w).u = \begin{vmatrix} x - \delta, & \beta, & \gamma \\ y - \delta', & \beta', & \gamma' \\ z - \delta'', & \beta'', & \gamma'' \end{vmatrix}.$$

Dies ist offenbar eine Gleichung ersten Grades in x, y also die Gleichung einer Ebene und zwar einer Ebene, die ist zur Ebene

$$\begin{vmatrix} x, & \beta, & \gamma \\ y, & \beta', & \gamma' \\ z, & \beta'', & \gamma'' \end{vmatrix} = 0.$$

Die v-Flächen erhält man analog durch Eliminatio aus den obigen drei Gleichungen. Auch sie sind Ebenen Gleichung

$$J(u, v, w).v = \begin{vmatrix} \alpha, & x - \delta, & \gamma \\ \alpha', & y - \delta', & \gamma' \\ \alpha'', & z - \delta'', & \gamma'' \end{vmatrix},$$

die natürlich parallel sind zur Ebene

$$\begin{vmatrix} \alpha, & x, & \gamma \\ \alpha', & y, & \gamma' \\ \alpha'', & z, & \gamma'' \end{vmatrix} = 0.$$

Die w-Flächen endlich, deren Gleichung durch Eli des w aus den ersten drei Relationen folgt, sind die Eben

$$J(u, v, w)\, w = \begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & x - \delta \\ \alpha', & \beta', & y - \delta' \\ \alpha'', & \beta'', & z - \delta'' \end{vmatrix},$$

rallel sind zur Ebene

$$\begin{vmatrix} \alpha\ , & \beta\ , & x \\ \alpha'\ , & \beta'\ , & y \\ \alpha''\ , & \beta''\ , & z \end{vmatrix} = 0\ .$$

Durch diese drei Scharen paralleler Ebenen wird das Gebiet Parallelepipeden erfüllt, von denen wir natürlich nur jene rachten haben, die in unser Gebiet $\mathfrak{R}$ hineinfallen, und diese lepipede nehmen wir als unsere Elementartheilchen. Das ken wir also durch diese unsere Substitution.

Vie wohl bekannt, entspricht einer allgemeinen linearen Sub- n der Übergang zu einem collinearen Systeme und hier in unseren Falle haben wir es mit dem besonderen Falle der it zu thun. Der (x, y, z) Raum ist eine affine Abbildung des) Raumes.

. Wir gehen nun noch daran zu untersuchen, wie es sich ansformation durch Polarcoordinaten verhält. Wir führen ie gewöhnlichen räumlichen Polarcoordinaten r, Θ, ω ein, so

$$x = r\cos\Theta,\ y = r\sin\Theta\cos\omega,\ z = r\sin\omega\sin\Theta$$

ann wird

$$J(r, \Theta, \omega) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}, & \frac{\partial y}{\partial r}, & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \Theta}, & \frac{\partial y}{\partial \Theta}, & \frac{\partial z}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \omega}, & \frac{\partial y}{\partial \omega}, & \frac{\partial z}{\partial \omega} \end{vmatrix} = r^2\sin\Theta\ .$$

ie Elementartheilchen, in welche durch diese Transforma- ser Gebiet zerfällt, kann man nach (3) leicht bestimmen, man aus den Relationen

$$x = r\cos\Theta,\ y = r\sin\Theta\cos\omega,\ z = r\sin\omega\sin\Theta$$

eichung der r, Θ und ω Flächen aufstellt. Wie dies ge- wird, haben wir bereits früher in (3) ausführlich besprochen. ir lassen vorerst r constant, so erhalten wir

$$x^2 + y^2 + z^2 + r^2,$$

ichung einer Kugel mit dem Mittelpunkte im Coordinaten- nkte. Vorerst bekommen wir also ein System concentrischer

ir $\Theta =$ constant, haben wir $y^2 + z^2 = \frac{x^2}{a^2}$, also eine Schar ptischen Kegeln als Θ-Flächen und diese Kegel haben ihre in Θ und endlich für $\omega =$ constant gilt Ähnliches: $\frac{z}{y} = \operatorname{tg}\omega$.

II. Abschnitt.

Geometrische Anwendung der Tripelintegrale.

§ 1. *A*) Körperzahl.

Bereits im Früheren (S. 38) haben wir die Körperz
finirt und zwar in allgemeinster Weise für einen von
vielen gewöhnlichen Oberflächen begrenzten, im Endliche
genen Körper und als dieselbe das Tripelintegral über $\mathfrak{K}$

$$\iiint_{(\mathfrak{K})} dx\,dy\,dz$$

erklärt. Wie wir auch bereits früher gesehen, lässt sic
durch Einführung dreier neuen Veränderlichen u, v, w, die n
ursprünglichen Variabeln durch die Gleichungen

$$x = \varphi(u, v, w),\ y = \psi(u, v, w),\ z = \chi(u, v, w)$$

zusammenhängen, transformiren in

$$\mathfrak{K} = \iota \iiint_{(\Phi)} J(u, v, w)\,du\,dv\,dw,$$

wo $\iota = \pm 1$ ist.

All dies haben wir bereits früher abgeleitet. Auch
Satz haben wir erinnert, dass die Zahl des aus einer en
Anzahl von Theilen zusammengesetzten Körpers gleich der
der diesen Theilen zukommenden Zahlen ist.

Wenn wir jetzt wiederum auf die Definition der ab
und relativen Körperzahl recurriren, ist dies nicht, um obig
nitionen dem Wortlaute nach zu wiederholen, sondern um
so wichtigen Begriff aufs Genaueste zu präcisiren. Freili
forderte es die logische Behandlung des Stoffes, den Begr
Körperzahl an die Spitze der Abhandlung zu stellen, all
der weiteren Entwicklung nicht zu schaden, ließen wir
bewenden, die äußere und innere Körperzahl durch je
Grenzwert zu definiren.

Jetzt nachdem wir wissen, dass bei unserem Körpe
beiden Grenzwerte einander gleich sind, und dass dieser g
same Grenzwert das dreifache Integral ist, ist es gestattet
Integral als Körperzahl zu definiren. Was noch zu den fr
Bemerkungen über diesen Gegenstand hinzuzufügen ist, ist
zwei congruente Körper $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ die nämlichen Zahlen
denn man kann sie ja vertauschen.

Ferner ist noch, falls ein System schiefwinkliger Coor
XYZ im Raume zugrunde gelegt wird, die rechte Seite vo

$$\mathfrak{R} = \iiint_{(\mathfrak{R})} dx\, dy\, dz$$

n $(\widetilde{x, y, z})$ zu multipliciren, sowie überhaupt alle in recht-
gen Coordinaten abgeleitete Formeln für die Cubatur eines
's. Warum diese Constante $\sin(\widetilde{x, y, z})$, auch der v. Staud'-
Eckensinus genannt, noch hinzukommt, ersieht man leicht
r Formel für den Inhalt eines Parallelepipedes, dessen Be-
ngsflächen zu den jetzigen Coordinatenebenen parallel sind.
nteressant ist auch noch die Formel für den Inhalt eines
einen Prismatoides im n-dimensionalen Raume ausgedrückt
das Euler'sche Integral II. Gattung, der sog. Gamma-
n, die wir auch hier vorführen wollen.
s ist

$$J = \iint \cdots \int_{(n)} dx_1\, dx_2 \cdots dx_n = \prod_{\varkappa=1}^{n} \frac{\alpha_\varkappa}{a_\varkappa} \frac{\prod_{\varkappa=1}^{n} \Gamma\left(\frac{1}{a_\varkappa}\right)}{\Gamma\left(1 + \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{1}{a_\varkappa}\right)}$$

oraussetzung, dass $x_\varkappa > 0$ und $\sum_{\varkappa=1}^{n} \left(\frac{x_\varkappa}{\alpha_\varkappa}\right)^{a_\varkappa} < 1$ ist. Dies ist
rperliche Inhhalt eines Gebietes, das von der $(n-1)$-
Mannigfaltigkeit $\sum_{\varkappa=1}^{n} \left(\frac{x_\varkappa}{\alpha_\varkappa}\right)^{a_\varkappa} = 1$ und von den ebenen Mannig-
iten, die den Coordinatenebenen entsprechen, begrenzt ist;
t der Theil mit nur positiven Coordinaten zu wählen.
iese allgemeine Formel, die sich mittelst mehrfacher Coordi-
nsformationen und mittelst des Euler'schen Integrals II.
und anderer Formeln ergibt (vergl. Kronecker: „Theorie
fachen und vielfachen Integrale") gibt uns in eleganter
die Inhalte einiger von Ebenen und Flächen begrenzten

r uns ist natürlich hauptsächlich der Fall interessant für
Nehmen wir $a_\varkappa = 2$, d. i. eine Fläche II. Ordnung, z. B.
iet, das vom Ellipsoid

$$\left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\alpha_2}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{\alpha_3}\right)^2 = 1$$

drei Coordinatenebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ begrenzt
i. einen Ellipsoidoctanten, so ist

$$J = \iiint_{(E)} dx_1\, dx_3\, dx_3 = \frac{\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3}{2^3} \cdot \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^3}{\Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right)},$$

ebenso wird für $a_\varkappa = 4$

$$J = \frac{\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3}{4^3} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^4}{\Gamma\left(1+\frac{3}{4}\right)} \left(x_\varkappa > 0,\ \sum_{\varkappa=1}^{3} \left(\frac{x_\varkappa}{\alpha_\varkappa}\right)^4 < 1\right).$$

Ebenso erhält man für den Kugeloctanten von

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

$$J = \frac{1}{2^3} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^3}{\Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right)}$$

u. s. w., woraus sich dann unmittelbar die gewöhnlichen F
für die Cubikinhalte dieser Körper ergeben.

Zurückführung der Zahl eines von beliebigen Oberfl
begrenzten Körpers auf ein Doppelintegral.

§ 2. Wir betrachten wieder als unser Integrationsge
den auf S. 70 gezeichneten Körper, der einerseits begrenzt w
zwei zur XZ-Ebene parallelen Ebenen $C_1\, C_2\, J_1\, J_2$ und $C_3\, C$
von den gewöhnlichen Oberflächen $C_1\, C_2\, C_3\, C_4$ und J_1 ..
(zwei Kuppen oben und unten) und $K_1\, L_2\, N_1\, M_1$ und $K_2 L_1$
die von einer parallelen Geraden zur Z- und X-Axe in hö
zwei Punkten geschnitten werden, d. h. jede in je einem I

Dann ist nach S 81

$$\iiint_{(R)} dx\, dy\, dz = \iint_{(f)} dx\, dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} dz = \iint_{(f)} \{\varphi_2(x,y) - \varphi_1(x,y)\}\, dx$$

wo $\mathfrak{F}$ die Fläche $K_1\, L_2\, L_1\, K_2$ in der Fig. 12 bedeutet.

Beispiele: Hieher gehören nun mehrere Beispiele, a
zeigen, wie ein Tripelintegral auf ein Doppelintegral zurück
und dieses dann nach der Methode der Berechnung der I
integrale behandelt wird.

Es ist hier nicht der Ort, alle die Berechnungen d
fachsten Körperinhalte vorzunehmen, sie fallen ja unter die
der Doppelintegrale, sondern wir wollen nur der Vollstän
halber die dort gefundenen Formeln hier anführen.

Das Tetraeder $OABC$, dessen Ecken der Anfangspunkt ordinaten und die Punkte A, B, C auf den Axen OX, OY, l, hat den Inhalt

$$T = \iint_{(OAB)} (c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y)\,dx\,dy,$$

sich dann sofort $\frac{abc}{6}$ ergibt, wo a, b, c die Abschnitte OA, l OC sind.

Der dreiseitige Pfeiler oder primatische Huf, (Fig. 19) der m unbegrenzten, dreiseitigen Prisma besteht, dessen Kanten xe parallel sind, und das durch die Ebene $C'A'B'$ abge-

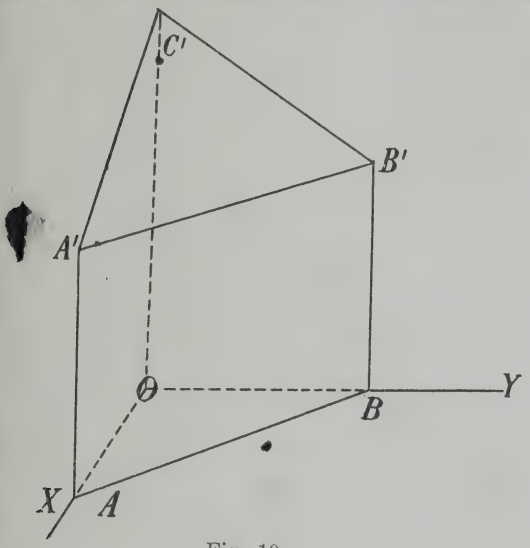


Fig. 19.

wird, hat, wie leicht ersichtlich ist, wenn man die Gleichung e $C'A'B'$

$$+ \frac{c'-c}{a}x + \frac{c''-c}{b}y \quad (c = OC', c' = AA', c'' = BB'$$

en Inhalt

$$\iint_{(AB)} (c + \frac{c'-c}{a}x + \frac{c''-c}{b}y)\,dx\,dy = \frac{ab}{6}(c + c' + c'').$$

one einer Fläche zweiter Ordnung mit einem Mittelpunkte, et wird von zwei zur Ebene zweier Hauptaxen parallelen ig. 20).

Alle Flächen zweiter Ordnung mit einem Mittelpunk Ellipsoid, einschalige und zweischalige Hyperboloid und der elliptische Kegel, haben eine Gleichung, die sich Form

$$z^2 = \alpha x^2 - \beta^2 y^2 + \gamma$$

bringen lässt, wo $\beta = \frac{c}{b}$ ist. Die Vorzeichen von α und γ beliebig sein, dürfen nur nicht beide negativ sein, da s Fläche imaginär würde.

Für das Ellipsoid bekommt man folgende Zeichnung

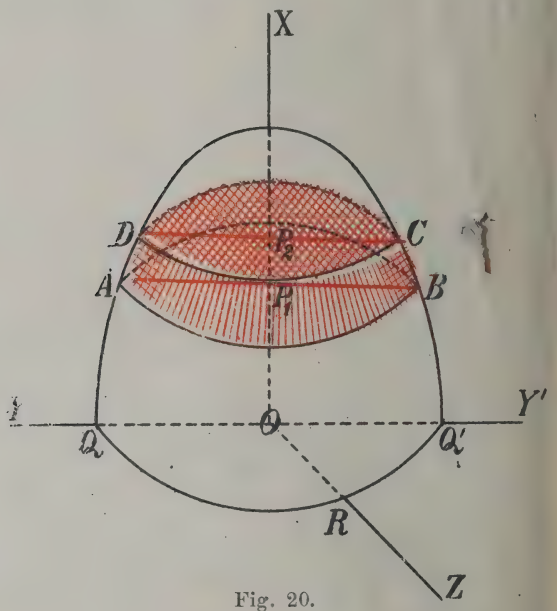


Fig. 20.

$$Z = 2 \iint_{(ADCB)} \sqrt{\alpha x^2 - \beta^2 y^2 + \gamma}\, dx\, dy = \frac{b\,(x_2 - x_1)\,\pi}{3c} \cdot$$

$$\cdot [\alpha\,(x_1^2 + x_1 x_2 + x$$

wo

$$OQ = Q'O = b,\ OR = c,\ OP_1 = x_1,\ OP_2 = x_2$$
$$(-a \leq x_1 < x_2 \leq a)$$

Als besondere Fälle dieser Formel ergeben sich:

a) Die Haube oder Calotte H des Ellipsoides von h, wenn man

Über die Summirung einiger Reihen.

Von Dr. **Max Mandl.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 2. December 1886.)

ɔer besseren Übersicht halber mögen zunächst die Resultate genden Arbeit zusammengestellt werden:

Berechnung des unendlichen Productes:

$= (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})\ldots$ ad. inf.,

ıbleitung einer Reihe und einiger trigonometrischer Formeln aus demselben und

Entwickelung zweier von einander wesentlich verschiedener Recursionsformeln für die Reihen von der Form:

$$S_{2n} = \frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \ldots . \text{ad inf.}$$

nd Aufstellung eines diese Grössen S_{2n} betreffenden Satzes.

1.

er Werth des unendlichen Productes

$$P = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\ldots$$

sich auf folgende Weise:

$$\begin{aligned}(1-x)P &= (1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\ldots \\ &= (1-x^4)(1+x^4)(1+x^8)\ldots \\ &= (1-x^8)(1+x^8)\ldots \\ &= 1-x^\infty.\end{aligned}$$

s unendliche Product ist daher convergent, sobald mod. x l divergent, wenn mod. $x>1$; demnach ist das Conver-

genzgebiet des unendlichen Productes der mit dem Radius um den Nullpunkt beschriebene Kreis. Ist also mod. $x<1$ hat man

$$P=\frac{1}{1-x}$$

und daher die Gleichung:

$$\frac{1}{1-x}=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\ldots\ \text{ad inf.}$$

Durch logarithmische Differentiation dieser Gleichung erhält die Summe einer unendlichen Reihe, nämlich:

$$\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{1+x^2}+\frac{4x^3}{1+x^4}+\ldots$$

oder, wenn man der Symmetrie wegen mit x multiplicirt:

$$\frac{x}{1-x}=\frac{x}{1+x}+\frac{2x^2}{1+x^2}+\frac{4x^4}{1+x^4}+\frac{8x^8}{1+x^8}+\ldots\ \text{ad inf}$$

Das Convergenzgebiet dieser Reihe ist wiederum de dem Radius Eins um den Nullpunkt beschriebene Kreis, u lässt sich leicht zeigen, dass auch schon auf der Peripherie Kreises Divergenz eintritt, indem man $x=\cos\varphi+i\sin\varphi$ Reihe substituirt. Dann ist nämlich irgend ein Glied (das n der Reihe:

$$u=\frac{2^n(\cos 2^n\varphi+i\sin 2^n\varphi)}{1+\cos 2^n\varphi+i\sin 2^n\varphi}$$

$$=\frac{2^n(\cos 2^n\varphi+i\sin 2^n\varphi)\ (1+\cos 2^n\varphi-i\sin 2^n}{(1+\cos 2^n\varphi)^2+\sin^2 2^n\varphi}$$

$$=\frac{2^n(\cos 2^n\varphi+i\sin 2^n\varphi+1)}{2(1+\cos 2^n\varphi)}$$

$$=2^{n-1}(1+i\,\mathrm{tang}\,2^{n-1}\varphi),$$

woraus hervorgeht, dass sowohl der reelle, als auch der imag Theil der Reihe divergirt.

Hätte das eingangs betrachtete Product nicht unendlich viele, rn nur n Factoren, so träte an die Stelle von P jetzt:

$$P_n = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots\ldots(1+x^{2^{n-1}})$$

n Stelle der Gleichungen 1) und 2) die folgenden:

$$\frac{1-x^{2^n}}{1-x} = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots\ldots(1+x^{2^{n-1}}) \qquad 3)$$

$$\frac{2^n x^{2^n}}{1+x^{2^n}} = \frac{x}{1+x} + \frac{2x^2}{1+x^2} + \frac{4x^4}{1+x^4} + \ldots\ldots \frac{2^{n-1}x^{2^{n-1}}}{1+x^{2^{n-1}}} \qquad 5)$$

Aus dieser letzten Gleichung kann man die Summe einer ometrischen Reihe ableiten, indem man, nach entsprechen- ansformation, alle Glieder derselben zwischen den Grenzen und $+\infty$ integrirt. Damit die Bedingungen der Integra- (für unendliche Grenzen) erfüllt seien, geben wir der Reihe hst die Gestalt:

$$\frac{x^2}{-x^2} - \frac{2^n . x^{2^n}}{1+x^{2^n}} = \frac{2x^2}{1+x^2} + \frac{4x^4}{1+x^4} + \ldots\ldots \frac{2^{n-1}x^{2^{n-1}}}{1+x^{2^{n-1}}}$$

tzen ferner $\frac{1}{x}$ an die Stelle von x, so dass man hat:

$$\frac{2}{-1} - \frac{2^n}{x^{2^n}-1} = \frac{2}{x^2+1} + \frac{4}{x^4+1} + \ldots\ldots + \frac{2^{n-1}}{x^{2^{n-1}}+1}.$$

Wird nun jeder Bruch in Partialbrüche zerlegt (wobei sich r linken Seite die Brüche mit dem Nenner x^2-1 aufheben) erauf zwischen $-\infty$ und $+\infty$ integrirt, so erhält man die ometrische Gleichung:

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}} + \ldots\ldots + \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}} = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{2^n}.$$

an kann dieser Reihe mit Hilfe folgender Bemerkung eine einere Form geben: Vermehrt man die Anzahl der Glieder

linker Hand um Eins, so hat man:

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}+\ldots.\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}}+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2^n}}=\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2^{n+1}},$$

woraus im Vereine mit der früheren Gleichung folgt:

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2^n}}=\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2^{n+1}}-\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2^n}.$$

Diese Beziehung bleibt auch bestehen, wenn man x an Stelle von $\frac{\pi}{2^n}$ setzt, nämlich:

$$\frac{1}{\sin x}=\operatorname{cotg}\frac{x}{2}-\operatorname{cotg}x$$

und hieraus gelangt man durch successive Substitution von $\frac{x}{4}, \frac{x}{8}, \ldots$ an die Stelle von x und Addition der so entste den Gleichungen zur Verallgemeinerung der Gleichung 5):

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{x}{4}}+\ldots+\frac{1}{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}=\operatorname{cotg}\frac{x}{2^n}-\operatorname{cot}$$

welcher man durch die Substitution $\frac{x}{2^{n-1}}=z$ auch die F geben kann:

$$\frac{1}{\sin z}+\frac{1}{\sin 2z}+\frac{1}{\sin 4z}+\ldots+\frac{1}{\sin 2^{n-1}z}=\operatorname{cotg}\frac{z}{2}-\operatorname{cotg}2$$

Aus Gleichung 6) erhält man durch Integration aller Glie

$$\log\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2\log\operatorname{tg}\frac{x}{4}+4\log\operatorname{tg}\frac{x}{8}+\ldots.2^{n-1}\log\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}$$

$$=2^n\log\sin\frac{x}{2^n}-\log\sin x+\log C$$

oder

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}.\operatorname{tg}^2\frac{x}{4}.\operatorname{tg}^4\frac{x}{8}\ldots.\operatorname{tg}^{2^{n-1}}.\left(\frac{x}{2^n}\right)=C.\frac{\sin^{2^n}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\sin x}$$

wenn man quadrirt und mit tg x multiplicirt:

$$\operatorname{tg} x . \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} . \operatorname{tg}^4 \frac{x}{4} \ldots . \operatorname{tg}^{2^n} \left(\frac{x}{2^n}\right) = C . \frac{\sin^{2n+1}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\sin x}.$$

Der Werth der Integrationsconstanten ergibt sich durch itution des bekannten (Euler'schen) Werthes für

$$\sin x = 2^n . \cos \frac{x}{2} . \cos \frac{x}{4} . \cos \frac{x}{8} \ldots . \cos \frac{x}{2^n} . \sin \frac{x}{2^n}$$

er entsprechenden Werthe für $\sin \frac{x}{2}$, $\sin \frac{x}{4}$, ... als

$$C = 2^{2(2^n-1)},$$

s man schliesslich hat:

$$\operatorname{tg} x . \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \operatorname{tg}^4 \frac{x}{4} \ldots . \operatorname{tg}^{2^n} \left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{\left(2 \sin \frac{x}{2^n}\right)^{2^n+1}}{2 \sin 2x} \qquad 8)$$

enso die der Gleichung 8) entsprechende Formel:

$$\operatorname{tg} z . \operatorname{tg}^{1/2} 2z . \operatorname{tg}^{1/4} 4z \ldots . \operatorname{tg}^{1/2^n} (2^n z) = \frac{(2 \sin z)^2}{(2 \sin 2^{n+1} z)^{1/2^n}}. \qquad 9)$$

2.

n anderes Beispiel von Reihen, welche aus einem unend-Producte abgeleitet werden können, bieten jene von der

$$S_{2n} = \frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \ldots . \text{ ad inf.}$$

eine ganze positive Zahl bedeutet und deren Summe be-ch von Euler gefunden und durch folgende Recursions-ausgedrückt worden ist:

$$S_{2n} = \frac{\pi^{2n}}{2(2^{2n}-1) . (2n-1)!} . \tau_{2n},$$

wobei τ_{2n} aus der Gleichung

$$\tau_{2n} - \binom{2n-1}{2}\tau_{2n-2} + \binom{2n-1}{4}\tau_{2n-4} \ldots = 0$$

successive bestimmt werden kann.

Wir wollen hier eine andere Recursionsformel für Classe von Reihen nach einer einfachen Methode ableiten, w von der Euler'schen wesentlich verschieden ist. Alle R dieser Art haben die Form:

$$S_{2k} = \pi^{2k} \cdot \sigma_{2k}$$

und auf diesen Coëfficienten σ_{2k} soll sich die Recursionsf beziehen. Wir gehen dabei von folgender Bemerkung aus:

Ist

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m = 0$$

eine beliebige Gleichung m^{ten} Grades und bedeuten s_1, s_2, s die aufeinander folgenden reciproken Potenzsummen ihrer zeln, so besteht für diese Grössen bekanntlich die Relation:

$$a_0 s_n + a_1 s_{n-1} + a_2 s_{n-2} + \ldots a_{n-1} s_1 + n a_n = 0.$$

wobei $n \leqq m$ ist. Die ersten n Potenzsummen sind also w lich unabhängig von allen auf a_n folgenden Coëfficiente Gleichung, und dieser Umstand kann mitunter benützt w um für jene Potenzsummen sofort einen Werth anzugeben, wird dies dann der Fall sein, wenn man im Stande ist, die sp Coëfficienten so zu wählen, dass die entstehende Gleichu kannte Wurzeln hat. Wäre z. B.

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots (-1)_m \cdot \frac{x^{2m}}{(2m+1)!} = 0$$

und lässt man m immer mehr und mehr wachsen, so bleibe n ersten reciproken Potenzsummen ungeändert, während sich immer mehr und mehr dem Werthe $\frac{\sin x}{x}$ nähert und Nullwerthe (oder die Wurzeln der Gleichung 11) bei une wachsendem m gegen

$$\pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \pm 3\pi, \ldots \text{ ad inf.}$$

·ergiren. Dass diesen Schlüssen keinerlei Bedenken ent-
ɔnstehen, geht daraus hervor, dass die Reihe 11), in's Unend-
ɔ fortgesetzt, gleichmässig convergirt.

Wie sofort zu erkennen ist, haben die reciproken Potenz-
nen dieser Wurzeln mit ungeraden Exponenten immer den
th Null, weil jede Wurzel sowohl positiv als auch negativ
ommt und sich daher die ungeraden Potenzen je zweier
ıer Wurzeln aufheben. Die Summen mit geradem Exponenten
·nehmen die Form an:

$$2\left[\frac{1}{\pi^{2n}}+\frac{1}{(2\pi)^{2n}}+\frac{1}{(3\pi)^{2n}}+\ldots.\right]$$

$$\frac{2}{\pi^{2n}}\left(\frac{1}{1^{2n}}+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\ldots.\text{ ad inf.}\right).$$

Die $2n^{\text{te}}$ reciproke Potenzsumme der Gleichung 11) hat
t den Werth: $2\sigma_{2n}$, und wenn wir die für solche Potenz-
nen geltende Relation 10) auf die vorliegende Gleichung
ɔnden, so ergibt sich:

$$2\sigma_{2n}-\frac{2\sigma_{2n-2}}{3!}+\frac{2\sigma_{2n-4}}{5!}-\ldots.(-1)^{n-1}\cdot\frac{2\sigma_2}{(2n-1)!}+$$

$$+(-1)^n\cdot\frac{2n}{(2n+1)!}=0$$

$$\sigma_{2n}-\frac{\sigma_{2n-2}}{3!}+\frac{\sigma_{2n-4}}{5!}-\ldots.(-1)^{n-1}\cdot\frac{\sigma_2}{(2n-1)!}+$$

$$+(-1)^n\cdot\frac{n}{(2n+1)!}=0 \qquad 12)$$

ɛ gesuchte Recursionsformel.

Aus dieser letzten Gleichung lässt sich eine bemerkenswerthe
ıschaft der Zahl σ_{2n} unmittelbar ablesen, welche wegen der
ınten Relation

$$\sigma_{2n}=\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}B_n$$

auch eine Eigenschaft der Bernoulli'schen Zahlen er
Die Gleichung 11) sagt nämlich aus, dass die Zahl σ_{2n}
anderes ist, als die n^{te} (nicht reciproke) Potenzsumm
Wurzeln der Gleichung

$$x^m - \frac{x^{m-1}}{3!} + \frac{x^{m-2}}{5!} - \ldots = 0,$$

deren Grad m eine beliebige Zahl $\leqq n$ ist.

Dasselbe Verfahren liefert übrigens auch die Eule
Formel, wenn man die Gleichung

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} = 0$$

der Betrachtung zu Grunde legt. Da nämlich $f(x)$ bei une
wachsendem m in $\cos x$ übergeht, so convergiren seine Null
(oder die Wurzeln der Gleichung 13) gegen $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}$
so dass man der $2n^{\text{ten}}$ reciproken Potenzsumme der Glei
13) (analog dem Früheren) die Form geben kann:

$$s_{2n} = 2\left[\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}} + \frac{1}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^{2n}} + \frac{1}{\left(\frac{5\pi}{2}\right)^{2n}} + \ldots\right] = \frac{2^{2n+1}}{\pi^{2n}}\left(\frac{1}{1^{2n}} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \ldots\right) = \frac{2^{2n+1}}{\pi^{2n}}\left(S_{2n} - \frac{S_{2n}}{2^{2n}}\right) = \frac{2(2^{2n}-1)}{\pi^{2n}} S_{2n}$$

Nimmt man nun für diese Potenzsumme die
$s_{2n} = \frac{\tau_{2n}}{(2n-1)!}$ an, so hat man

$$S_{2n} = \frac{\pi^{2n}}{2(2^{2n}-1)(2n-1)!} \cdot \tau_{2n},$$

wobei sich für die noch unbestimmte Grösse τ_{2n} eine Recu
formel ergibt, wenn man die Relation 10) auf die Gleichu
anwendet; man hat dann:

$$\frac{\tau_{2n}}{(2n-1)!} - \frac{\tau_{2n-2}}{(2n-3)!\,2!} + \frac{\tau_{2n-4}}{(2n-5)!\,4!} -$$

$$- \ldots (-1)^{n-1} \frac{\tau_2}{1!\,(2n-2)!} + (-1)^n \cdot \frac{2n}{(2n)}$$

wenn man mit $(2n-1)!$ multiplicirt und bedenkt, dass

$$\frac{(2n-1)!}{(2n-3)!\,2!} = \binom{2n-1}{2} \text{ u. s. w.:}$$

$$\binom{2n-1}{2}\tau_{2n-2} + \binom{2n-1}{4}\tau_{2n-4} - \ldots\ldots$$

$$(-1)^{n-1}\binom{2n-1}{2n-2}\tau_2 + (-1)^n\tau_0 = 0$$

1) und diese Gleichung im Vereine mit der Gleichung 14) der That mit der Euler'schen Formel identisch.

Von einigem Interesse dürfte schliesslich noch die folgende kung sein: Während wir zu zwei verschiedenen Recurormeln für S_{2n} gelangten, indem wir dasselbe Verfahren auf eihe für $\sin x$, beziehungsweise $\cos x$ anwendeten, kann ieselben Formeln auch aus dem unendlichen Producte x, respective $\cos x$ ableiten, indem man die Operation

an diesem Producte n-mal nach einander ausführt und

f $x = 0$ setzt, wobei allerdings eine etwas umständlichere ormation nothwendig wird.

Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

ll.)

M. Monsieur Stolz, prof. à
l'université d'Innsbruck
Hommage de l'auteur
P. M.

(Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 3e année, 1879.)

NOTE

SUR

QUELQUES PRINCIPES FONDAMENTAUX D'ANALYSE

PAR

P. MANSION,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE GAND.

I

PRÉLIMINAIRES.

La limite d'une fonction de deux variables, F (x, y), pour $x = x_0$, $y = y_0$ peut être différente, suivant que x et y tendent simultanément vers leurs limites ou non. Ainsi, par exemple, la fonction $\left(\frac{y}{y+x} + x + y\right)$, où l'on suppose que x et y tendent vers zéro, donne lieu aux trois relations suivantes :

$$\operatorname{Lim}\left[\left[\frac{y}{y+x} + x + y\right]_{y=0}\right]_{x=0} = \lim (x)_{x=0} = 0,$$

$$\operatorname{Lim}\left[\left[\frac{y}{y+x} + x + y\right]_{x=0}\right]_{y=0} = \lim (1+y)_{y=0} = 1,$$

$$\operatorname{Lim}\left[\frac{y}{y+x} + x + y\right]_{x=0,\ y=0} = \lim \frac{y}{y+x}.$$

Faute d'avoir tenu compte de la remarque précédente, on a souvent énoncé, avec trop peu de précision, les conditions nécessaires pour l'existence de maintes formules d'analyse. Nous allons en rappeler un exemple, bien connu du reste. Il servira d'introduction à la présente note, où nous signalons un vice de raison-

nement, dans la démonstration de trois principes fondamentaux d'analyse.

Soit une série convergente :

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots$$

dont tous les termes u sont fonctions continues d'une variable x entre les limites x_0 et X. Soit S la somme de cette série. Posons

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + r_n.$$

Le reste r_n est une fonction $f(x, n)$, qui, par définition, pour une valeur donnée de x, comprise entre x_0 et X, a pour limite zéro quand n croît indéfiniment. Il ne résulte pas de là que, si x et n *varient simultanément*, n croissant de manière à dépasser tout nombre quelconque et x prenant diverses valeurs comprises entre x_0 et X, il ne résulte pas de là, dis-je, que r_n ait pour limite zéro (*).

Ainsi, quand

$$u_n = n^2x^2e^{-n^2x^2} - (n+1)^2x^2e^{-(n+1)^2x^2},$$

on a, quel que soit x,

$$S = x^2e^{-x^2}, \quad r_n = (n+1)^2x^2e^{-(n+1)^2x^2}.$$

Pour une valeur fixe quelconque de x, $\lim r_n = 0$, si n croît indéfiniment. Mais si n et x varient simultanément de manière que $(n+1)x = 1$, r_n pour n croissant indéfiniment reste égal à e^{-1}, et par conséquent ne tend pas vers 0.

Si

$$u_n = 2n^2x\,e^{-n^2x^2} - 2(n+1)^2x\,e^{-(n+1)^2x^2},$$

on a, pour toute valeur de x,

$$S = 2xe^{-x^2}, \quad r_n = 2(n+1)^2x\,e^{-(n+1)^2x^2} = \frac{(n+1)^2x^2}{e^{(n+1)^2x^2}} \cdot \frac{2}{x}.$$

Pour une valeur fixe quelconque de x, $\lim r_n = 0$, si n croît indéfiniment. Mais si n et x varient simultanément de manière que $(n+1)x = 1$, $r_n = \frac{2}{xe}$, pour n croissant indéfiniment croît aussi indéfiniment.

(*) Cette remarque importante est due à M. WEIERSTRASS. Voir HEINE, *Journal de C*[illegible] t. LXXI, p. 353. Comparez CAUCHY, dans les *Comptes rendus*, t. XXXVI, pp. 456-458

Ces deux exemples très simples, empruntés au *Mémoire* de I. Darboux *sur les fonctions discontinues*, mettent très bien en ımière l'importante remarque de Weierstrass : il ne suffit pas u'une série soit convergente, entre certaines limites x_0, X e la variable, pour qu'on puisse l'intégrer entre ces limites ɔmme un polynôme algébrique. Il n'est pas certain, en effet, ue $R_n = \int_{x_0}^{X} r_n dx$ ait pour limite 0, quand n croît indéfiniment. n ou plusieurs des éléments de l'intégrale, par exemple, dans dernière série, celui qui correspond à $(n + 1)\,x = 1$ et les éments voisins peuvent avoir un facteur qui croît indéfiniment ec n, et R_n peut, par suite, tendre vers une limite non nulle.

II

DÉRIVATION DES INTÉGRALES DÉFINIES SOUS LE SIGNE.

Soit une intégrale définie

$$F(\alpha) = \int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)\, dx,$$

pendant d'un paramètre variable α, qui n'entre pas dans les ites x_0, X. On trouve aisément :

$$\frac{F(\alpha + \Delta\alpha) - F(\alpha)}{\Delta\alpha} = \int_{x_0}^{X} \left[\frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha}\right] dx.$$

ur une valeur déterminée de x, on a

$$\frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha} = f'_\alpha(x, \alpha) + \varepsilon_{\Delta\alpha},$$

étant une fonction $\varphi\ (x, \Delta\alpha)$, de x et de $\Delta\alpha$, qui a pour ite 0, en même temps que $\Delta\alpha$.

Par suite,

$$\frac{F(\alpha + \Delta\alpha) - F(\alpha)}{\Delta\alpha} = \int_{x_0}^{X} f'_\alpha(x, \alpha)\, dx + \int_{x_0}^{X} \varphi(x, \Delta\alpha)\, dx.$$

On tire de là, en prenant la limite des deux membres,

$$F'(\alpha) = \int_{x_0}^{X} f'_\alpha(x, \alpha)\,dx + l,$$

en posant

$$l = \lim \int_{x_0}^{X} \varphi(x, \Delta\alpha)\,dx,$$

pour $\Delta\alpha = 0$.

On admet d'ordinaire que $l = 0$, parce que *lim* $\varphi(x, \Delta\alpha) =$ pour une valeur fixe quelconque de x. Mais cette conclusion n pas plus légitime que celle de la plupart des manuels relati $R_n = \int_{x_0}^{X} r_n dx$, dans la théorie des séries. La fonction $\varphi(x,$ dont la limite est nulle quand $\Delta\alpha$ tend vers 0, pour une val fixe quelconque de x, peut avoir une limite finie ou croître ir finiment, quand x et $\Delta\alpha$ varient simultanément. Un ou plusi des éléments de $\int_{x_0}^{X} \varphi(x, \alpha)\,dx$ peuvent donc avoir un fac $\varphi(x, \alpha)$ croissant indéfiniment quand $\Delta\alpha$ tend vers 0. Par séquent, rien ne prouve que $l = 0$.

Pour voir dans quel cas $l = 0$, on peut chercher la va maxima φ_M et la valeur minima φ_m de $\varphi(x, \Delta\alpha)$. On aura

$$\varphi_m \int_{x_0}^{X} dx < \int_{x_0}^{X} \varphi(x, \alpha)\,dx < \varphi_M \int_{x_0}^{X} dx,$$

ou

$$\varphi_m (X - x_0) < \int_{x_0}^{X} \varphi(x, \alpha)\,dx < \varphi_M (X - x_0).$$

Si φ_m et φ_M, qui sont des fonctions de $\Delta\alpha$, ont pour limite 0 même temps que $\Delta\alpha$, on aura $l = 0$.

Si l'une des limites de l'intégrale est infinie, ce dernier rai nement ne peut même plus être employé, puisque $X - x_0$ infini. Cependant, c'est presque exclusivement dans ce cas plus difficile de tous, ou bien dans le cas équivalent où $f(x$ devient infini entre les limites de l'intégration, que les traité calcul intégral ont appliqué la formule

$$F'(\alpha) = \int_{x_0}^{X} f'_\alpha(x, \alpha)\,dx.$$

Il y a donc lieu, comme on le voit, de soumettre ce cha d'analyse à une révision sévère.

III

SUR LE DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS EN SÉRIES PAR LE THÉORÈME DE TAYLOR.

Soit Fx une fonction de x, continue, ainsi que toutes ses dérivées, pour les valeurs de x, comprises entre 0 et x. On a, comme l'on sait,

$$Fx = F0 + \frac{x}{1}F'0 + \frac{x^2}{1.2}F''0 + \cdots + \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{n-1}0 + R_n,$$

R_n étant une fonction de n et de x, que Lagrange a mise sous la forme :

$$R_n = \frac{x^n}{1.2\ldots n}F^n(\theta x), \quad 0 < \theta < x.$$

Si n croît indéfiniment, le premier facteur de R_n, pour $n = \infty$, a pour limite 0. Le second facteur est regardé d'ordinaire, comme n'ayant aucune influence sur la limite du second membre, parce que, pour une valeur quelconque de x, $F^n x$ a une valeur finie, quand n croît indéfiniment.

Ce raisonnement, encore une fois, est vicieux. Certes $F^n x$, par hypothèse, reste finie pour une valeur *fixe* quelconque de x, quand n croît indéfiniment. Mais rien ne prouve que $F^n x$ jouisse encore de cette propriété, quand n et la valeur de la variable varient simultanément. L'expression $F^n(\theta x)$, à cause de θx, qui probablement dépend de n, est une fonction de n et de x, dont la limite, pour $n = \infty$, peut donc être infinie.

Pour voir si ce second facteur $F^n(\theta x)$ de R_n reste fini, il suffit, encore une fois, de chercher sa valeur maxima et sa valeur minima, ou plutôt deux quantités M, m entre lesquelles il reste compris, et de voir vers quelles limites M et m tendent pour $n = \infty$. La plupart des auteurs, qui ne donnent pas avec précision la condition pour que $\lim R_n = 0$, dans le cas général, procèdent de la manière indiquée ici, dans les cas particuliers.

M. P. du Bois-Reymond croit avoir trouvé une fonction co tinue ainsi que toutes ses dérivées, pour toute valeur de x, qui, pourtant, n'est pas développable en série par la formule Taylor (*). C'est la suivante :

$$Fx = \frac{1}{1.2}\frac{x^2}{x^2+a_1^2} - \frac{1}{1.2.3.4}\frac{x^4}{x^2+a_2^2} + \frac{1}{1.2...6}\frac{x^6}{x^2+a_3^2} - \frac{1}{1.2...8}\frac{x^8}{x^2+a_4^2} + \text{etc.};$$

Les constantes a_1^2, a_2^2, a_3^2, ... sont des quantités positives ind finiment décroissantes, de sorte que $\lim a_n^2 = 0$, pour $n =$ D'après le théorème de Cauchy sur le cercle de convergence d séries obtenues par le théorème de Taylor, celui du développ ment de Fx, s'il existait, devrait avoir un rayon égal à $\lim a_n$ zéro. En effet, Fx est infini pour $x = a_1 i,\ a_2 i,\ a_3 i, \ldots (i = \sqrt{-}$

La remarque générale faite plus haut sur la limite de $F^n(0$ pour $n = \infty$, permet d'expliquer, d'une manière élémentaire, possibilité du curieux phénomène signalé par M. P. du Bo Reymond.

IV

RÈGLE DE DÉRIVATION DES FONCTIONS COMPOSÉES.

Soient $y = F(u, v)$, $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$. On démontre, or nairement, comme il suit, la règle de dérivation de la fonct F, par rapport à x. On a

$$\Delta u = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x), \quad \Delta v = \psi(x + \Delta x) - \psi(x),$$
$$\Delta y = F(u + \Delta u,\ v + \Delta v) - F(u, v)$$
$$= [F(u + \Delta u,\ v + \Delta v) - F(u,\ v + \Delta v)]$$
$$+ [F(u, v + \Delta v) - F(u, v)].$$

(*) *Münchener Bericht*, 1876, pp. 226-237.

Si l'on suppose Δv *fixe,* on a, pour Δu tendant vers 0,

$$\lim \frac{F(u+\Delta u, v+\Delta v) - F(u, v+\Delta v)}{\Delta u} = F'_u(u, v+\Delta v);$$

$$\frac{F(u+\Delta u, v+\Delta v) - F(u, v+\Delta v)}{\Delta u} = F'_u(u, v+\Delta v) + \varepsilon_{\Delta u},$$

ayant pour limite 0, quand Δu tend vers 0, Δv *restant fixe.*
Ensuite, si $F'_u(u, v)$ est une fonction continue par rapport à v, peut écrire

$$F'_u(u, v+\Delta v) = F'_u(u, v) + \varepsilon'_{\Delta v}$$

ayant pour limite 0, en même temps que Δv.
Donc enfin

$$\frac{F(u+\Delta u, v+\Delta v) - F(u, v+\Delta v)}{\Delta u} = F'_u(u, v) + \varepsilon_{\Delta u} + \varepsilon'_{\Delta v},$$

On trouve, de la même manière :

$$\frac{F(u, v+\Delta v) - F(u, v)}{\Delta v} = F'_v(u, v) + \varepsilon''_{\Delta v},$$

ayant aussi pour limite 0, en même temps que Δv.
Ces deux dernières relations permettent d'écrire la valeur de

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F(u+\Delta u, v+\Delta v) - F(u, v+\Delta v)}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{F(u, v+\Delta v) - F(u, v)}{\Delta v}\frac{\Delta v}{\Delta x},$$

la forme

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left[F'_u(u, v) + \varepsilon_{\Delta u} + \varepsilon'_{\Delta v}\right]\frac{\Delta u}{\Delta x} + \left[F'_v(u, v) + \varepsilon''_{\Delta v}\right]\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Ordinairement, on tire de là :

$$\frac{dy}{dx} = F'_u(u, v)\frac{du}{dx} + F'_v(u, v)\frac{dv}{dx},$$

le raisonnement suivant. Si Δx tend vers 0, il en est de même Δu, Δv, et, par suite, de $\varepsilon_{\Delta u}$, $\varepsilon'_{\Delta v}$, $\varepsilon''_{\Delta v}$. Donc, la dernière éga-

lité, par un principe évident de la méthode des limites, est conséquence de l'avant-dernière.

Ce raisonnement, très-plausible en apparence, renferm paralogisme. De ce que $\varepsilon_{\Delta u}$ a pour limite 0, quand Δu tend v Δv *étant fixe,* il ne s'ensuit pas que $\varepsilon_{\Delta u}$ ait encore la même li quand Δx, et, par suite, Δu et Δv tendent simultanément v

On doit donc, selon nous, renoncer à démontrer la règle dérivation des fonctions composées, par la méthode précéd car, pour la rendre admissible, il faudrait prouver, pour ch espèce de fonction composée, que $\varepsilon_{\Delta u}$ a pour limite 0, quand Δu, Δv tendent simultanément vers 0. Il est beau plus facile d'établir directement l'exactitude de la règle co successivement pour une somme, un produit, un quotient exponentielle u^v, un logarithme d'une fonction u, la ba système étant une autre fonction, etc. C'est ainsi qu'ont pr Newton, Leibniz et leurs successeurs immédiats. D'aille reste des traces de cette manière de procéder dans tous le nuels d'analyse infinitésimale.

V

CONCLUSION.

Les questions précédentes ne sont pas les seules où l'on in avec trop peu de précision à quelles conditions on peut ch la limite d'une fonction de deux variables, indifféremme supposant que ces variables tendent simultanément vers limites, ou non. Il y aurait lieu, à ce point de vue, de revise exemple, la recherche des limites de sommes doubles ou t au moyen des intégrales doubles ou triples, et plusieurs que qui en dépendent. Mais les cas particuliers traités dans cett suffisent pour attirer l'attention des analystes sur les préca à prendre, quand il s'agit de trouver la limite d'une fonct plusieurs variables.

31 octobre 1878.

Bruxelles. — F. Hayez, imp. de l'Acad r

E ALLGEMEINE UMKEHRUNGSREIHE UND IHRE UMGEBUNG

nebst einer Anwendung derselben auf die Auflösung algebraischer Gleichungen beliebigen Grades

Von

MICHAEL MARKIČ

Professor am Rudolfswerter Gymnasium

RUDOLFSWERT 1914

:: Verlag des Verfassers ::

Druck von J. Krajec' Nachfg.

Druckfehler.

Seite	Zeile	Lies:
3	13.	der Kombinatorik;
3	8. u.	$f(x) = 0$
5	4. u.	$\left(\frac{-f_3(h)}{f_1(h)^4} +\right.$
7	4.	$= \left[\frac{y}{p}\right],$
10	12.	$= f_1{}^3 \frac{d}{dx}\frac{1}{f_1{}^3} f_1{}^2 \frac{d}{dx}\frac{1}{f_1}\frac{d}{dx}\frac{1}{f_1} =$
11	16. u.	von $f_1{}^{-s'}$.
11	5. u.	$= K f_3^2 f_2 =$
11	2. u.	$-8 \cdot 35 =$
12	8.	Es gibt $\frac{1}{2}(2n-1-1)$ solcher . . .
17	5.	$= (-1)^r (s-1) \cdot \frac{(s-1)^\nu \cdot n}{\alpha!\,\beta! \ldots \nu!\, a!^\alpha\, b!^\beta \ldots n!^\nu\, (s-1)}$
17	14. u.	$= K f_{n-1} f_2 \cdot \frac{n+2}{n}.$
24	6. u.	$\ldots \left\{ \begin{matrix} s-pr+(p-1)r \\ r \end{matrix} \right\}_p$ — — —
26	18. u.	$H_1 [n]_p = V_0 [n-1]_p +$
29	11. u.	$\left\{ \begin{matrix} s-p \\ r-1 \end{matrix} \right\}_{p,q} + \left\{ \begin{matrix} s \\ r \end{matrix} \right\}_{p+1,q}.$
37	4.	$= r^{m'} (2\cos^2\alpha - 1) = 2 r^{m'} \cos^2\alpha - r^{m'}.$
39	2.	$x = \sqrt[n]{-(a_1 x^{n-1} + \ldots a_n)}$
40	15.	von $f, f_1, f_2 \ldots .$
40	16.	$g_1, g_2, \ldots$
40	13. u.	$x = h + l\left(1 - \frac{D_1}{D_0} f - \frac{D_2}{D_0} f^2 - \ldots\right).$ — — — — —
42	14.	durch $(-1)^{r-1}$ bestimmt.
43	7. u.	resumieren.

allgemeine Umkehrungsreihe u. ihre Umgebung

nebst einer Anwendung derselben auf die Auflösung algebraischer Gleichungen beliebigen Grades.

Von Professor Michael Markič.

Alle Sätze und Formeln, die meines Wissens neu sein dürften, habe ne Rücksicht auf den jeweiligen Stoff mit fortlaufenden Zahlen met. Einiges wird wohl dem Inhalte nach, anderes in dieser Form n drittes vielleicht nur in dieser Verbindung neu sein. Die haupt-hsten Punkte der vorliegenden Abhandlung möchte ich gleich hier heben: es sind das die Umkehrungsreihe selbst, dann aber auch ngebung d. h. die Nachbargebiete, speziell die direkte Darstellung der Umkehrungsreihe vorkommenden Koeffizienten und die damit nenhängende Erweiterung des Kombinatorik; sodann die „Zerfäl-ihlen" (auf zahlentheoretischem Gebiete) und einige „funktionelle" . Ich will aber mit dem Zwecke, Neues zu bringen, noch einen n, den didaktischen, verbinden. Das hat einige kurze Erklärungen dig gemacht; auch sonst mußte sich die Darstellungsweise diesem wecke anpassen.

I.

Die Umkehrungsreihe. Eine Gleichung mit einer Unbekannten estimmungsgleichung genannt, da der Wert der Unbekannten aus nstanten der Gleichung zu bestimmen ist. Eine Gleichung mit 2 nnten wäre füglich eine Beziehungsgleichung zu nennen, da darin rte der beiden Unbekannten aufeinander bezogen sind.

t nun ganz allgemein eine Bestimmungsgleichung $f(y) = 0$ gegeben, aus der Beziehungsgleichung $f(x) = y$ dadurch hervorgeht, daß $= 0$ setzt, so ist dadurch natürlich die Funktion f bekannt. Die hende umgekehrte Funktion möge φ heißen, so das $\varphi(y) = x$, resp. x, da $y = 0$ ist.

h stelle mir nun zur Aufgabe, die unbekannte Funktion φ und ihre gen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n, \ldots$ durch die bekannte Funktion f und ihre gen $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n, \ldots$ auszudrücken. Nach Taylor ist bekanntlich

$\varphi(y+u) = \varphi(y) + u \cdot \varphi_1(y) + \frac{u^2}{2!}\varphi_2(y) + \frac{u^3}{3!}\varphi_3(y) + \ldots \frac{u^n}{n!}\varphi_n(y) +$ infinitum.

Ich setze darin $y = k$ und $u = -k$; dann geht die Reihe

$$\varphi(0) = \varphi(k) - k\varphi_1(k) + \frac{k^2}{2!}\varphi_2(k) - \frac{k^3}{3!}\varphi_3(k) + \ldots \frac{(-k)^n}{n!}\varphi_n(k) + \ldots$$

Nun differenziere ich die Gleichungen $f(x) = y$ und $\varphi(y) =$ erhält: $f_1(x)\,dx = dy$; $\frac{dy}{dx} = f_1(x)$. Ebenso $\varphi_1(y)\,dy = dx$; $\frac{dx}{dy} =$

$\varphi_1(y) = \frac{1}{f_1(x)}$. Die Differentiation der letztern Gleichung ergibt:

$\varphi_2(y)\,dy = \frac{-f_2(x)}{f_1(x)^2}\,dx$; also $\varphi_2(y) = \frac{-f_2(x)}{f_1(x)^2} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{-f_2(x)}{f_1(x)^3}$.

Von nun an lassen wir, um Raum zu ersparen, die Argume Funktionen weg, so daß man sich zu den φ-Funktionen ein y den f-Funktionen ein x hinzuzudenken hat. Fortgesetzte Differe liefert dann nach den entsprechenden Reduzierungen und Abkür

$$\varphi_3 = \frac{-f_3 f_1^3 + 3 f_2^2 f_1^2}{f_1^7} = \frac{-f_3}{f_1^4} + \frac{3 f_2^2}{f_1^5};$$

$$\varphi_4 = \frac{-f_4}{f_1^5} + \frac{10 f_3 f_2}{f_1^6} - \frac{15 f_2^3}{f_1^7};$$

$$\varphi_5 = \frac{-f_5}{f_1^6} + \frac{15 f_4 f_2 + 10 f_3^2}{f_1^7} - \frac{105 f_3 f_2^2}{f_1^8} + \frac{105 f_2^4}{f_1^9};$$

$$\varphi_6 = \frac{-f_6}{f_1^7} + \frac{21 f_5 f_2 + 35 f_4 f_3}{f_1^8} - \frac{210 f_4 f_2^2 + 280 f_3^2 f_2}{f_1^9} + \frac{1260 f_3 f_2^3}{f_1^{10}} - \frac{945 f_2^5}{f_1^{11}}$$

$$\varphi_7 = \frac{-f_7}{f_1^8} + \frac{28 f_6 f_2 + 56 f_5 f_3 + 35 f_4^2}{f_1^9} - \frac{378 f_5 f_2^2 + 1260 f_4 f_3 f_2 + 280 f_3^3}{f_1^{10}} + \frac{3150 f_4 f_2^3 + 6300 f_3^2 f_2^2}{f_1^{11}} - \frac{17325 f_3 f_2^4}{f_1^{12}} + \frac{10395 f_2^6}{f_1^{13}}.$$

Ich füge hier noch das Glied φ_8 hinzu, welches nicht mel der vorstehenden Methode, sondern direkt nach dem im folge entwickelnden Bildungsgesetze gefunden wurde:

$$\varphi_8 = \frac{-f_8}{f_1^9} + \frac{36 f_7 f_2 + 84 f_6 f_3 + 126 f_5 f_4}{f_1^{10}}$$

$$\frac{330 f_6 f_2^2 + 2520 f_5 f_3 f_2 + 2100 f_4 f_3^2 + 1575 f_4^2 f_2}{f_1^{11}}$$

$$\frac{5930 f_5 f_2^3 + 34650 f_4 f_3 f_2^2 + 15400 f_3^3 f_2}{f_1^{12}} - \frac{51975 f_4 f_4^2 + 138600 f_3^2 f_2^3}{f_1^{13}}$$

$$\frac{270270 f_3 f_2^5}{f_1^{14}} - \frac{135135 f_2^7}{f_1^{15}}, \text{ u. s. f.}$$

Wählt man nun einen beliebigen Wert für x, etwa h, so erhält us der bekannten Funktion f einen Wert für y, etwa k, so daß k; natürlich gilt auch umgekehrt $\varphi(k) = h$.

ch substituire nun in die obige Reihe für $\varphi(0)$ die im vorstehenden e φ-Funktionen gefundenen Werte und ich erhalte die allgemeine rungsreihe:

$$x = h - f(h) \cdot \frac{1}{f_1(h)} + \frac{f(h)^2}{2!} \cdot \frac{-f_2(h)}{f_1(h)^3}$$

$$\frac{f(h)^3}{3!} \cdot \left(\frac{-f_3(h)}{f_1(h)^4} + \frac{3 f_2(h)^2}{f_1(h)^5} \right)$$

$$\frac{f(h)^4}{4!} \cdot \left(\frac{-f_4(h)}{f_1(h)^5} + \frac{10 f_3(h) f_2(h)}{f_1(h)^6} - \frac{15 f_2(h)^3}{f_1(h)^7} \right) - \ldots \text{ in inf.}$$

— — — — — (1)

un ist die rechte Seite von x durch lauter bekannte Funktionen ie willkürliche Konstante h ausgedrückt.

rsetzt man in der Taylor'schen Reihe y durch $+k$ und u durch so geht die Reihe über in

$$y - k) = \varphi(y) = \varphi(k) + (y-k)\varphi_1(k) + \frac{(y-k)^2}{2!}\varphi_2(k)$$

$$+ \frac{(y-k)^3}{3!}\varphi_3(k) + \ldots$$

ird $k=0$ gesetzt, so entsteht daraus die Mac-Laurin'sche Reihe. ie Substitutionen $\varphi(k) = h$, $k = f(h)$ und die Ersetzung der φ-Funk- durch die f-Funktionen verwandeln die vorstehende Reihe in die Form der allgemeinen Umkehrungsreihe:

$$x = h + [y - f(h)] \cdot \frac{1}{f_1(h)} + \frac{[y-f(h)]^2}{2!} \cdot \frac{-f_2(h)}{f_1(h)^3} +$$

$$\frac{[y-f(h)]^3}{3!} \cdot \left(\frac{-f_3(h)}{f_1(h)_4} + \frac{3 f_2(h)^2}{f_1(h)^5} \right) + \ldots . \text{ in infin.} \quad — — — \quad (2)$$

an braucht nur $y = 0$ zu setzen, um aus (2) wieder (1) zu erhalten. er Reihe (1) kann man eine einfachere Form geben, wenn man mit ung des Argumentes h für $\frac{f}{f_1} = f_0, \frac{f_2}{f_1} = f_{II}, \frac{f_3}{f_1} = f_{III} \ldots . \frac{f_n}{f_1} = f_N$

schreibt; also: $x = h - f_0 + \frac{f_0^2}{2!}(-f_{II}) - \frac{f_0^3}{3!}(-f_{III} + 3f_{II}^2)$

$$+ \frac{f_0^4}{4!}(-f_{IV} + 10 f_{III} f_{II} - 15 f_{II}^3) - \ldots$$

bei man die eingeklammerten Ausdrücke noch kürzer mit φ_{II}, φ_{III}, φ_{IV} φ_N bezeichnen kann.

f_0 ist offenbar die Subtangente der Funktion f für den Wert handelt sich nur noch darum, h so zu wählen, daß die Reihen (1) u konvergent werden.

Die Konvergenzkonstante h. Die Konstante h scheint ein wendiger Bestandteil einer allgemeinen unendlichen Reihe zu sein ist mit ihr so enge verknüpft wie die Begriffe Konvergenz und Dive Wenn eine Reihe diese Konstante nicht enthält, so hat man sich w denken, daß h darin einen speziellen Wert angenommen hat. F bestimmtes y ist die Konstante h zwischen gewisse Grenzen eingesch sonst aber willkürlich und kann innerhalb dieser Grenzen an dem ergebnis der Reihe nichts ändern, sie muß sich also im Laufe de schreitenden unendlichen Reihe, wenn auch nur erst im letzten aufheben. Einen Einfluß übt sie nur auf die schnellere oder lang Konvergenz der Reihe aus; eine Größe mit solchen Eigenschaften man füglich Konvergenzkonstante nennen. Die Rolle einer solche vergenzkonstanten spielt in der allgemeinen Mac-Laurin'schen Rei Größe k; in der speziellen Mac-Laurin'schen Reihe ist $k = 0$ angen Für ein bestimmtes h ist dagegen y, das Argument der Funktion die Reihe konvergieren soll, an die Bedingung geknüpft, daß es Grenzen, etwa $l_1 < y < l_2$, nicht überschreite, mit dem Unter jedoch, daß sich jetzt im allgemeinen mit der Änderung des Argu auch der Wert der Funktion und der Reihe ändert. Überschre diese Grenzen, so kann die Funktion einen endlichen Wert, di Funktion ausdrückende Reihe dagegen einen unendlichen Wert an Die beiden Ausdrücke können also in unendlich vielen Werten, ab nicht immer in allen übereinstimmen. Es besteht also zwischen il allgemeinen keine volle Gleichheit. Man sollte daher zwischen ih statt des Gleichheitszeichens $=$, des Symbols der vollen Äquival diesen Fall ein anderes Zeichen, etwa $\frac{l_2}{l_1}$ anwenden. Es fragt si Ist es nicht möglich, h durch eine Funktion $\Lambda(y)$ zu ersetzen, we bedingte und begrenzte Gleichheit in eine volle verwandelte? (Jedoc diese Gleichheit auch nicht eine tautologische sein, wie man beispi aus dem allgemeinen Mac-Laurin, wenn man k durch y ersetzt, $\varphi(y$ erhält). Es wäre dann die besagte Bedingung, die gewöhnlich ext

Ungleichungen resp. Gleichungen ausgedrückt erscheint, in die Reihe
st verlegt. So könnte z. B. für $k = \Lambda(y) = \left(\frac{y}{p}\right)$ oder $\left(\frac{y}{p}\right) q$ u. ä.,
n $\left(\frac{y}{p}\right)$ den ganzzahligen Quotienten und $\left[\frac{y}{p}\right]$ den Rest der Division
edeutet, so daß also $\frac{y}{p} = \left(\frac{y}{p}\right) + \left[\frac{y}{p}\right]$, der Ausdruck $y - \left(\frac{y}{p}\right) = \left[\frac{y}{p}\right]$
die Grenze p überschreiten.

Doch wir können hier die allgemeinen Bedingungen der Konvergenz
t weiter erörtern; das würde eine eigene Abhandlung erfordern. Wir
iügen uns damit, zu zeigen, daß bei allen in der vorliegenden Ab-
llung behandelten Aufgaben, speziell bei der Auflösung der algebra-
:n Gleichungen beliebigen Grades, h stets so gewählt werden kann,
es die Konvergenz der Reihe bewirkt. Zum allgemeinen Konvergenz-
lem nur noch einige Bemerkungen!

Vorausgeschickt sei noch die Vorbemerkung, daß wir über die
en x, y, h, k keine spezielle Annahme gemacht haben, daß also das
'ergenzgebiet eine Strecke oder eine Fläche sein kann, je nachdem wir
lie erwähnten Größen nur reelle oder auch komplexe Werte zulassen.

Bemerkung 1. Es muß ein Maß für die geringere oder größere
elligkeit der Konvergenz geben, das wir mit v bezeichnen wollen.
soll das Konvergenzgebiet für v, das bei bestimmtem y, etwa $y = 0$,
iit h im Abhängigkeitsverhältnis steht, bezeichnen, so das also $h = \mathfrak{H}(v)$
ist nun v ein Maximum $= M$, so wird das Konvergenzgebiet im allge-
:n ein Punkt sein und man könnte ihn Konvergenzmittelpunkt nennen.
ein Minimum $= \mu$, so bedeutet $\mathfrak{H}(v)$ offenbar den Rand des Kon-
nzgebietes. Zwischenwerte bestimmen gewisse Linien (resp. Punkte)
hen diesem Rande und dem Mittelpunkt. Für $v = M$ ist h leicht
dig zu machen. Bezeichnet man nämlich die Reihe (2) mit $R(y, h)$,
eihe (1) mit $R(0, h)$ oder kürzer mit einem Argument $R(h)$, die n
eln der Gleichung $f(x) = 0$ mit $x_1, x_2, \ldots$ dementsprechend die von
$= 0$ mit $x_{11}, x_{12}, x_{13}, \ldots$ die von $f_2(x) = 0$ mit $x_{21}, x_{22}, x_{23} \ldots$, so
gen $f(x_1) = 0$ $R(\mathfrak{H}(M)) = R(x_1) = h = x_1$, ebenso $R(x_2) = h = x_2$
v., d. h. die $R(h)$ reduziert sich in diesen n Fällen auf ein Glied,
:h h. Schneller kann eine Reihe nicht konvergieren. Daraus ent-
:n wir den Satz: Die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ bilden die
:rgenzmittelpunkte. Dies gilt auch für den Fall, daß 2 oder mehrere
:ln gleich sind. Sind 2 Wurzeln einander gleich, etwa $x_1 = x_2$, so
ie man sich durch Differentiation von $f(x)$ in der Form $(x - x_1)$
$x_2)(x - x_3) \ldots = 0$ überzeugen kann, auch $f_1(x_1) = 0$. Auf die-
Art kann man beweisen, daß bei 3 gleichen Wurzeln $x_1 = x_2 = x_3$

nicht nur $f(x_1) = 0$, $f_1(x_1) = 0$, sondern auch $f_2(x_1) = 0$ wird. gleichen Wurzeln kommt dazu noch $f_3(x_1) = 0$ u. s. w. Da die $R(h)$ nur aus den Quotienten $f_0, f_{II}, f_{III}, \ldots f_N$ zusammengesetzt i keine Ableitung von f in einer andern Verbindung enthält, so is einzusehen, daß bei 2 gleichen Wurzeln $f_0 = \frac{0}{0}, f_{II}$ und die übrige tienten $= \infty$ werden. Bei 3 gleichen Wurzeln wird $f_0 = \frac{0}{0}, f_{II} =$ übrigen Quotienten sind $= \infty$. u. s. f. Bei den Quotienten, die = kann Zähler und Nenner differenziert werden; dadurch erhält r $f_0 = \frac{f_1}{f_2}$, für $f_{II} = \frac{f_3}{f_2}$ u. s. f. Ist beispielsweise $f = 0, f_1 = 0, f_2 = 0$ u. s. w., so wird $f_0 = \frac{f_1}{f_2}$, also wiederum $= \frac{0}{0}$ und Zähler und können nochmals differenziert werden; f_0 wird dadurch zu $\frac{f_2}{f_3}$ und die übrigen Quotienten sind $= \infty$. Nun ist der Exponent v jedem Gliede um 1 größer als der höchste Exponent in dem da rigen Polynom. Der Satz $\mathfrak{H}(M) = R(x_1) = x_1$ gilt also auch Fall, daß x_1 einer oder mehreren andern Wurzeln gleich ist.

Bemerkung 2. A priori können wir annehmen, daß d die Wurzeln herum sich ausbreitenden Konvergenzgebiete von getrennt sind. Denn würden sich 2 oder mehrere von ihnen übe so wäre nicht einzusehen, warum Werte des überdeckten Gebi eine konvergente Reihe eindeutig ist und nicht zwischen 2 oder Werten schwanken kann, die eine und nicht auch die ander liefern sollte. Berühren sich 2 Gebiete, so kann auch die Berühr nicht 2 Gebieten zugleich angehören.

Bemerkung 3. Für h darf keine der Wurzeln von $f_1(x)$ gesetzt werden, wenn nicht auch f durch dieselben annuliert würde dadurch ∞ werden.

Das allgemeine Glied φ_n. Die erste Rekursionsformel stimmung der Koeffizienten. Für die durch fortgesetzte Diffe gefundenen Ausdrücke für φ_1 bis φ_7 gelten, wie man sich lei zeugen kann, folgende Sätze. Es bietet bei einer aufmerksamer gung des Rechnungsganges keine Schwierigkeiten, den Geltun der Sätze auch auf φ_8, φ_9 u. s. w., allgemein auf φ_n auszudehne

Satz 1. Jedes φ_n, $(n = 1, 2, \ldots 7)$, besteht aus einer A Brüchen, deren Nenner von f_1^{n+1} bis f_1^{2n-1} so fortschreiten, Exponent immer um 1 zunimmt. Jedes φ_n enthält, wenn man al

it als möglich abgekürzt und alle Brüche von gleichem Nenner zu n Bruch vereinigt hat, $n-1$ Glieder.

Satz 2. Der Zähler des ersten Bruches besteht aus einem Faktor, folgende enthält einen Faktor mehr, der letzte hat $n-1$ Faktoren.

Satz 3. Die Zähler sind Produkte der Funktionen $f_2, f_3, \ldots f_n$. ilden alle möglichen Kombinationen samt Wiederholungen, doch so, wenn r die Anzahl der Faktoren bedeutet, die Summe aller Indizes Zeiger eines Produktes $s = n + r - 1$ ist. Ist allgemein eine solche ination $f_a^\alpha f_b^\beta f_c^\gamma \ldots f_n^\nu$, $(a, b, c, \ldots n = 2, 3, \ldots n;\ \alpha, \beta, \gamma, \ldots \nu \geqq 1)$, so ürlich die Zeigersumme $s = \alpha a + \beta b + \gamma c + \ldots \nu n$. Beispielsweise von $f_4 f_2^3 (= f_4 f_2 f_2 f_2)$ gleich $4 + 2 + 2 + 2 = 1.4 + 3.2$.

Satz 4. Die Indizessumme des Zählers ist jedesmal um 1 kleiner ie des Nenners.

Satz 5. Beide Zeigersummen, die des Zählers und die des Nenners, en bei jedem folgenden Bruch um je 1 zu.

Satz 6. Das Vorzeichen der Brüche ist bei geradem r positiv, bei adem r negativ, allgemein gleich dem Vorzeichen von $(-1)^r$.

Satz 7. Bezeichnet man allgemein mit $(f)_s^{(r)}$ alle möglichen Pro- der Funktion f und ihrer Ableitungen, wenn die Anzahl der Fak- $= r$, die Summe des Indizes $= s$ ist, mit $(f_2, f_3, \ldots)_s^{(r)}$ oder einfacher $_{2,3}\ldots)_s^{(r)}$ dasselbe mit dem Unterschiede, daß die Indizes erst bei innen, so sind die Zähler des allgemeinen Gliedes φ_n, wenn man ig von den Koeffizienten absieht, so auszudrücken: $(f_{2,3}\ldots)_{n+r-1}^{(r)}$, $,2,3,\ldots n-1$.

Ist für die Zeiger von f außer der untern Grenze p auch eine obere immt, so kann man schreiben: $(f_{p,q})_s^{(r)}$. Dementsprechend sind die gehörigen Koeffizienten mit $(\varkappa_{p,q})_s^{(r)}$ und beide Größen zugleich mit $f_{p,q})_s^{(r)}$ oder $(\varkappa f_{p,q})_s^{(r)}$ d. h. ohne Punkt zwischen $\varkappa$ und f zu bezeichnen.

Ersetzt man endlich die Funktionen $f_2, f_3, \ldots f_n$ durch die entspre- en Quotienten $f_{II}, f_{III}, \ldots, f_N$, so ist allgemein

$\sum_{r=1}^{r=n-1} (-1)^r \varkappa f_{II, III}\ldots)_{[n+r-1]}^{(r)}$ oder, da die Reihe von selbst abbricht,

.., wobei [2] eine andere Bezeichnungsweise ist für II, [3] für III...

] für N. Für $\varkappa$ fallen 2 und II, 3 und III u. s. w. zusammen.

Man beachte auch, daß man als Argument von $\varphi_{[n]}$ als einem zu- nfassenden Ausdrucke für eine Verbindung von $f_2, f_3 \ldots$ direkt x, ansehen kann.

Die Koeffizienten sind bestimmt entweder durch einen Einzelbruch urch den Zähler dieses Bruches allein. Den erstern bezeichne ich

mit $\Re f_a^\alpha f_b^\beta \dots f_n^\nu \cdot f_1^{-(s+1)}$, $s = \alpha a + \beta b + \dots \nu n$, den zweiten $K f_a^\alpha f_b^\beta \dots f_n^\nu$; $a, b, \dots n$ sind durchgehends voneinander verschied $\geqq 2$. Beide Ausdrücke sind natürlich gleichwertig.

Erinnern wir uns noch einmal des Verfahrens, durch welc Funktion φ_n ihren Ausdruck durch $f_1, f_2, f_3, \dots f_n$ gewonnen hat! nämlich $\varphi_n(y) = \frac{1}{f_1^n(x)} \cdot \varphi_{[n]}(x)$. Also $\varphi_{n+1} \cdot dy = dx \left[\frac{d}{dx} \cdot \frac{1}{f_1^n(x)} \varphi$

$\varphi_{n+1} = \frac{1}{f_1} \frac{d}{dx} \frac{1}{f_1^n} \varphi_{[n]}$, aber $\varphi_{n+1} = \frac{1}{f_1^{n+1}} \cdot \varphi_{[n+1]}$; daher allgemei

$\varphi_{[n+1]} = f_1^n \frac{d}{dx} \frac{1}{f_1^n} \varphi_{[n]}$. Das heißt also:

$\varphi_{[1]} = \frac{d}{dx} \varphi_{[0]}$; dieses ist, wie aus $\varphi_1 = \frac{1}{f_1}$ zu ersehen ist, $= 1$.

$\varphi_{[2]} = f_1 \frac{d}{dx} \frac{1}{f_1} \varphi_{[1]} = f_1 \frac{d}{dx} \frac{1}{f_1}$;

$\varphi_{[3]} = f_1^2 \frac{d}{dx} \frac{1}{f_1^2} \varphi_{[2]} = f_1^2 \frac{d}{dx} \frac{1}{f_1^2} f_1 \frac{d}{dx} \frac{1}{f_1} = f_1^2 \frac{d}{dx} \frac{1}{f_1} \frac{d}{dx} \frac{1}{f_1}$;

$\varphi_{[4]} = f_1^3 \frac{d}{dx} \frac{1}{f_1^3} \varphi_{[3]} = f_1^3 \frac{d}{dx} \frac{1}{f_1^3} f_1^2 \frac{d}{dx} \frac{1}{f_1} = f_1^3 \frac{d}{dx} \frac{1}{f_1} \frac{d}{dx} \frac{1}{f_1} \frac{d}{dx} \frac{1}{f_1}$.

— — — — — — — — — — — — — — — — — — —

Daher, wenn $\left(\frac{d}{dx} \frac{1}{f_1}\right)^{<n>}$ die formelle n malige Nebeneinandersetz

$\frac{d}{dx} \frac{1}{f_1}$ bedeutet, $\varphi_{[n]} = f_1^{n-1} \left(\frac{d}{dx} \frac{1}{f_1}\right)^{<n-1>}$.

$R(h)$ erscheint nun in einer dritten Gestalt, nämlich

$$R(h) = x = h - f_0 + \frac{f_0^2}{2!} f_1 \frac{d}{dx} \frac{1}{f_1} - \frac{f_0^3}{3!} \cdot f_1^2 \left(\frac{d}{dx} \frac{1}{f_1}\right)^{<2>} + \dots .$$

Gibt man nun darauf acht, wie ein solcher Koeffizient z kommt, nämlich durch Reduzierung gewisser Differentiationser aus dem vorhergehenden Gliede, nachdem man $\frac{dx}{dy}$ durch $\frac{1}{f_1}$ ersetzt ist leicht einzusehen, daß ein jeder Koeffizient $\Re f_a^\alpha f_b^\beta \dots f_n^\nu \cdot f_1^{-(}$

$= l_1 \Re f_a^{\alpha-1} f_{a-1} f_b^\beta \dots f_n^\nu \cdot f_1^{-s} + l_2 \Re f_a^\alpha f_b^{\beta-1} f_{b-1} \dots f_n^\nu \cdot f_1^{-}$

$+ l_n \Re f_a^\alpha f_b^\beta \dots f_n^{\nu-1} f_{n-1} \cdot f_1^{-s}$. — — — — — — — —

d. h. bei den f mit positivem Exponenten werden die Indizes der Re und zwar immer nur bei je einem Faktor um 1 vermindert. l_1, sind numerische Faktoren. l_1 bedeutet die Anzahl von f_{a-1} in

aden Ausdrucke $\mathfrak{K}_1, l_2$ die Anzahl von $f_{b-1}, \ldots, l_n$ die Anzahl von f_{n-1}
n zu diesen Zahlen gehörenden $\mathfrak{K}$. Mit andern Worten: $l_1 =$ dem
nenten von f_{a-1} u. s. w., nachdem man sämtliche Funktionen von
iem Index in einem $\mathfrak{K}$ zu einer Potenzgröße zusammengezogen hat.
einmal die $l_1, l_2, \ldots l_n$ bestimmt, so kann man in den Ausdrücken
weglassen, wenn man das Symbol $\mathfrak{K}$ durch K ersetzt. Der Beweis
hr einfach. Denn (3) enthält die gleichen Operationen, durch welche
1 gefunden haben, nur in einer andern Anordnung.

$\ldots f_n^{\nu} f_1^{-(s+1)} \cdot \mathfrak{K} f_a^{\alpha} f_b^{\beta} \ldots f_n^{\nu} f_1^{-(s+1)}$ ist ja offenbar entstanden
Summation derjenigen Glieder, welche nach der Differentiation von
$f_{a-1} f_b^{\beta} \ldots f_n^{\nu} f_1^{-s} \mathfrak{K}_1 + f_a^{\alpha} f_b^{\beta-1} f_{b-1} \ldots f_n^{\nu} f_1^{-s} \mathfrak{K}_2 + \ldots f_a^{\alpha} f_b^{\beta} \ldots$
$f_{n-1} f_1^{-s} \mathfrak{K}_n$ das Produkt $f_a^{\alpha} f_b^{\beta} \ldots f_n^{\nu}$ enthalten. ($\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots \mathfrak{K}_n$
ürzere Bezeichnungen für die auf der rechten Seite von (3) zu den
echenden l gehörigen Ausdrücke $\mathfrak{K}$).

Die Ausführung dieser Differentiation und die Multiplikation mit
wodurch f_{a-1} zu f_a, f_{b-1} zu f_b, $\ldots f_{n-1}$ zu f_n und f_1^{-s} zu
$+1)$ wird, liefert eben $(l_1 \mathfrak{K}_1 + l_2 \mathfrak{K}_2 + l_n \mathfrak{K}_n) f_a^{\alpha} f_b^{\beta} \ldots f_n^{\nu} \cdot f^{-(s+1)}$.
st ein Index z. B. $a = 2$, so ist f_2 im Gliede von $\mathfrak{K}_1$ entstanden durch
ntiation von $f_1^{-s'}$. Es wird $\frac{d}{dx} f_1^{-s'} = f_1^{-s'-1} f_2$. Nach der
ikation mit $\frac{1}{f_1}$ wird $f_1^{-s'-1}$ zu $f_1^{-s'-2}$. Dieser Ausdruck muß
ch sein mit $f_1^{-(s+1)}$; also $-s'-2 = -s-1$; $-s' = -s+1$,
reinstimmung mit $f_a^{\alpha-1} f_{a-1} f_1^{-s} = f_a^{\alpha-1} f_1^{-s+1}$.

)urch die vorstehende Formel wird auch das Vorzeichen der Ko-
ten bestimmt.

eispiele:

$f_2 f_1^{-9} = 2 \mathfrak{K} f_3 f_2 f_2 f_1^{-8} - 7 \mathfrak{K} f_3^2 f_1 f_1^{-8}$
$= 2 K f_3 f_2^2 - 7 K f_3^2 = 2(-105) - 7 \cdot 10 = -280.$

$f_3 f_1^{-9} = 1 \cdot \mathfrak{K} f_4 f_3 f_1^{-8} + 1 \cdot \mathfrak{K} f_5 f_2 f_1^{-8} = K f_4 f_3 + K f_5 f_2 =$
$= 35 + 21 = 56$

$f_1^{-10} = 1 \cdot \mathfrak{K} f_3^2 f_2 f_1^{-9} = K f_2^3 f_2 = -280$

$f_3 f_2 f_1^{-10} = 2 \mathfrak{K} f_3^2 f_2 f_1^{-9} + 2 \mathfrak{K} f_4 f_2^2 f_1^{-9} + (-8) \mathfrak{K} f_4 f_3 f_1 f_1^{-9} =$
$= 2 K f_3^2 f_2 + 2 K f_4 f_2^2 - 8 K f_4 f_3 = 2(-280)$
$+ 2(-210) - 835 = -1260.$

$f_1^{-5} = -3 \mathfrak{K} f_2 f_1 f_1^{-4} = -3 K f_2 = -3(-1) = 3.$

6) $\Re f_2^3 f_1^{-7} = -5\,\Re f_2^2 f_1 f_1^{-6} = -5\,K f_2^2 = -3.5.$

7) $\Re f_2^4 f_1^{-9} = -7\,\Re f_2^3 f_1 f_1^{-8} = -7\,K f_2^3 = 1.3.5.7.$

8) $\Re f_2^5 f_1^{-11} = -9\,\Re f_2^4 f_1 f_1^{-10} = -9\,K f_2^4 = -1.3.5.7.9.$

Die vier letzten Beispiele sind leicht zu generalisieren. Der al
Wert von $K f_2^n$ ist $= 1.3.5.7 \ldots (2n-1)$ oder $= \frac{(2n-1)!}{2^{\frac{2n-2}{2}} \cdot \frac{2n}{2}}$

$= \frac{(2n-1)!}{2^{n-1} \cdot (n-1)!}$. Diesen letztern Ausdruck erhält man, wenn
der natürlichen Zahlenreihe $1.2.3.4. \ldots (2n-1)$ jede zweit
durch 2 dividiert. Es gibt $2n-1-1$ solcher Divisionen. Das, wa
den Divisionen außer $1.3.5.7 \ldots$. übrigbleibt, ist $= \frac{2n-2}{2}!$ E
also $(2n-1)!$ noch dadurch dividiert. Aus $1.3.5 \ldots 2n$ würd
auf demselben Wege $\frac{2n!}{2^n . n!}$ erhalten. Beide Ausdrücke müssen na
einander gleich sein.

II.

Direkte Darstellung der Koeffizienten. Erweiterung der binatorik. Die funktionellen Zahlen $\varkappa$, τ und einige ihrer schaften. Bekanntlich liefert $(x+y+u)^n$ ein Polynom, dessen die Form haben $x^\alpha y^\beta \ldots u^\nu$; $\alpha+\beta+\ldots\nu = n$. Der zu irgend Gliede gehörige Koeffizient ist gleich $\frac{n!}{\alpha!\,\beta! \ldots \nu!}$, der Permutat der Elemente $x, x, x \ldots$ (α mal); $y, y \ldots$ (β mal); $\ldots$; $u, u \ldots$ (ν ma kann vermuten, daß auch bei den Koeffizienten der Umkehrungsr analoges Gesetz herrschen muß; denn ein jeder ist durch die Zus setzung des zu ihm gehörigen Produktes $f_a^\alpha f_b^\beta \ldots f_n^\nu$ vollkommen be Durch dasselbe Produkt muß eine besondere Art der Permutation Elemente mitbestimmt sein. Ich will nun meinen Gedankengang, d auf dem Wege der Induktion wirklich zum Ziele geführt hat, aus g Gründen unverändert wiedergeben. Ich möchte nämlich zeigen, für Wegen man oft, auf gewisse Fingerzeige achtend, ans Ziel und daß die Analogie in der Mathematik, wie verschiedenartig a Gebiet ist, von dem sie hervorgeholt wurde, etwas mehr zu bedeu als eine bloße Ähnlichkeit.

Ich dachte an die Multiplikation Hamilton'scher Quaternio der Grassmann'schen extensiven Größen, wo die Faktoren nicht un

gungen kommutativ sind, stellte mit diesen die Elemente der Per-
ionen in Parallele und fand, daß der Quaternionen-Multiplikation die
mliche Permutation, und der gewöhnlichen Multiplikation die Quater-
n-Multiplikationen gleicher Quaternionen und die Permutation gleicher
nte entspricht. Der allgemeinste Fall muß in der Mitte liegen. Bei
un folgenden Versuchen ist mir, ein seltener Zufall, gleich der erste
gelungen. Ich denke mir mehrere Elemente: a, b, c, d, e, f in der
einer Multiplikation $abcdef$. Gewisse Gruppen von Elementen klam-
ch ein: z. B. $(ab)\,(cd)\,(ef)$ und definiere den Ausdruck in der Weise,
nerhalb der Klammer die Elemente (Faktoren) kommutativ sein sollen,
$ab) = (ba)$ liefert nur eine Permutation, als ob $a = b$ wäre. Klam-
ch den ganzen Ausdruck noch einmal ein, also $((ab)\,(cd)\,(ef))$, so
un auch die Gruppen kommutativ, mit andern Worten: es sind die
nen Elemente in eine gewisse Anzahl von Klammern, deren Reihen-
icht bestimmt, also willkürlich ist, zu verteilen. Auf wie viele Arten
las geschehen?

Nachdem wir so den Permutationsbegriff verallgemeinert haben,
wir einige dieser allgemeinen Permutationszahlen berechnen.

Vorbemerkung. Sind in den Klammern nur Punkte, so bedeutet
ie übrigen Elemente.

) $P((ab)\,(cd)) = (ab)\,(\,.\,.\,),\ (ac)\,(\,.\,.\,),\ (ad)\,(\,.\,.\,) = 3$, d. h. ein Ele-
ird mit allen übrigen verbunden, der Rest kommt in die leeren
ern.

$P((ab)\,(cd)\,(ef)) = (ab)\,P((cd)\,(ef)),\ (ac)\,P((\,.\,.\,)\,(\,.\,.\,))$,
$(\,.\,.\,)\,(\,.\,.\,))$, $(ae)\,P((\,.\,.\,)\,(\,.\,.\,))$, $(af)\,P((\,.\,.\,)\,(\,.\,.\,)) = (6-1)\,.\,3 = 5\,.\,3$.

$P((ab)\,(cd)\,(ef)\,(gh)) = (8-1)\,P((cd)\,(ef)\,(gh)) = 7\,.\,5\,.\,3$; denn
liefert a mit jedem folgenden Elemente 7 d. h. $n-1$ Amben
ersten Blick sind diese Permutationszahlen, abgesehen vom Vor-
identisch mit Kf_2^2, Kf_2^3, Kf_2^4. Es liegt daher nahe, dieses Ver-
auf die übrigen Koeffizienten sinngemäß auszudehnen.

$Kf_3\,f_2$ müßte dann, absolut genommen, also $|Kf_3\,f_2|$ gleich
$(abc)\,(de)$). In der Tat ist $P((de)\,(abc)) = (ab)\,(\ldots),\ (ac)\,(\ldots)$,
$),\ (ae)\,(\ldots),\ (bc)\,(\ldots),\ (bd)\,(\ldots),\ (be)\,(\ldots),\ (cd)\,(\ldots),\ (ce)\,(\ldots)$,
$) = \binom{5}{2} = 10$.

$|Kf_4| = P(abcd) = 1$.

$|Kf_4\,f_2| = P((ab)\,(cdef)) = (ab)\,(\ldots.),\ (ac)\,(\ldots.),\ \ldots$
$= 15$.

$|Kf_3^2| = P((abc)\,(def)) = (abc)\,(\ldots),\ .\ .\ .\ .\ .$

Bildet man alle Ternen der 6 Elemente, so ist ihre Anzahl

Nun aber enthalten die Klammern je gleich viele Elemente. Infolg verringert sich die Anzahl um die Hälfte. Denn alle Ternen de Klammer müssen in der zweiten wieder erscheinen. $P((abc)(d$

also $= \frac{1}{2}\binom{6}{3} = 10.$

Wir haben uns nun in diesen Kalkül soweit hineingearbei wir nun zur Generalisierung der Beispiele schreiten können. $Kf_{a\cdot}^{\alpha}$ entspricht einer Permutation von $s = \alpha a + \beta b + \ldots \nu n$ Elemen a Elemente sind in α Klammern, je b Elemente in β Klammern, je n Elemente in ν Klammern verteilt. Der ganze Ausdruck komt in eine sekundäre Klammer. Wir bilden zunächst alle möglichen tationen. Ihre Anzahl ist $s!$. Nun sind je a Elemente in α K kommutativ, ebenso b Elemente in β Klammern u. s. f., d. h. sie ha selbe Wirkung auf die Permutationszahl, als ob sie gleich wären ist $s!$ durch $a!^{\alpha} b!^{\beta} \ldots n!^{\nu}$ zu dividieren. Endlich ist zu beach in den Klammern, welche gleich viel Elemente enthalten, diesell bindungen so oft wieder erscheinen, als es Permutationen vo Klammerausdrücken gibt. Da nun auch die Klammerausdrücke kundäre Elemente der sekundären Klammer kommutativ sind, sc Ganze noch durch diese Permutationen, deren Anzahl offenbar g $\alpha!\,\beta!\ldots\nu!$, zu dividieren.

Stellen wir uns beispielsweise vor, daß in irgend einer Ve von Elementen auch $(ab)(cd)(ef)$ vorkommt. Da wegen der sel Klammer die einmal gewählte Reihenfolge von $\mathfrak{k}_2\,\mathfrak{k}_2\,\mathfrak{k}_2 \ldots \mathfrak{k}_n$ ($\mathfrak{k}_n$ bedeu Klammerausdruck mit n Elementen) festgelegt ist, — offenbar k auf dasselbe hinaus, ob man eine Reihe von Klammerausdrücken mutativ oder als nicht permutabel erklärt —, so ist klar, da Permmutationen:

$\ldots(ab)(cd)(ef)\ldots$
$\ldots(ab)(ef)(cd)\ldots$
$\ldots(cd)(ab)(ef)\ldots$
$\ldots(cd)(ef)(ab)\ldots$
$\ldots(ef)(ab)(cd)\ldots$
$\ldots(ef)(cd)(ab)\ldots$

zusammenfallen und sich nur auf 1 Per reduzieren, mit anderen Worten: die Perm zahl ist durch 3! zu dividieren. Dasselbe andere Klammerausdrücke von gleich menten.

Es ist also $\left|Kf_a^{\alpha} f_b^{\beta} \ldots f_n^{\nu}\right| = \frac{(\alpha a + \beta b + \ldots \nu n)!}{\alpha!\,\beta!\ldots\nu!\; a!^{\alpha} b!^{\beta} \ldots n!^{\nu}}$ ur

Vorzeichen der Koeffizienten gleich ist dem von $(-1)^r$, $r =$ An Faktoren, also $= \alpha + \beta + \ldots \nu$), so ist

$$f_b^\beta \ldots f_n^\nu = (-1)^{\alpha+\beta+\ldots\nu} \cdot \frac{(\alpha a + \beta b + \ldots \nu n)!}{\alpha!\,\beta! \ldots \nu!\; a!^\alpha\, b!^\beta \ldots n!^\nu} \quad -- \quad (4).$$

Der Ausdruck ist selbstverständlich, da er ja eine Anzahl von Permutationen bedeutet, eine ganze Zahl.

Durch diese Formel in Verbindung mit den oben entwickelten Sätzen sind wir nun in den Stand gesetzt, jedes beliebige φ_n unabhängig vom vorhergehenden φ_{n-1} direkt auszudrücken.

Beweis. Mittelst der Formel (4) lassen sich eine Menge Rekursionsformeln entwickeln, eingliedrige und mehrgliedrige. Die eingliedrigen sind sehr einfach zu ermitteln. So ist z. B.

$$K f_b^\beta = (-1)^{\alpha+\beta} \cdot \frac{(\alpha a + \beta b)!}{\alpha!\,\beta!\; a!^\alpha\, b!^\beta}, \text{ u. } K f_c^\gamma f_d^\delta = (-1)^{\gamma+\delta} \cdot \frac{(\gamma c + \delta d)!}{\gamma!\,\delta!\; c!^\gamma\, d!^\delta}.$$

Die beiden Gleichungen, in Proportion gesetzt, ergeben:

$$K f_b^\beta = K f_c^\gamma f_d^\delta \cdot (-1)^{\alpha+\beta-\gamma-\delta} \cdot \frac{(\alpha a + \beta b)!}{\alpha!\,\beta!\; a!^\alpha\, b!^\beta} \cdot \frac{\gamma!\,\delta!\; c!^\gamma\, d!^\delta}{(\gamma c + \delta d)!}.$$

Die mehrgliedrigen Rekursionsformeln $K = \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \ldots \lambda_n K_n$ haben im allgemeinen mehrere Kombinationen der Werte $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ der diophantischen Gleichung genügen. Erweist sich nun nach der Einsetzung der Werte von $K, K_1, K_2, \ldots K_n$ aus (4) und die der Werte l_1 l_2 für $\lambda_2, \ldots l_n$ für λ_n aus (3) die obige Gleichung als eine identische, so ist die Formel (4) auf die bewiesene Formel (3) zurückgeführt und der Beweis für die Richtigkeit von (4) ist erbracht.

Ich zerlege den Beweis in drei Stufen: einen Haupt- und zwei Ergänzungssätze.

Vorerst wollen wir annehmen, daß $a > b > c > \ldots n$ ist, und zwar $a - 1, b \geqq c + 1, \ldots n > 2$, so daß also $a - 1$, ebenso $b - 1$ u. s. w. keinem andern Index zusammenfallen und auch kein Index $= 1$ werden.

Daher ist $l_1 = 1, l_2 = 1, \ldots l_n = 1$ und die Formel (3) lautet:

$$\ldots{}^{\alpha+\beta+\ldots\nu} \cdot \frac{(\alpha a + \beta b + \ldots \nu n)!}{\alpha!\,\beta! \ldots \nu!\; a!^\alpha\, b!^\beta \ldots n!^\nu} =$$

$$\ldots{}^{\alpha-1+1+\beta+\ldots\nu} \cdot \frac{((\alpha-1)\,a + 1.\,(a-1) + \beta b + \ldots \nu n)!}{(\alpha-1)!\;1!\;\beta! \ldots \nu!\; a!^{\alpha-1}\,(a-1)!\;b!^\beta \ldots n!^\nu} +$$

$$\ldots{}^{\alpha+\beta-1+1+\ldots\nu} \cdot \frac{(\alpha a + (\beta-1)\,b + 1.\,(b-1) + \ldots \nu n)!}{\alpha!\,(\beta-1)!\;1! \ldots \nu!\; a!^\alpha\, b!^{\beta-1}\,(b-1)! \ldots n!^\nu} +$$

$$- -$$

$$\ldots{}^{\alpha+\beta+\ldots\nu-1+1} \cdot \frac{(\alpha a + \beta b + \ldots (\nu-1)\,n + 1.\,(n-1))!}{\alpha!\,\beta! \ldots (\nu-1)!\;1!\; a!^\alpha\, b!^\beta \ldots n!^{\nu-1}\,(n-1)!}.$$

ist nun einerseits $\frac{1}{(\alpha-1)!} = \frac{\alpha}{\alpha!}, \frac{1}{(\beta-1)!} = \frac{\beta}{\beta!}, \ldots \frac{1}{(\nu-1)!} =$

$= \frac{\nu}{\nu!}; \frac{1}{(a-1)!} = \frac{a}{a!}, \frac{1}{(b-1)!} = \frac{b}{b!}, \cdots \frac{1}{(n-1)!} = \frac{n}{n!};$ andrerse

wenn man $\alpha a + \beta b + \ldots \nu n = s$ und $\alpha + \beta + \ldots \nu = r$ setzt,

$((\alpha - 1)a + (a-1) + \beta b + \ldots \nu n)! = (\alpha a - a + a - 1 + \beta b +$

$= (s-1)!,$

$(\alpha a + (\beta - 1)b + (b-1) + \ldots \nu n)! = (\alpha a + \beta b - b + b - 1 +$

$= (s-1)!,$

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

$(\alpha a + \beta b + \ldots (\nu - 1)n + n - 1)! = (\alpha a + \beta b + \ldots \nu n - n +$

$= (s-1)!$

Also ist $(-1)^r \frac{s!}{\alpha!\beta! \ldots \nu!\, a!^\alpha b!^\beta \ldots n!^\nu} =$

$= (-1)^r \cdot \frac{(s-1)!\,\alpha a}{\alpha!\beta! \ldots \nu!\, a!^{\alpha-1} a\, b!^\beta \ldots n!^\nu} + (-1)^r \cdot \frac{(s-1)!\,b\beta}{\alpha!\beta! \ldots \nu!\, a!^\alpha b!^{\beta-1}}$

$+ \ldots . (-1)^r \cdot \frac{(s-1)!\,\nu n}{\alpha!\beta! \ldots \nu!\, a!^\alpha b!^\beta \ldots n!^{\nu-1} n!} =$

$= (-1)^r \cdot \frac{(s-1)!\,(\alpha a + \beta b + \ldots \nu n)}{\alpha!\beta! \ldots \nu!\, a!^\alpha b!^\beta \ldots n!^\nu} = (-1)^r \cdot \frac{s!}{\alpha!\beta! \ldots \nu!\, a!^\alpha b!^\beta}$

— — — —

was zu beweisen war.

1. Ergänzungssatz. Es kann nun auch der Fall eintret der eine oder andere Index mit einem andern zusammenfällt, d $a - 1 = b, b - 1 = c$ wird u. s. f. Es ist nun zu beweisen, daß die an der vorstehenden Gleichung (5) nichts ändert. Es sei z. B. a - Dann ist der Exponent von b: $\beta + 1$, so daß $l_1 = \beta + 1$ ist. N Rekursionsformel (3) ist nun zu schreiben:

$(-1)^{\alpha-1+\beta+1+\ldots\nu} \cdot (\beta+1) \cdot \frac{((\alpha-1)a + (\beta+1)b + \ldots \nu n}{(\alpha-1)!\,(\beta+1)! \ldots \nu!\, a!^{\alpha-1} b!^{\beta+1}}$

Wegen $\frac{1}{(\alpha-1)!} = \frac{\alpha}{\alpha!}, \frac{1}{(\beta+1)!} = \frac{1}{\beta!\,(\beta+1)}, \frac{1}{a!^{\alpha-1}} = \frac{a!}{a!^\alpha}$ und $\frac{1}{b}$

$\frac{1}{b!^\beta\, b!}$ geht der Ausdruck, da $b = a - 1$ ist, über in

$(-1)^r \cdot (\beta+1) \cdot \frac{(\alpha a - a + \beta b + a - 1 + \ldots \nu n)!\,\alpha \,.\, a!}{\alpha!\,\beta! \ldots \nu!\, a!^\alpha\, b!^\beta \ldots n!^\nu\,(\beta+1)\,(a-1)!}$ und

$a! = (a-1)!\,a$ weiter $= (-1)^r \cdot \frac{(s-1)!\,\alpha a}{\alpha!\,\beta! \ldots \nu!\, a!^\alpha\, b!^\beta \ldots n!^\nu}$, ein A der mit dem entsprechenden in (5) vollkommen übereinstimmt.

2. Ergänzungssatz. Es bleibt nur noch ein Fall übri geschieht, wenn ein Index z. B. $n - 1$ gleich 1 wird? n ist d und l_n wird nach (3) $= -s + 1$. Der entsprechende Summan ist nun zu schreiben:

$)^{\alpha+\beta+..\nu-1} \cdot (1-s) \cdot \frac{(\alpha a + \beta a + \ldots (\nu-1)n)!}{\alpha!\,\beta!\ldots(\nu-1)!\,a!^{\alpha}\,b!^{\beta}\,n!^{\nu-1}}$. Das ist wei-

gleich $(-1)^{\alpha+\beta+\ldots\nu}(s-1) \cdot \frac{(\alpha a + \beta b + .. \nu n - n)!\,\nu.n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\nu!\,a!^{\alpha}\,b!^{\beta}\ldots n!^{\nu}}$ und

n $n=2, 2!=2$, also $n!=n$: $(-1)^{r}(s-1) \cdot \frac{(s-2)!\,\nu.n}{\alpha!\,\beta!..\nu!\,a!^{\alpha}\,b!^{\beta}\ldots n!^{\nu}}$.

er wegen $(s-2)! = \frac{(s-1)!}{(s-1)}$ weiter

$-1)^{r}(s-1) \cdot \frac{(s-1)!}{\alpha!\,\beta!\ldots\nu!\,a!^{\alpha}\,b!^{\beta}\ldots n!^{\nu}\,(s-1)}$.

Dadurch sind alle möglichen in Betracht kommenden Fälle erschöpft ler Beweis perfekt.

Die Möglichkeit weiterer Verallgemeinerungen der Kombinatorik seits durch Einführung von Klammern höherer Stufe als der sekun-, andrerseits durch Gleichsetzung einiger Gruppen der primären nte will ich nur andeuten. Dafür möchte ich noch einige typische n der Koeffizienten und ihre Ermittlung durch eingliedrige Rekurormeln besprechen.

Solche Reihen bilden 1) die Koeffizienten von $f_3 f_2, f_4 f_2, f_5 f_2, \ldots f_n f_2 =$, 21, 28, 36 ..... (f_2^2 gehört nicht mehr zu diesem Typus, da die f von einander verschieden sind).

Die eingliedrige Rekursionsformel dieser Reihe ist

$_2 = K f_{n-1} f_2 \cdot (-1)^{1+1-1-1} \cdot \frac{(n+2)!}{1!\,1!\,n!\,2!} \cdot \frac{1!\,1!\,(n-1)!\,2!}{(n-1+2)!} =$

$_{n-1} f_2 \cdot \frac{n+2}{n}$.

2) Für die Reihe $f_n f_m$, $n = m+1, m+2, \ldots$ findet man auf dem- Wege die Rekursionsformel: $K f_n f_m = K f_{n-1} f_m \cdot \frac{n+m}{n}$. Ebenso

3) Für die Reihe $f_2^1, f_2^2, f_2^3, \ldots f_2^n = -1, 3, -15, 105, -945,$ $-135135, \ldots$: $K f_2^n = K f_2^{n-1}(-1)^{n-n+1}(2n-1)$.

Alle diese Ausdrücke zeichnen sich durch große Einfachheit aus, (es in ihnen die Faktoriellen), und es lassen sich in dieser Weise noch enge ähnlicher Formeln aus (4), beispielsweise: f_m^n, $n = 1\,2,3,\ldots$ ach Belieben entwickeln, da jeder Koeffizient von jedem andern itet werden kann.

Die „funktionellen" Zahlen. Die Koeffizienten $K f_a^{\alpha} f_b^{\beta} \ldots f_n^{\nu}$ las- h durch Einführung gewisser „funktionellen" Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots \varkappa_n$ n einer andern Form darstellen. Diese Zahlen erinnern in gewisser ng an die Grassmann'schen extensiven Größen $e_1, e_2, \ldots e_n$. Sie

haben das miteinander gemein, daß es bei beiden wesentlich dar kommt, ob ihre Indizes gleich oder verschieden sind. Unter „funktio Zahlen verstehe ich allgemein solche Größen, welche, wie die Ha schen Quaternionen oder die Grassmann'schen Raumgrößen, ein mehrere Funktionen repräsentieren. Für sie gelten bekanntlich be Gesetze der niedern Operationen, speziell der Multiplikation. I sind die Faktoren eines Produktes im allgemeinen auch nicht kom wie die Symbole von Funktionen f, f', f'' etc. im allgemeinen auc kommutativ sind. Ich definiere nun die Multiplikation der Größer $\varkappa_3, \ldots \varkappa_n$, von denen einige auch gleich sein können, so:

$$\left[\varkappa_a^{\alpha}\varkappa_b^{\beta}\ldots\varkappa_n^{\nu}\right] = \frac{(\alpha a + \beta b + \ldots \nu n)!}{\alpha!\,\beta!\ldots\nu!\;a!^{\alpha}\,b!^{\beta}\ldots n!^{\nu}},$$

also ist $\left|Kf_a^{\alpha}f_b^{\beta}\ldots f_n^{\nu}\right| = \left[\varkappa_a^{\alpha}\varkappa_b^{\beta}\ldots\varkappa_n^{\nu}\right]$.

Nun sind die Indizes natürlich nicht mehr auf die Zahlen 2, beschränkt, sondern ganz willkürlich. Die eckige Klammer bedeu vor der Ausführung der Multiplikation alle Größen mit gleiche zu einer Potenzgröße zusammenzuziehen sind. Deshalb ist au $\left[\varkappa_a^{\alpha}\varkappa_b^{\beta}\ldots\varkappa_c^{\gamma}\varkappa_d^{\delta}\ldots\right] = \left[\varkappa_a^{\alpha}\varkappa_b^{\beta}\ldots\right]\cdot\left[\varkappa_c^{\gamma}\varkappa_d^{\delta}\ldots\right]$, wohl aber ist $\left[\varkappa_a^{\alpha}\varkappa_b^{\beta}\ldots+\varkappa_c^{\gamma}\varkappa_d^{\delta}\ldots\right] = \left[\varkappa_a^{\alpha}\varkappa_b^{\beta}\ldots\right]+\left[\varkappa_c^{\gamma}\varkappa_d^{\delta}\ldots\right]$. Innerh eckigen Klammer gelten die gewöhnlichen Operationsgesetze.

Ein Blick auf die Formel (6) läßt erkennen, daß die Größen $\varkappa$ dukt kommutativ sind. Auch der Ausdruck $\sum_{r=1}^{r=\infty}(-1)^r(\varkappa f_{\text{II}},\text{I}$ ist uns jetzt verständlicher geworden. $\varkappa_a^{\alpha}\varkappa_b^{\beta}\ldots$ (die eckigen Kl kann man, wo ein Mißverständnis nicht zu befürchten izt, auch fortla nun gerade so ein Produkt, wie die dazu gehörigen Funktionen f und wir wissen nun, welche Bedeutung diesem zukommt. Andere „ nelle" Zahlen, so z. B. σ_a mit der Multiplikationsregel $\sigma_a^{\alpha}\sigma_b^{\beta}\ldots$ $\frac{(\alpha a+\beta b+\ldots\nu n)!}{(\alpha+\beta+\ldots+\nu)!\;a!^{\alpha}\,b!^{\beta}\ldots n!^{\nu}}$ oder τ_a mit der Multiplikationsre $\tau_a^{\alpha}\tau_b^{\beta}\ldots\tau_n^{\nu} = \frac{(\alpha a+\beta b+\ldots\nu n)!}{\alpha!\,\beta!\ldots\nu!\;a^{\alpha}\,b^{\beta}\ldots n^{\nu}}$ u. a. werden wir weiter un nen lernen.

Hier, wo schon von symbolischen Ausdrücken die Rede ist, ich noch ein Symbol besprechen, von dem später Gebrauch

en wird. Ich bezeichne die natürliche Zahlenreihe: 1, 2, 3, ... in
mit einem besondern Buchstaben: t. Dann ist $1 + t = 2, 3, 4, \ldots$;
$t = 3, 5, 7, \ldots$; $2t = 2, 4, 6, \ldots$; $[t] = I, II, III \ldots$ Nun kann man den
erwähnten Summenausdruck schreiben $\sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^r \left(\varkappa f_{[1+t]}\right)^{(r)}_{[n+r-1]}$,
ür $f_1 = f_2 = f_3 = \ldots f_n = 1$, also auch $f_{II} = f_{III} = \ldots f_N = 1$ über-
in $\sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^r \left(\varkappa_{1+t}\right)^{(r)}_{n+r-1}$. Er bedeutet die Summe aller Koeffi-
n in einem Gliede φ_n. Sind alle f mit geradem Index $= 0$, die
$n = 1$, so bedeutet $\sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^r \left(\varkappa_{1+2t}\right)^{(r)}_{n+r-1}$ die Summen aller
zienten eines φ_n mit lauter ungeraden Zeigern, u. a. m.

Einige Eigenschaften der Größen $\varkappa$ und einige Verifizierungen mkehrungsreihe.

l) Bildet man die Summe aller Koeffizienten der φ_n-Polynome, so man der Reihe nach für φ_2: -1, φ_3: $-1+3=2$, φ_4: $-1+10 = -6 = -1.2.3 = -3!$, φ_5: $-1+15+10-105+105 = 1!$ u. s. f.

Man kann schon daraus mit fast völliger Sicherheit schließen, daß die ügliche Summe für φ_n lauten wird: $(-1)^{n-1}.(n-1)!$. Man kann hreiben: $\sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^r \left(\varkappa_{1+t}\right)^{(r)}_{n+r-1} = (-1)^{n-1}(n-1)!$ — (7)

s ist vielleicht nicht überflüssig, hier noch einmal an die Tatsache nern, daß die Reihen $\sum_{r=1}^{r=\infty} \ldots = \sum_{r=1}^{r=n-1}$ sind, d. h. daß sie $n-1)^{\text{ten}}$ Gliede von selbst abbrechen.

) Wir bilden nun die Summen aller Koeffizienten mit nur ungeraden , mit andern Worten: wir lassen aus den obigen Summen alle die- Addenden aus, welche irgend einen geraden Index enthalten. hält dann für φ_2: 0, φ_3: -1, φ_4: 0, φ_5: $-1+10 = 9 = 3^2$, φ_6: 0, $+56-280 = -225 = -(1.3.5)^2$, φ_8: 0 u. s. w.

iese wenigen Daten lassen uns die beiden Gesetze erkennen:

$$-1)^r \left(\varkappa_{1+2t}\right)^{(r)}_{n+r-1} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} (1.3.5 \ldots (n-2))^2$$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[\varkappa_2^{\frac{n-1}{2}}\right]^2$$

Für $f_3 = f_7 = f_{11} \ldots = -1$ sind, wie man sich durch Einsetz
Werte in $\varphi_3, \varphi_4 \ldots$ leicht überzeugen kann, die Summen alle positi
daß der absolute Wert geändert wird, d. h.

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^r \cdot \left((-1)^{\frac{n-1}{2}} \varkappa_{1+2t}\right)^{(r)}_{n+r-1} = \left[\varkappa_2^{\frac{n-1}{2}}\right]^2 - -$$

Man achte darauf, daß $\left[\varkappa_2^{\frac{n-1}{2}}\right]^2 = \left[\varkappa_2^{\frac{n-1}{2}}\right] \cdot \left[\varkappa_2^{\frac{n-1}{2}}\right]$, als

gleich $\left[\varkappa_2^{\frac{n-1}{2} \cdot 2}\right]$.

Zweiter Satz. In den Polynomen φ_n mit geradem n
jedes Glied irgend ein f mit geradem Index, also ist die Sum
Koeffizienten $= 0$ — — — — — — — — — — — — —

Wollte man beide Sätze in einen Satz zusammenziehen, s
man annehmen. das $\varkappa_2^{\frac{n-1}{2}}$ für ein gerades n, d. h. $\varkappa_2$ mit einen

als Exponenten $= 0$ ist. Da in $(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{\left(\frac{n-1}{2} \cdot 2\right)!}{\frac{n-1}{2}!\, 2!^{\frac{n-1}{2}}}$ jeder

mit Ausnahme von $\frac{n-1}{2}!$ ein endliches Resultat liefert, müßte
für ein ungerades n unendlich groß sein.

Die in Rede stehenden Summen sind also gleich einer quadr
Zahl oder $= 0$.

Obgleich wir ziemlich sicher sein können, daß wir mit d
ausgeführten Generalisierungen das Richtige getroffen haben, s
wir doch noch einen Beweis folgen lassen. Er müßte sich allgem
den Werten der $\varkappa$-Zahlen ergeben müssen, ich schlage aber, u
zu ersparen, einen kürzeren Weg ein. Damit verbinde ich eini
fizierungen der Umkehrungsreihe, wenigstens für die ersten 8 Gli
Reihe, die wir wirklich berechnet haben. Da wir nur solche Fu
als Beispiele wählen, von denen die Umkehrungen bekannt sind,
immer erlaubt sein muß, vom Bekannten auf das Unbekannte zu s
auch wenn dieses Unbekannte auf direktem (aber schwierigeren
gefunden werden könnte, so können dieselben bekannten Umk
reihen, die wir für die ersten berechneten 8 Glieder als Verifi
gebrauchten, nachdem wir uns vergewissert haben, daß keine
begangen worden sind, für die weiteren Glieder als Beweismittel

1) Als erstes Beispiel wählen wir $f(x) = e^x$. Die Umkehrung der ıung $e^x = y$ (allgemein mit $Uf = \varphi$ bezeichnet) ist bekanntlich *lognat* : oder kürzer $ly = x$. Nun ist $f_1 = \frac{de^x}{dx} = e^x$; ebenso f_2, f_3 u. s. f. ür $h = 0$ $f = f_1 = f_2 = \ldots f_n = 1$. Folglich ist φ_n nach (7) $1)^{n-1}(n-1)!$ Durch diese Substitutionen verwandelt sich die Reihe

$$: 0 + \frac{y-1}{1} + \frac{(y-1)^2}{2}(-1) + \frac{(y-1)^3}{3!}2! + \frac{(y-1)^4}{4!}(-3!)\ldots$$

$$-1) - \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{3} - \frac{(y-1)^4}{4} + \ldots$$

)amit stimmt die Reihe für ly vollständig überein, wodurch die ırungsreihe verifiziert erscheint und die Formel (7) vom 8. Gliede bewiesen gelten kann.

) $f(x) = \sin x$. $U\sin = \arcsin$; also $\arcsin y = x$. $f_1(x) = \cos x$, $= -\sin x$, $f_3(x) = -\cos x$, $f_4(x) = \sin x$, $f_5(x) = \cos x$, $= -\sin x$, $f_7 x = -\cos x$ u. s. f.

ür $x = h = 0$ wird $f = 0$, $f_1 = 1$, $f_2 = 0$, $f_3 = -1$, $f_4 = 0$, $f_5 = 1$, $f_7 = -1$ u. s. w., d. h. f und alle Ableitungen von f mit geradem sind $= 0$, die übrigen sind $= (-1)^{\frac{n-1}{2}}$. Daher wird nach (8) und Summe der Koeffizienten für $\varphi_n = (1.3, 5 \ldots (n-2))^2$ resp. 0 Reihe (2) liefert:

$$+\frac{y}{1} + \frac{y^2}{2!}\cdot 0 + \frac{y^3}{3!}\cdot 1^2 + \frac{y^4}{4!}\cdot 0 + \frac{y^5}{5!}(1.3)^2 + \frac{y^6}{6!}\cdot 0 +$$

$$.5)^2 + \ldots = y + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!}(3)^2 + \frac{y^7}{7!}(3\cdot 5)^2 + \ldots .$$

kann man schreiben $\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}$, für $\frac{(3.5)^2}{7!}$ $\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}$, allgemein $\frac{..(n-2)}{..(n-1)}\cdot\frac{1}{n}$, eine Form, in der gewöhnlich die Reihe für $\arcsin y$ t.

$f(x) = \cos x$. $U\cos = \arccos$. Hier darf man h nicht gleich 0 da sonst die Glieder, mit Ausnahme des ersten, unendlich groß würden. Dagegen wird für $h = \frac{\pi}{2}$ die Reihe sub 3) gleich der negativ genommen, mit Ausnahme des ersten Gliedes, welches ja = ie Reihe (2) liefert also die bekannte Formel $\arccos y = \frac{\pi}{2} - \arcsin y$.

er zeigt sich besonders deutlich, daß die Konvergenz einer all- ı Umkehrungsreihe nicht *a priori* fixiert sein kann, d. h. sie muß emeine Konvergenzkonstante enthalten.

Von einer allgemeinen Umkehrungsreihe kann man ferner ve
daß sie nicht nur f in Uf, sondern auch Uf wieder in $UUf = f$
delt. Und in der Tat wird für $f(x) = lx$ $f_n(x) = (-1)^{n-1}(n-$
und für $x = h = 1$ ist $f_n = (-1)^{n-1}(n-1)!$ Diese Werte, in
Polynome eingesetzt, ergeben überall das interessante Resultat
Die Koeffizientensummen sind also von n ganz unabhängig. Ein
Monom hat die Form:

$$(-1)^{\alpha+\beta+..\nu} \cdot \frac{(\alpha a + \ldots \nu n)!\,((a-1)!(-1)^{a-1})^{\alpha} \ldots ((n-1)!(-}{\alpha! \ldots \nu!\; a!^{\alpha} \ldots n!^{\nu}}$$

$$= (-1)^{\alpha a + .. \nu n} \cdot \frac{(\alpha a + \ldots \nu n)!}{\alpha! \ldots \nu!\; a^{\alpha} \ldots n^{\nu}},$$ also die funktionelle Größe,

oben mit $\tau_\alpha^a \ldots \tau_n^\nu$ bezeichnet haben.

Man kann den eben gefundenen Satz in die Form kleiden:

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^s \tau_a^\alpha \tau_b^\beta \ldots \tau_n^\nu = 1 \quad - - - - - - - - - -$$

Aus (2) fließt wegen $f(1) = l1 = 0$ ohneweiters:

$$x = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \ldots = e^y$$

In dieser Weise kann man nach Belieben fortfahren, immer
sich die Umkehrungsreihe als richtig und man erhält als Nebengewi
Summensatz und oft eine besondere funktionelle Zahl. Die f_1,
werden für ein spezielles h zu einer Funktion von n oder zu ei
stanten. Verwendet man für diese das Symbol $\chi(n)$, so verdi
die Koeffizientensumme für φ_n eine eigene Bezeichnung. Ich schi
für $\Phi(\chi(n))$. Das Resultat dieser Summe ist wieder eine Funk
n, etwa $\psi(n)$ oder eine Konstante. Die Sätze (7) und (10) laute
der neuen Form: $\Phi(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ und $\Phi((-1)^{n-1}(n-$
Satz (8) und (9): $\Phi(\Re(-1)^{\frac{n-1}{2}}) = [\varkappa_2^{\frac{n-1}{2}}]^2$ und das Gegenstü
gewonnen aus der Umkehrung von *arcsin x* $\Phi([\varkappa_2^{\frac{n-1}{2}}]^2) = \Re(-$
Man erhält somit, wenigstens für diese beiden Fälle, die merk
Relation: $\Phi(\chi) = \psi$ und $\Phi(\psi) = \chi$.

(Um die χ und ψ als Funktionen von n deutlich hervortret
sen, habe ich geschrieben $\Re(-1)^{\frac{n-1}{2}}$, lies: der reelle Wert von (
Dadurch wird für ein gerades n das Symbol von selbst $= 0$).

Eine Ausdehnung dieser Relation auf andere Fälle wollen i
weiter versuchen. Wir haben die Leistungsfähigkeit unserer Uml
reihe mit ihren Koeffizienten und funktionellen Zahlen genügend
Sie offenbart namentlich durch die zweiten Umkehrungen ein

ısnatur. Sie kann in jede Reihe übergehen und sich wieder zurück h selbst verwandeln. Es ist sehr verlockend, in dieser Weise noch es Material für eine „Theorie der funktionellen Zahlen“ zu sammeln, das würde uns zuweit vom eigentlichen Thema ablenken; auch we- aummangels müssen wir nun diesen Gegenstand verlassen.

III.

Zerfällungszahlen. Man braucht bei der Berechnung der φ_n-Poly- eine Kontrolle, um sich zu vergewissern, daß man kein Glied aus- en hat. So enthält z. B. der Zähler des 2. Bruches in φ_8 3 Glieder, ähler des 3. Bruches in demselben Polynome 4 Glieder. Wovon das ab? Die Frage wird gelöst durch die — Zerfällungszahlen. er verstehe ich eine Zahl, welche angibt, auf wie viel Arten eine ne ganze Zahl s in Summanden von gleicher Beschaffenheit auf- werden kann. Gewöhnlich nennt man ja die Auflösung einer Zahl manden eine „Zerfällung“ im Gegensatz zur Zerlegung, der Auf- einer Zahl in Faktoren. Beispielsweise bedeutet $\mathfrak{Z}_2(6)$: $1+5$, $3+3=3$; $\mathfrak{Z}_2(8) = 1+7, 2+6, 3+5, 4+4=4$. Der Index net die Anzahl der Summanden. $\mathfrak{Z}_3(9)$ ist also $= 1+1+7$, $+6, 1+3+5, 1+4+4, 2+2+5, 2+3+4, 3+3+3=7$. $_3(9)_2 = 2+2+5, 2+3+4, 3+3+3=3$. Der Index rechts r Klammer bedeutet also die untere Grenze der Summanden. Will ir diese auch eine obere Grenze annehmen, so soll sie daneben eben werden. Demnach bedeutet $\mathfrak{Z}_3(9)_{1,4} = 1+4+4, 2+3+4$, $+3=3$; die allgemeine Bezeichnung ist also $\mathfrak{Z}_r(s)_{p,q}$ oder noch $\left\{\begin{matrix} s \\ r \end{matrix}\right\}_{p,q}$ beziehungsweise, wenn keine obere Grenze vorhanden ist, elches dann identisch ist mit $\left\{\begin{matrix} s \\ r \end{matrix}\right\}_{p,\infty}$. Dieselbe Zahl wird aber hon durch die Ordnungszahl n und die Anzahl der Summanden r t. Ordnungszahl nenne ich den Index von φ_n und schreibe $= \left[\begin{matrix} n \\ r \end{matrix}\right]_{p,q}$. Die Buchstaben s, r bedeuten dasselbe, wie oben bei dukten $f_a^\alpha f_b^\beta \ldots f_n^\nu$. Denn offenbar fällt die Aufgabe, alle mög- rodukte von $f_a, \ldots f_b, \ldots$ von gleicher Zeiger- und Faktoren- zu bilden, mit der Aufgabe zusammen, die Zeigersumme s auf lichen Arten in soviel Summanden zu zerfällen, als das Produkt hat.

habe in der folgenden Tabelle I einige Zerfällungszahlen für sammengestellt. r ist Abszisse und n Ordinate (mit der positiven nach unten).

Hat man die ersten Zahlen direkt berechnet, so kann man
gen durch Rekursionsformeln finden. Hiebei kommen hauptsäch
Fundamentalsätze in Betracht. Der erste wird auf folgende
mittelt. Ist $\left\{ {s \atop r} \right\}_p$ z. B. $\left\{ {10 \atop 3} \right\}_2$ zu suchen, so schreibe ich zunächst
in r Kolumnen hin; darüber werden die restlichen Einser, der
$s - pr$ beträgt, auf alle möglichen Arten verteilt. Man erhält

$$\begin{array}{cccccccccc} & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & 1 & & & & 1 & \\ & & & & 1 & & 1 & 1 & & 1 \\ \left\{ {10 \atop 3} \right\}_2 = & & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$= 2+2+2, 2+2+2, 2+2+2, 2+2+2,$ nach Su
der Kolumnen $= 2+2+6, 2+3+5, 2+4+4, 3+3+4$

$$\left\{ {10 \atop 3} \right\}_2 = \left\{ {10-2\cdot 3 \atop 1} \right\}_1 + \left\{ {10-2\cdot 3 \atop 2} \right\}_1 + \left\{ {10-2\cdot 3 \atop 3} \right\}_1,$$ allgemein

$$\left\{ {s \atop r} \right\}_p = \left\{ {s-pr \atop 1} \right\}_1 + \left\{ {s-pr \atop 2} \right\}_1 + \ldots \left\{ {s-pr \atop r} \right\}_1 \quad - - - - -$$

Den 2. Fundamentalsatz findet man durch folgende Er
Vermehrt (resp. vermindert) man die Indizes der Produkte gleich
und Faktorensumme, etwa in $f_a^\alpha f_b^\beta \ldots f_n^\nu$ und $f_a^{\alpha'} f_b^{\beta'} \ldots f_n^{\nu'}$ un
Zahl m, so haben auch die neuen Produkte untereinander d
Zeigersumme s'. Denn ist $\alpha a + \beta b + \ldots \nu n = \alpha' a + \beta' b +$
so ist auch $\alpha(a+m) + \beta(b+m) + \ldots \nu(n+m) = \alpha'(a+m) +$
$+ \ldots \nu'(n+m)$, da ja $\alpha + \beta + \ldots \nu = \alpha' + \beta' + \ldots \nu'$ i
diese Änderung bleibt die Anzahl der Faktoren r und infolgede
die entsprechende Zerfällungszahl unberührt. Es ist daher weger
$+ (\alpha + \beta + \ldots \nu)\, m = s + rm$

$$\left\{ {s \atop r} \right\}_p = \left\{ {s' \atop r} \right\}_{p+m} = \left\{ {s+mr \atop r} \right\}_{p+m} \quad - - - - - - - -$$

Bringt man in (11) mittelst dieser Regel alle Zeiger auf p
nun die Formel:

$$\left\{ {s \atop r} \right\}_p = \left\{ {s-pr+(p-1)\,1 \atop 1} \right\}_{1+p-1} + \left\{ {s-pr+(p-1)\,2 \atop 2} \right\}_p +$$

$$\ldots \left\{ {r-pr+(p-1)\,r \atop r} \right\}_p \quad - - - - - - - - - -$$

Nun ist nach der eben gefundenen Formel wegen $s-p-p(r-1$

$$\left\{ {s-p \atop r-1} \right\}_p = \left\{ {s-pr+(p-1) \atop 1} \right\}_p + \left\{ {s-pr+(p-1)\,2 \atop 2} \right\}_p + \ldots$$

$$\ldots \left\{ {s-pr+(p-1)\,(r-1) \atop r-1} \right\}_p,$$ eine Reihe, welche bis auf
Glied mit der vorigen übereinstimmt. (13) vereinfacht sich dadur
zweigliedrigen Rekursionsformel: $\left\{ {s \atop r} \right\}_p = \left\{ {s-p \atop r-1} \right\}_p + \left\{ {s-r \atop r} \right\}_p$.

TABELLE I.

$$\begin{Bmatrix} s \\ r \end{Bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_2$$

$r=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$n=1$	1 s=0	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$n=2$	0	1 s=2	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$n=3$	0	1 s=3	1 s=4	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$n=4$	0	1 s=4	1 s=5	1 s=6	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$n=5$	0	1 s=5	2 s=6	1 s=7	1 s=8	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$n=6$	0	1 s=6	2 s=7	2 s=8	1 s=9	1 s=10	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$n=7$	0	1 s=7	3 s=8	3 s=9	2 s=10	1 s=11	1 s=12	0	.	.	.	.	.	.	.	.
$n=8$	0	1 s=8	3 s=9	4 s=10	3 s=11	2 s=12	1 s=13	1 s=14	0	.	.	.	.	.	.	.
$n=9$	0	1 s=9	4 s=10	5 s=11	5 s=12	3 s=13	2 s=14	1 s=15	1 s=16	0	.	.	.	.	.	.
$n=10$	0	1 s=10	4 s=11	7 s=12	6 s=13	5 s=14	3 s=15	2 s=16	1 s=17	1 s=18	0	.	.	.	.	.
$n=11$	0	1 s=11	5 s=12	8 s=13	9 s=14	7 s=15	5 s=16	3 s=17	2 s=18	1 s=19	1 s=20	0	.	.	.	.
$n=12$	0	1 s=12	5 s=13	10 s=14	11 s=15	10 s=16	7 s=17	5 s=18	3 s=19	2 s=20	1 s=21	1 s=22	0	.	.	.
$n=13$	0	1 s=13	6 s=14	12 s=15	15 s=16	13 s=17	11 s=18	7 s=19	5 s=20	3 s=21	2 s=22	1 s=23	1 s=24	0	.	.
$n=14$	0	1 s=14	6 s=15	14 s=16	18 s=17	18 s=18	14 s=19	11 s=20	7 s=21	5 s=22	3 s=23	2 s=24	1 s=25	1 s=26	0	.
$n=15$	0	1 s=15	7 s=16	16 s=17	23 s=18	23 s=19	20 s=20	15 s=21	11 s=22	7 s=23	5 s=24	3 s=25	2 s=26	1 s=27	1 s=28	0
$n=16$	0	1 s=16	7 s=17	19 s=18	27 s=19	30 s=20	26 s=21	21 s=22	15 s=23	11 s=24	7 s=25	5 s=26	3 s=27	2 s=28	1 s=29	1 s=30
$n=17$	0	1 s=17	8 s=18	21 s=19	34 s=20											
$n=18$	0	1 s=18	8 s=19	24 s=20	39 s=21											
$n=19$	0	1 s=19	9 s=20	27 s=21	47 s=22											
$n=20$	0	1 s=20	9 s=21	30 s=22	54 s=23											
$n=21$	0	1 s=21	10 s=22	33 s=23	64 s=24											
$n=22$	0	1 s=22	10 s=23	37 s=24	72 s=25											
$n=23$	0	1 s=23	11 s=24	40 s=25	84 s=26											
$n=24$	0	1 s=24	11 s=25	44 s=26	94 s=27											
$n=25$	0	1 s=25	12 s=26	48 s=27	108 s=28											

TABELLE II.

$$\begin{Bmatrix} s \\ r \end{Bmatrix}_{2,\,8} = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_{2,\,8}$$

$r=$	1	2	3	4
$n=2$	1 s=2	0	.	.
$n=3$	1 s=3	1 s=4	0	.
$n=4$	1 s=4	1 s=5	1 s=6	0
$n=5$	1* s=5	2 s=6	1 s=7	1 s=8
$n=6$	1 s=6	2 s=7	2 s=8	1 s=9
$n=7$	1 s=7	3 s=8	3 s=9	2 s=10
$n=8$	1 s=8	3 s=9	4 s=10	3 s=11
$n=9$	0 s=9	4* s=10	5 s=11	5 s=12
$n=10$	0 s=10	3 s=11	7 s=12	6 s=13
$n=11$	0 s=11	3 s=12	7 s=13	9 s=14
$n=12$	0 s=12	2 s=13	8 s=14	10 s=15
$n=13$	0 s=13	2 s=14	8* s=15	13 s=16
$n=14$	0 s=14	1 s=15	8 s=16	14 s=17
$n=15$	0 s=15	1 s=16	7 s=17	16 s=18
$n=16$	0 s=16	0 s=17	7 s=18	16 s=19
$n=17$	0 s=17	.	5 s=19	18* s=20
$n=18$	0 s=18	.	4 s=20	16 s=21
$n=19$	0 s=19	.	3 s=21	16 s=22
$n=20$	0 s=20	.	2 s=22	14 s=23
$n=21$	0 s=21	.	1 s=23	13 s=24
$n=22$	0 s=22	.	1 s=24	10 s=25

Noch einfacher gestalten sich die Formeln, wenn man $\left\{ {s \atop r} \right\}_p$ durch

ersetzt. In der Kolumne für $r = 1$ fällt s mit n zusammen, in

folgenden Kolumne wächst s um $p-1$, während selbstverständlich verändert bleibt. In der n-ten Zeile und r-ten Kolumne ist also $+(p-1)(r-1)$ und $n = s-(p-1)(r-1) = s-pr+p+r-1$.

Beweis. In der Tabelle I ist s in der n-ten Zeile und r-ten Kolumne $+r-1$, und da wir $\left\{ {s \atop r} \right\}_p = \left[{n \atop r} \right]_p$ angenommen haben, so ist $n' = n$, also $n = n' - m$ und $m = p-2$ anzunehmen, wenn wir aus das allgemeine Symbol $\left\{ {s \atop r} \right\}_p$ bekommen wollen. Wegen $s' = s + rm$ man daher $s' = n + r - 1 + rm = n' - m + r - 1 + rm = n' -$ $-2) + r - 1 + r(p-2) = n' + (p-1)(r-1)$ und wenn man n', s' wieder allgemein n und s schreibt, so ergibt sich daraus die Formel. Demnach ist $\left\{ {s \atop r} \right\}_p = \left[{s-pr+p+r-1 \atop r} \right]_p$ und $\left[{n \atop r} \right]_p = \left\{ {+pr-p-r+1 \atop r} \right\}_p$. (13) und (14) kann man also auch in der schreiben:

$$\left[{n \atop r} \right]_p = \left[{n-r \atop 1} \right]_p + \left[{n-r \atop 2} \right]_p + \cdots \left[{n-r \atop r} \right]_p. \quad ---- \quad (15)$$

$$\left[{n \atop r} \right]_p = \left[{n-1 \atop r-1} \right]_p + \left[{n-r \atop r} \right]_p. \quad ---------- \quad (16).$$

Um in der Tabelle I eine Zahl z. B. $\left\{ {12 \atop 3} \right\}_2$ oder, was dasselbe ist, $\left[{10 \atop 3} \right]_2$ den, verfährt man folgendermaßen:

Man gehe von dem in der Kolumne für $r = 1$ stehenden Gliede ächstvorhergehenden Zeile in der Diagonale rechts hinauf bis zum ungspunkt der Diagonale mit der r-ten, hier also mit der dritten Ko-, und addiere zu der so gefundenen Zahl alle vorhergehenden Zahlen selben Zeile, die Kolumne für $r = 1$ noch eingeschlossen (nach (15)), nan addiere zur nächsten Zahl links oben die im erwähnten Kreuzungs- befindliche Zahl! (nach (16)). Man erhält so für

$$\left[{10 \atop 3} \right]_2 = \left[{9 \atop 2} \right]_2 + \left[{7 \atop 3} \right]_2 = 4 + 3 = 7.$$

Die Fortsetzung der Tabelle ist nun sehr einfach.

Es existieren aber noch andere interessante Beziehungen zwischen ahlen der Tabelle. Man gewahrt daselbst eine stärker ausgezogene ie Linie. Sie trennt 2 Kategorien von Zahlen. Bei den rechtsseiti- t die Reihenfolge in der Zeile nach rechts und in der Kolumne nach lie gleiche. Bei den anderen ist das nicht der Fall.

Aus (16) folgt durch Entwicklung des letzten Gliedes nach ebe
Regel:

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix}_p + \begin{bmatrix} n-1-r \\ r-1 \end{bmatrix}_p + \begin{bmatrix} n-1-2r \\ r-1 \end{bmatrix}_p + \begin{bmatrix} n-1 \\ r- \end{bmatrix}$$

u. s. w., bis die Reihe abbricht. — — — — — — — — —

D. h., addiert man zu einer Zahl der $(r-1)$-ten Kolum
$(n-1)$-ten Zeile jede r-te Zahl in der Kolumne aufwärts, so e
Summe die nächste in der Diagonale nach rechts unten stehen

Man kann die Tabelle auch nach links erweitern mit H
Formel (16): $\begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_p - \begin{bmatrix} n-r \\ r \end{bmatrix}_p$.

Für $r = 0$ erhält man überall Null, mit Ausnahme von $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_2 =$
das $= 1$ ist, was schon aus der Umkehrungsreihe hervorgeht, d
Glied φ_1 nicht verschwindet. Alle übrigen durch negative Werte vo
r bestimmten, in der Tabelle nicht vorhandenen Felder sind mi
besetzt zu denken.

Ferner findet man aus (16), wenn man alle Zahlen einer Ho
reihe addiert und wenn $H_{r=1}[n]_p$ diese Summe, $D_{r=1}[n]_p$ die
der nach rechts oben gerichteten Diagonale, beide von $r = 1$ au
und $V_{r=0}[n]_p$ die von n ausgehende Vertikalreihe der nullten
bedeutet: $H_1[n]_p = H_0[n-1]_p + D_1[n-1]_p$. — — — — —
und daraus durch Entwicklung von H:

$H_1[n]_p = V_0[n]_p + D_1[n-1]_p + D_1[n-2]_p + D_1[n$
s. f., bis die Reihe abbricht, — — — — — — — — — — —
das ist: der ganze Raum oberhalb $H_1[n]_p$ zwischen $V_0[n-$
$D_1[n-1]_p$, beide eingeschlossen.

Ferner folgt aus (17), wenn man r unmittelbar aufeinande
Zahlen in der n-ten Zeile und r-ten Kolumne aufwärts addiert, daß
die $(r-1)$-te Kolumne, von $(n-1)$ angefangen, gerade voll v
ist also $V_r[n, n-r+1]_p$, d. h. die r Zahlen der Vertikalreihe in
Kolumne von n (inklusive) bis $(n-r+1)$ (inklusive) $= V_{r-1}[n$
der ganzen Vertikalreihe $(r-1)$ von $(n-1)$ angefangen,
eingeschlossen. — — — — — — — — — — — — —

Behandelt man ebenso die $(r-1)$ untersten Zahlen von V_{r-1}
die $(r-2)$ untersten Zahlen von V_{r-2} u. s. f., so ergibt s
$V_r[n, n-r+1]_p$ $(= V_{r-1}[n-1]_p)$ gleich ist dem ganze
eckigen Streifen zwischen V_0 und V_{r-1} als linker und rechter Beg
beide eingeschlossen, und mit $n-r$ als unterer Grenze; obe
Streifen unbegrenzt. Der mathematische Ausdruck dafür ist

$V_r[n, n-r+1]_p = V_{0,r-1}[n-r]_p$. — — — — — —

In den vorstehenden Formeln kann man die eckige Klammer durch eschweifte ersetzen, wenn man darin für die Ordnungszahl n die echende zu zerfällende Zahl s einsetzt.

$H_r\{s\}_p$ bezeichnet also eine Horizontalreihe mit dem Anfangsgliede $\left\{\begin{matrix}s\\r\end{matrix}\right\}_p$, $\cdot[n]_p$ eine solche mit dem Anfangsgliede $\left[\begin{matrix}n\\r\end{matrix}\right]_p$. Eventuell vorkommende End- werden vom Anfangsgliede durch einen Beistrich getrennt. Reduziert sich die uf ein Glied, so ist n resp. s doppelt zu schreiben und $H_r\{s, s\}_p$ sowie $H_r[n, n]_p$ it $\left\{\begin{matrix}s\\r\end{matrix}\right\}_p$ resp. $\left[\begin{matrix}n\\r\end{matrix}\right]_p$ zusammen. Gleiches gilt von den Reihen V und D.

Die Tabelle II unterscheidet sich von der Tabelle I nur dadurch, ier auch nach oben eine Grenze q festgesetzt wurde. In unserer e ist $q = 8$.

Zu den entsprechend modifizierten Fundamentalsätzen (11) und ämlich

$$= \left\{\begin{matrix}s-pr\\1\end{matrix}\right\}_{1,\,q-p} + \left\{\begin{matrix}s-pr\\2\end{matrix}\right\}_{1,\,q-p} + \cdots \left\{\begin{matrix}s-pr\\r\end{matrix}\right\}_{1,\,q-p} \quad \text{— — (22),}$$

n den untern Index 1 mit Hilfe des folgenden Satzes durch Ad- von $p-1$ und entsprechende Änderung der Summe auf p bringen

$$\text{und } \left\{\begin{matrix}s\\r\end{matrix}\right\}_{p,\,q} = \left\{\begin{matrix}s+mr\\r\end{matrix}\right\}_{p+m,\,q+m} \quad \text{— — — — — — — — (23)}$$

a hier noch einige neue dazu.

in Blick auf die Tabelle II belehrt uns, daß die Vertikalreihen risch sind. Der Beweis ergibt sich aus (23), wenn man bedenkt, negative Werte der drei Zahlen s, p, q alle bisher entwickelten in Geltung bleiben müssen, da ja eine negative Zahl in eben- egative Summanden zerfällt werden kann, wie die entsprechende Zahl in positive Summanden zerfällt werden kann. Es ist also

$$= \left\{\begin{matrix}-s\\r\end{matrix}\right\}_{-p,\,-q} \quad \text{— — — — — — — — — — — — (24)}$$

es, in Verbindung mit (23), liefert den Symmetriesatz:

$$\Big\}_{p,\,q} = \left\{\begin{matrix}r(p+q)-s\\r\end{matrix}\right\}_{p+q-p,\;p+q-q} \quad \text{— — — — — — (25)}$$

ändert sich also nur die Zahl s in $r(p+q)-s$, die übrigen hlen r, p, q bleiben unverändert; denn offenbar kann man die nd die obere Grenze miteinander vertauschen, da es ja gleich- ; ob man die Summanden bei der Zerfällung fallend oder steigend .

n Symmetriepunkt findet man, wenn man s gleichsetzt $r(p+q)-s$. olgt $2s = r(p+q)$; $s = \frac{r(p+q)}{2}$. Ist dieser Bruch teilbar, so

ist die so erhaltene Zahl selbst der Symmetriepunkt, in der T mit einem Sternchen gekennzeichnet. Ist sie nicht teilbar, so Symmetriepunkt in die Grenze zwischen 2 Zahlen.

Nun entwickeln wir für unsern speziellen Gebrauch, denn den limitierten Zerfällungszahlen in dieser Abhandlung machen nur noch einen Satz, der uns erlaubt, $\left\{\begin{matrix} s \\ r \end{matrix}\right\}_{p,q}$ wenigstens für $r =$ 2 aus der Tabelle I zu berechnen.

Sucht man beispielweise den Wert von $\left\{\begin{matrix} 18 \\ 4 \end{matrix}\right\}_{2,8}$, so ist die Z bar $= \left\{\begin{matrix} 18 \\ 4 \end{matrix}\right\}_2$, vermindert um die folgenden Fälle:

	1		$\overset{\frown}{1}$
	1		1
den Fall 1)	1	und die Fälle 2)	1 , wo die eingeklammerten F
	1		$\underset{\smile}{1}$ die übrig bleibenden $r-1$
	1		1 auf alle möglichen Arten
	1		1 len sind.
	1		1 Der Querstrich bezei
	1		1 obere Grenze, die von den
	1		1 Summanden nicht überschri
$2+2+2+2$		$2+2+2+2$	den darf.

Allgemein ist s', die Anzahl der Einser, $= s - pr$; q', Grenze für die Einser, $= q - p$; $d' = s' - q'$, die über dem befindlichen Einser im Falle 1); die Anzahl der Einser in der ist also $= d' - 1$. Der allgemeine Ausdruck für den Fall 1) für die Fälle 2):

$$\left\{\begin{matrix} d'-1 \\ 1 \end{matrix}\right\}_1 + \left\{\begin{matrix} d'-1 \\ 2 \end{matrix}\right\}_1 + \cdots \left\{\begin{matrix} d'-1 \\ r-1 \end{matrix}\right\}_1 +$$

$$+ \left\{\begin{matrix} d'-2 \\ 1 \end{matrix}\right\}_1 + \left\{\begin{matrix} d'-2 \\ 2 \end{matrix}\right\}_1 + \cdots \left\{\begin{matrix} d'-2 \\ r-1 \end{matrix}\right\}_1 +$$

— — — — — — — — — — — — — — u. s. f., bis die Vert nach unten von selbst abbrechen. Wir erhalten somit unter A des Satzes (12) für $m = p - 1$ und nach Summierung der Vert die Formel:

$$\left\{\begin{matrix} s \\ r \end{matrix}\right\}_{p,q} = \left\{\begin{matrix} s \\ r \end{matrix}\right\}_p - \left\{\begin{matrix} d'+m \\ 1 \end{matrix}\right\}_p - V_1\{d'-1+m\}_p - V_2\{d'-1+$$

$\ldots V_{r-1}\{d'-1+(r-1)m\}_p$. — — — — — — — — —

die sich nach (21) noch weiter vereinfachen läßt. Nach (20) is mit Rücksicht darauf, daß für $r = 1$ die eckige und die g Klammer zusammenfallen,

$\left\{\begin{matrix}s\\r\end{matrix}\right\}_p = V_1\,[d'+m,\ d'+m-1+1]_p = V_0\,[d'+m-1]_p$ und da-

erhält der Satz mit Rücksicht auf $\left\{\begin{matrix}s\\r\end{matrix}\right\}_p = \left[\begin{matrix}s-(p-1)(r-1)\\r\end{matrix}\right]_p$

fachere Form: $\left\{\begin{matrix}s\\r\end{matrix}\right\}_{p,\,q} = \left\{\begin{matrix}s\\r\end{matrix}\right\}_p - V_{0,\,r-1}\,[d'-1+m]_p =$

$\left\{\begin{matrix}s\\r\end{matrix}\right\}_p - V_r\,[d'-1+m+r,\ d'+m]_p$; also

$= \left[\begin{matrix}n\\r\end{matrix}\right]_p - V_r\,[n-q+p-1,\ n-q+p-r]_p.$ — — — (27)

ese Formel gilt jedoch nur unter der Voraussetzung, daß bei der ng von $d'-1$ auf die übrigen Kolumnen keine der folgenden, also ht die zweite das Niveau der ersten übersteigt. D. h. $s'-2q' \leqq 2$ $\leqq 2q'+2$. Nach Einsetzung der Werte für s' und q' und unter ng des Symmetriegesetzes, wonach $2s = r\,(p+q)$ ist, erhält man

$) \leqq 4(q-p)+4$; also $r \leqq 4 + \frac{4}{q-p}$ und, da $q-p$ nicht ne-

rd, $r \leqq 4$. Mit andern Worten: man kann mittelst (27) für $r \leqq 4$ len berechnen bis zum Symmetriepunkt, diesen selbst eingeschlos- da sich die Zahlen weiter unten in umgekehrter Folge wieder-) ist klar, daß die vorstehenden Formeln zur allgemeinen Berech- r 4 ersten Kolumnen hinreichen.

dere Relationen führe ich nur an. Die Anzahl der Summen mit en Summanden p bei der Zerfällung einer Zahl ist $\left\{\begin{matrix}s-p\\r-1\end{matrix}\right\}_{p,\,q}$,

hl der übrigen Summen $= \left\{\begin{matrix}s-p\\r\end{matrix}\right\}_{p+1,\,q}$.

$\left\{\begin{matrix}s\\r\end{matrix}\right\}_{p,\,q} = \left\{\begin{matrix}s-p\\r-1\end{matrix}\right\}_{p,\,q} + \left\{\begin{matrix}s-p\\r\end{matrix}\right\}_{p+1,\,q}$.

$\left\{\begin{matrix}s\\r\end{matrix}\right\}_0 = \left\{\begin{matrix}s\\1\end{matrix}\right\}_1 + \left\{\begin{matrix}s\\2\end{matrix}\right\}_1 + \ldots \left\{\begin{matrix}s\\r\end{matrix}\right\}_1$.

$\left\{\begin{matrix}s\\r\end{matrix}\right\}_{p,\,p} = \left\{\begin{matrix}s\\p\end{matrix}\right\}_{r,\,r}$ kann nur die Werte 1 oder 0 annehmen.

Für $q \geqq s-(r-1)p$ wird $\left\{\begin{matrix}s\\r\end{matrix}\right\}_{p,\,q} = \left\{\begin{matrix}s\\r\end{matrix}\right\}_p$. Die schraffierte Linie abelle II trennt die mit der Tabelle I übereinstimmenden und reinstimmenden Zahlen voneinander.

IV.

lösung algebraischer Gleichungen. Wir wollen zunächst an- die gegebene Gleichung, die wir in der Form schreiben: $+ a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots a_{n-1} x + a_n = 0$, habe nur reelle ten. (Natürlich braucht dieses n mit dem n des allgemeinen

Gliedes φ_n nicht zusammenzufallen). Zu ihrer Auflösung stehen
Wege offen.

1) Man setzt a priori $h = 0$. Nun kann man es immer so ei
daß durch Verwandlung der Funktion $f(x)$ in eine andere: f'
Subtangente f'_0 sowie die neuen Quotienten f'_{II}, f'_{III} etc. entweder
echte Brüche werden. Ich setze zunächst $z = x + p$. Ist $p \geqq a +$
der absolute Wert des größten Koeffizienten), so werden dadu
reellen Wurzeln und von komplexen Wurzeln der reelle Bestar
positiven Zahlen und > 1.

Beweis. Bekanntlich besteht die Beziehung: $(a+1)^n > a(a-$
$+ a(a+1)^{n-2} + \ldots a(a+1) + a$, da die rechte Seite der Ungl
die ich kurz mit R bezeichne, gleich ist $a \cdot \frac{(a+1)^n - 1}{(a+1) - 1} = (a +$
Wir argumentieren nun so: $(a+1)^n - R$ kann unter keinen Ur
$= 0$ werden. Denn substituiert man in die Gleichung für x $a-$
kann der Ausdruck $a_1 (a+1)^{n-1} + a_2 (a+1)^{n-2} + \ldots a_n$ nur kle
als R, auch wenn alle Glieder positiv sind. Sind einige Glieder ne
wird der Ausdruck noch kleiner. Folglich ist in jedem Falle $(a+$
größer als Null. Es gibt also keinen absoluten Wert $\geqq a + 1,$
gegebene Gleichung annullieren könnte. Daher ist $a + 1$ größer
absolute Wert der größten Wurzel. Will man auch die untere Gr
Wurzeln berechnen, so braucht man nur die Stammgleichung in
sprechende mit reziproken Wurzeln zu verwandeln und die ober
in gleicher Weise zu bestimmen.

Sodann mache ich der Reihe nach $z^I = \frac{1}{z}$; dadurch wer

Wurzeln zu echten positiven Brüchen. $z^{II} = n + z^I$; $z^{III} =$
$z^{IV} = n - 1 + z^{III}$; dadurch werden die absoluten Werte der Wu
den Zwischenraum zwischen $n - 1 + \frac{1}{n}$ und $n - 1 + \frac{1}{n+1}$ be
Endlich wird $z^V = -z^{IV}$ gemacht; dadurch wird erreicht, daß all
enten der Gleichung $f'(z^V)$ positiv werden und infolgedessen die Vo
der Umkehrungsreihe intakt bleiben. Der Satz, daß man f_1 größer
zugleich größer als $f_2, f_3, \ldots f_n$ und so alle Quotienten f_0, f_{II}, f_{III} .
als eins machen kann, ist an und für sich bemerkenswert. W
aber daraus in dieser Abhandlung keine weiteren Konsequenzen
Konvergenzbeweis nicht leicht ist und im Falle einer langsamen
genz die Reihe sowieso in der Praxis wenig brauchbar wäre.

2) Da man also in der Praxis nur energisch konvergieren
brauchen kann und man weiß, daß Potenzreihen nur in der

stark konvergieren, so verfährt man am rationellsten, wenn man ine der bekannten Näherungsmethoden h ziemlich nahe an einer bestimmt. Wir wollen nun beweisen, daß man in jedem Fall ein kann, für welches die Umkehrungsreihe sehr rasch konvergiert. em Behufe modifiziere und ergänze ich die Gräffe'sche Methode hrern Richtungen hin.

bei habe ich mir in erster Linie zur Aufgabe gestellt, rasch über der Auflösung algebraischer Gleichungen in Betracht kommenden nen Überblick zu gewinnen und es auf dem kürzesten Wege zu machen, daß und wie allgemein und nach einer sichern eine Auflösung möglich ist. Bei der Ausführung im besondern sich natürlich bei diesen Rechnungen nur um eine relative Rasch- deln. Denn wer sich nur einigermaßen mit diesem Problem be- hat, der wird wissen, wie sich gerade bei diesen Rechnungen vierigkeiten häufen. Kaum ist ein Fall erledigt, so knüpft sich gelösten Fall ein neuer, für den das bisher Gefundene nicht mehr man steht wieder vor einer ganz neuen Aufgabe.

im Ausdruck „sichere Methode“ denke ich speziell an die Be- daß alle Versuchsrechnungen ausgeschlossen sein sollen, deren mit n wachsen und eine kleine, auch im allgemeinsten Falle be- von n unabhängige Zahl übersteigen würde und die nicht rasch Entscheidung führten.

äffe leitet aus einer gegebenen Gleichung, ohne ihre Wurzeln zu eine andere ab, deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeln der en Gleichung sind. Durch die Substitution $x = \sqrt{z}$ in die gegebene g und nach der Entfernung der Quadratwurzeln erhält er eine g:

$+ C_1 z^{n-1} + C_2 z^{n-1} + \ldots C_{n-1} z + C_n = 0$, wobei
$= -(a_1^2 - 2a_2)$, $C_2 = a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_4$,
$= -(a_3^2 - 2a_2 a_4 + 2a_1 a_5 - 2a_6)$, $C_4 = a_4^2 - 2a_3 a_5 + 2a_2 a_6$
$+ 2a_8$, u. s. w.

erhebe die Wurzeln zur 3ten, also zu einer ungeraden Potenz, die Vorzeichen der Wurzeln unverändert bleiben, und vermeide einerseits Versuchsrechnungen zur Bestimmung des Vorzeichens zeln, anderseits nehmen die Potenzen bei der Wiederholung des ns viel schneller zu. Das Verfahren wird nämlich so oft wieder- man will, und während Gräffe auf diese Weise die 4., 8., 16., Potenz der Wurzeln erhält, bekommen wir dafür Potenzen des 81., 243. . . . Grades. In beiden Fällen ist in der so gefundenen lung: $z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + \ldots A_{n-1} z + A_n = 0$

$A_1 = -(x_1^m + x_2^m + \ldots x_n^m)$ oder annähernd, wenn wir $|x_1| > |x_2| > \ldots |x_n|$ annehmen, da gegen x_1^m bei hinreichend gr die übrigen Glieder verschwinden, $= -x_1^m \star$ (der Asteriskus sol ten, daß der gefundene Wert nur approximativ ist).

$A_2 = x_1^m x_2^m \star$, $A_3 = -x_1^m x_2^m x_3^m \star$, ... $A_n = (-1)^n x_1^m x_n^m$

Daraus findet man:

$$x_1 = \sqrt[m]{-A_1} \star, \quad x_2 = \sqrt[m]{\frac{-A_2}{A_1}} \star, \quad x_3 = \sqrt[m]{\frac{-A_3}{A_2}} \star,$$

$$x_n = \sqrt[m]{\frac{-A^n}{A_{n-1}}} \star.$$

Die zweite Änderung der Gräffe'schen Methode besteht da ich in derselben Weise auch die reziproken Wurzeln $\frac{1}{x^m}$ berechn dem man die Stammgleichung in die entsprechende mit reziproken verwandelt hat. Vorher kann man $f(x)$ durch die Substitution so umformen, daß das letzte Glied $= 1$ wird. Der reziproke We reziproken Wurzeln liefert dann eine zweite Reihe von approx Werten für x. Soweit nun die beiden Werte übereinstimmen, a Dezimalen kann x als bestimmt angenommen werden. Diese We in die Umkehrungsreihe für h eingesetzt, liefern dann die Wur beliebiger Genauigkeit.

Sollte die Reihe nicht hinreichend rasch konvergieren, so k ja das Gräffe'sche Verfahren so lange fortsetzen, bis man einen p Wert für h findet.

Die Voraussetzung für die vorstehende Methode war allerd daß alle Wurzeln reell und voneinander verschieden sind.

Wir wollen nun zeigen, wie man aus einer gegebenen G eine andere mit zur dritten Potenz erhobenen Wurzeln ableitet.

Die gegebene Gleichung verwandelt sich durch die Sub $x = \sqrt[3]{z}$, $a_0 = 1$ gesetzt, in die folgende:

$a_0 z^{\frac{n}{3}} + a_1 z^{\frac{n-1}{3}} + a_2 z^{\frac{n-2}{3}} + \ldots = 0$. Für $n = 6$ lautet die Gl

$a_0 z^2 + a_1 z^{\frac{5}{3}} + a_2 z^{\frac{4}{3}} + a_3 z + a_4 z^{\frac{2}{3}} + a_5 z^{\frac{1}{3}} + a_6 = 0.$

Daraus folgt: $a_0 z^2 + a_3 z + a_6 = -a_1 z \cdot z^{\frac{2}{3}} - a_2 z \cdot z^{\frac{1}{3}} - a_4 z^{\frac{2}{3}}$

$a_0 z^2 + a_3 z + a_6 = -(a_1 z + a_4) z^{\frac{2}{3}} - (a_2 z + a_5) z^{\frac{1}{3}}$; $(a_0 z^2 + a_3$

$= -(a_1 z + a_4)^3 z^2 - (a_2 z + a_5)^3 z + 3(a_1 z + a_4)(a_2 z + a_5) z (a_0 z^2 + a$

$z^6 + (3a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + a_1^3) z^5 +$

$a_6 - 3a_0 a_1 a_5 - 3a_0 a_2 a_4 + 3a_0 a_3^2 + 3a_1^2 a_4 - 3a_1 a_2 a_3 + a_2^3) z^4 +$

$a_3 a_6 - 3a_0 a_4 a_5 - 3a_1 a_2 a_6 - 3a_1 a_3 a_5 + 3a_1 a_4^2 + 3a_2^2 a_5 - 3a_2 a_3 a_4 +$

$+ (3a_0 a_6^2 - 3a_1 a_5 a_6 - 3a_2 a_4 a_6 + 3a_2 a_5^2 + 3a_3^2 a_6 - 3a_3 a_4 a_5 +$

$+ (3a_3 a_6^2 - 3a_4 a_5 a_6 + a_5^3) z + a_6^3 = 0.$

ir sehen in der Bildung der Koeffizienten folgende Gesetzmäßig- die, wie man aus der vorletzten Gleichung leicht ersehen kann, es n gelten müssen.

Alle Koeffizienten sind ein Produkt dreier Faktoren; also ist 2) Die Summe der Indizes ist der Reihe nach: 0, 3, 6, 9, 12, Denken wir uns, um die Tabelle II auf unsern Fall anwenden ien, alle Indizes um 2 vermehrt, so daß wir für $a_0^3\ b_2^3$, für $a_0^2 a_3$ alten u. s. f., so beträgt dann die Indizessumme: 6, 9, 12, . . . 24. m z^k ($k = 0, 1, 2, \ldots 6$) gehören dann alle möglichen Kombi- dreier Faktoren b_i ($i = 2, 3, \ldots 8$) mit der Zeigersumme $+ 3(n-k)$. 3) Die Anzahl der zu jedem z^k gehörigen Koeffizi- trägt $\left\{ \begin{matrix} s \\ r \end{matrix} \right\}_{2,8}$; also in unserm speziellen Fall, wie man aus der II entnehmen kann, $\left\{ \begin{matrix} 6 \\ 3 \end{matrix} \right\}_{2,8} = 1 = \left\{ \begin{matrix} 24 \\ 3 \end{matrix} \right\}_{2,8}$, $\left\{ \begin{matrix} 9 \\ 3 \end{matrix} \right\}_{2,8} = 3 = \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 3 \end{matrix} \right\}_{2,8}$, $= 7 = \left\{ \begin{matrix} 18 \\ 3 \end{matrix} \right\}_{2,8}$ und $\left\{ \begin{matrix} 15 \\ 3 \end{matrix} \right\}_{2,8} = 8$. 4) Der numerische Faktor zu jedem b_8^ν ist gleich $\frac{(\alpha+\beta+\ldots\nu)!}{\alpha!\ \beta!\ \ldots\nu!}$, wenn die Indizes untereinander nach dulus 3 kongruent sind. 5) Sind 2 Indizes inkongruent, so ist jeder dritten inkongruent. In diesem Fall ist der numerische Faktor n: -3.

rklärung. Trägt man die natürlichen Zahlen anstatt in einer g im Kreise herum auf die Strahlen eines n-strahligen Büschels nennt man alle Zahlen eines und desselben Strahls untereinander nt; auf verschiedenen Strahlen befindliche Zahlen sind untereinkongruent. Die Anzahl der Strahlen nennt man den Modulus der nz und schreibt: $a \equiv b \pmod{n}$ So ist, wie aus der Figur 1 zu entnehmen ist:

1

0, 3, 6

$0 \equiv 3 \equiv 6 \pmod 3$

$1 \equiv 4 \equiv 7 \pmod 3$

$2 \equiv 5 \equiv 8 \pmod 3$.

Fig. 1.

Trennung der gleichen von den ungleichen Wurzeln. I
in der gegebenen Gleichung gegen unsere vorläufige Annahm
ungleichen Wurzeln auch gleiche vor, so kann man die letzt
den erstern absondern. Schreibt man die gegebene Gleichung
der Form eines Produktes: $f = (x - x_1)\ (x - x_2)\ \ldots\ (x - x$
und sind einige Wurzeln einander gleich, etwa $(x - x_1)^\alpha\ (x - x$
$\alpha = 2,\ 3\ \ldots\ \nu$, ebenso β, dann ist der erste Differential
$f_1 = \alpha(x - x_1)^{\alpha-1}\ (x - x_2)^\beta \ldots + \beta(x - x_1)^\alpha\ (x - x_2)^{\beta-1} + \ldots$
größte gemeinschaftliche Maß der Funktionen f und f_1 ist
$(x - x_1)^{\alpha-1}\ (x - x_2)^{\beta-1} \ldots = f'(x)$. Hat die letztere Gleichung
mehrere gleiche Wurzeln, so verfährt man mit ihr wie mit der
gleichung, bis man eine Endgleichung bekommt, wo nur noch von
verschiedene Wurzeln vorhanden sind.

Unterscheiden sich 2 Wurzeln nur durch das Vorzeichen vone
sei es daß beide reell oder beide rein imaginär sind, so kann
indem man sie zum Quadrat erhebt, gleich machen, und dann
übrigen Wurzeln absondern.

Komplexe Wurzeln. Kommen in einer Gleichung mit ree
effizienten auch komplexe Wurzeln vor, so müssen bekanntlich
einander konjugiert sein. Das ist ein Fall, wo 2 Wurzeln zwar
sind, aber doch einen gleichen absoluten Wert haben. In diesem ga
dritten Fall, wo also $|x_1| = |x_2| > |x_3| > \ldots |x_n|$, ist $A_1 = -(x_1^m$
zu setzen und $A_2 = x_1^m\ x_2^m$ ☆. Schreibt man für $x_1 = r_1\ (\cos\alpha -$
und für x_2, da es zu x_1 konjugiert ist, $r_1\ (\cos\alpha - i\sin\alpha)$
$x_1^m = r_1^m\ (\cos m\alpha + i\sin m\alpha)$ und $x_2^m = r_1^m\ (\cos m\alpha - i\sin m$
$A_1 = -2\ r_1^m \cos m\alpha$ ☆ und $A_2 = r_1^{2m}\ (\cos^2 m\alpha + \sin^2 m\alpha)$ ☆ =
daher $r_1 = \sqrt[2m]{A_2}$ ☆ und $\cos m\alpha = -\frac{A_1}{2\,r_1^m}$ ☆ $= \frac{-A_1}{2\sqrt{A_2}}$ ☆ $= -$

Wir nennen diesen Wert kurz $\mathfrak{a}$.

Aus dieser Relation folgt $m\alpha = \arccos\mathfrak{a} \mp 2\pi k$, k eine gan
und $\alpha = \frac{1}{m}\arccos\mathfrak{a} + 2\pi\cdot\frac{k}{m}$, eine scheinbar sehr einfache Form,
in dieser Gestalt praktisch fast unbrauchbar. Man vergegenwärtige
was $\frac{k}{m}$ zu bedeuten hat. Da k alle ganzen Zahlen von 0 bis n
laufen kann und m ja in den meisten Fällen eine sehr hohe Z
wird, etwa 81 oder gar 243, so müßte man, um den wahren W
α zu finden, versuchsweise m Substitutionen in die Stammgleich
nehmen, um nur einen Wert behalten zu können. Wir müssen
nach einem andern Mittel umsehen. Würde man in die Stamm

$u+vi$ einsetzen, so erhielte man 2 Gleichungen mit 2 Unbekann-
e eine vom n-ten, die andere vom n'-ten Grade ($n' < n$); würde
un die eine Unbekannte eliminieren, so erhielte man schließlich
leichung vom $n \cdot n'$-ten Grade, worin nur eine Wurzel den wahren
epräsentiert. Also wieder nn' Versuchsrechnungen und dazu noch
lösung einer Gleichung vom höhern Grade als die Stammgleichung!
vähne das alles, um es recht klar zu machen, daß der Weg, den
m diese letzte Klippe zu umgehen, einschlagen, trotz der etwas
rigen Rechnungen im Vergleich zu den vorhandenen Schwierig-
doch noch als ein einfacher Ausweg erscheint und daß unsere
ation der Gräffe'schen Methode, die Erhebung der Wurzeln zum
nun neben der letztern sich als eine Notwendigkeit erweist.

ch leite nun aus der Stammgleichung auch nach der Gräffe'schen
e, (das Vorzeichen der Wurzeln ist ja schon durch unser Verfahren
nt worden) eine Endgleichung ab, worin die Wurzeln zur m'-ten
erhoben sind. Man kann auch mit beiden Verfahren abwechseln
hält so eine dritte, wenn nötig, auch eine vierte Endgleichung
worin die Exponenten $m', m'', m''', \ldots$ eine von den Zahlen
p und q beliebige ganze Zahlen) bedeuten. Man erhält so neben
$rccos\,\mathfrak{a} + 2\pi k$ ☆ noch andere Gleichungen $m' \alpha = arccos\,\mathfrak{a}' + 2\pi k'$ ☆,
$arccos\,\mathfrak{a}'' + 2\pi k''$ ☆ u. s. w. Wenn man nun diese Gleichungen in
er Weise addiert, resp. subtrahiert, so wird es immer möglich
ne Kombination zu finden, für welche $m\alpha \mp m'\alpha \mp m''\alpha + \ldots = \alpha$ ist.
um ein Beispiel anzuführen, $32 - 27 = 5$, $256 - 243 = 13$,
$4 = 17$; und endlich $13 + 5 - 17 = 1$. Demnach $\alpha = arccos\,\mathfrak{a} \mp$
$s\mathfrak{a}' \mp arccos\,\mathfrak{a}'' + \ldots . (k \mp k' \mp k'' + \ldots) 2\pi$ ☆, — — — (29).
$\mp k' \mp k'' + \ldots$ wieder eine ganze Zahl ist.

a ferner $-(x_1^m + x_1^m) = A_1$ und $x_1^m x_2^m = A_2$ die Wurzeln einer
ischen Gleichung sind, so kann man auch schreiben:

$$z^2 + A_1 z + A_2 = 0; \text{ also}$$

$$z = x_1^m,\ x_2^m = -\frac{A_1}{2} \mp \sqrt{\frac{A_1^2}{4} - A_2}\ \text{☆ und}$$

$$x_1, x_2 = \sqrt[m]{-\frac{A_1}{2} \mp \sqrt{\frac{A_1^2}{4} - A_2}}\ \text{☆} \quad - - - - - \quad (30).$$

atürlich begreift diese Lösung auch den Fall in sich, daß die
Wurzeln reell, gleich oder ungleich, sind. Doch ist der Wurzel-
k m-deutig; er kann nach (29) eindeutig gemacht werden. Es
also, wenn man die Formel (30) anwendet, die vorherige Unter-
darüber, ob die beiden höchsten Wurzeln, komplex oder reell,
der ungleich sind.

Doch wie überzeugt man sich davon, wann man mit Poten
der Wurzeln aufhören kann? Antwort: Wenn sich die Wer
resp. r_1 und α in der nächstfolgenden Gleichung mit Rücksich
für den besondern Zweck in Betracht kommende Genauigk
mehr ändern.

Durch die vorstehenden Formeln sind jedoch noch nicht
lichen Fälle erledigt. Es kann auch vorkommen, daß 3 Wurzel
plexe und eine reelle, dem absoluten Werte nach gleich sin
komplexe Wurzelpaare u. s. f., ja es können auch alle Wurzeln
genommen, einander gleich sein und sich nur durch den Richtung
enten voneinander unterscheiden.

Ein Kriterium für die Anzahl der quantitativ gleichen größ
zeln findet man durch folgende Erwägungen:

Gibt es k quantitativ unter sich gleiche größte Wurzeln $z =$
sind die übrigen $n - k$ Wurzeln gegen sie verschwindend klei
wenn r den absoluten Wert dieser Wurzeln bezeichnet, $A_k = (-$
da ja das Produkt ihrer Richtungskoeffizienten $e^{i\alpha - i\alpha} \cdot e^{i\beta - i}$
ist und die übrigen Summanden in A_k gegen das erste Glied vers
Ist also bei der nächsthöhern oder bei mehrern aufeinander
Endgleichungen mit den Wurzelexponenten $m, m', m'', \ldots$ ($\mu =$
$\mu' = m'' - m', \ldots$ eine gerade Zahl) $A'_k = A_k^{m'-m}$, $A''_k = A'^{m''-m}_k$
während von den vorhergehenden Gliedern $A_{k-1}, A_{k-2}, \ldots$
gilt, so ist das ein Kennzeichen dafür, daß die absoluten We
der höchsten Wurzeln der Stammgleichung einander gleich sind.
Denn, wenn diese Relation bei einem Gliede A_k stattfindet, s
ein Beweis dafür, daß die Wurzeln $z_{k+1}, z_{k+2}, \ldots$ gegen di
verschwinden, x_{k+1}, x_{k+2}, also kleiner sind als $x_1, x_2, \ldots x_k$
aber die ersten k Wurzeln nicht einander gleich, so müsste die
schon bei einem frühern Gliede stattfinden. Die Relation kann a
stattfinden, weder bei einem frühern Gliede als A_k bei k q
gleichen Wurzeln noch bei A_k, wenn mehr als k Wurzeln q
einander gleich sind. Denn in diesem Falle besteht sicher für ei
$\mu = m' - m$ wenigstens eines der beiden Glieder A_k und A'_k
als einem Summanden, die nicht verschwinden, etwa $A_k = u_1$

Dann aber kann $w_{k1}^{\mu} + w_{kh}^{\mu}$ nicht gleich sein $(w_{k1} + w_{kh})^{\mu}$.
$z_1, \ldots z_k$ noch das konjugierte Wurzelpaar z_{k+1} und z_{k+2} q
gleich, so kommt zum ersten Gliede von A_k $z_1, \ldots z_k$, welches w
bezeichnet haben, noch wenigstens ein Glied dazu, welches nicht v
det, nämlich w_{kh}, in dem das neue Wurzelpaar als Produkt v
Wäre mit $z_1, z_2, \ldots z_k$ noch eine reelle Wurzel z_{k+1} quantita

ıte allerdings in $z_1 \ldots z_k + z_{k+1}$ $(2r^m \cos\alpha + 2r^m \cos\beta + \ldots)$ ·oßer Werte von r^m das zweite Glied wegen der Kleinheit der ıe verschwinden, jedoch nicht mehr in A_k bei geradem μ (etwa 2 wegen $r^{m'} \cdot \cos 2\alpha = r^{m'}(2\cos\alpha - 1) = 2r^{m'}\cos\alpha - r^{m'}$. Denn ıs α verschwindet, so verschwindet nicht $\cos 2\alpha$ und umgekehrt.

ın nun diese k-Wurzeln zu bestimmen, hat man nur zu schreiben: $z^{k-1} + \ldots A_{k-1} z + A_k = 0$, worin nun keine quantitativ un- Wurzeln mehr vorkommen.

ı ersetze nun in der vorstehenden Gleichung die Größe z durch (Von den beiden Vorzeichen $\mp$ ist, damit mit Rücksicht auf die roximativen Wertbestimmungen die Wurzeln nicht zu klein werden, lem Vorzeichen von A_1 übereinstimmende zu wählen). Dadurch wer- Wurzeln bis höchstens auf ein Wurzelpaar quantitativ voneinander den und es kann nun nicht geschehen, daß man durch die Sub- $Z \mp r$ den Nullpunkt der Zahlenebene an einen Ort verlegt, wo r noch mehr von den neuen Wurzeln einander gleich werden Eine eventuelle weitere Substitution $Z = q\,Z'$, um das letzte 1 zu machen, alteriert unser Resultat nicht, da sich ja die Wurzeln r proportional ändern.

t man so die k größten Wurzeln gefunden, so wird die Stamm- durch $(x - x_1) \ldots (x - x_k)$, dividiert und so der Grad der n Gleichung um k erniedrigt. Mit der neuen Gleichung ver- an in gleicher Weise. Man braucht die Potenzierungen nicht mal vorzunehmen, sondern man findet beispielsweise für $k = 2$, fizienten C_1 der neuen Gleichung $z^{n-2} + C_1 z^{n-3} + C_2 z^{n-4} + \ldots = 0$, an $A_3 = -x_1^m x_2^m (x_3^m + x_4^m + \ldots)$ ☆ durch $x_1^m x_2^m$ dividiert. entsprechender Weise wird C_2 bestimmt, u. s. f.

mplexe Koeffizienten. Es ist nur noch ein Fall kurz zu bespre- ie gegebene Gleichung hat komplexe Koeffizienten. Man kann ı Falle einfach die gegebene Gleichung mit der entsprechenden ten multiplizieren. Diese letztere liegt zur erstern symmetrisch auf die Abszissenachse. Es wird so die gegebene Gleichung lche mit reellen Koeffizienten verwandelt. Eine Substitution der efundenen Wurzeln in die ursprüngliche Gleichung entscheidet Vorzeichen des imaginären Bestandteils der Wurzel.

haben uns nun überzeugt, daß unser Verfahren wirklich in ll zum Ziele führt. In sehr vielen Einzelfällen wird es natürlich sein, direkt ein h zu finden, welches die Konvergenz der Um- reihe verbürgt.

V.

In den Fällen, wo man direkt die Konvergenzkonstante bestimmen kann, haben sich, wie Kapitel IV gezeigt hat, als no Vorstufe für die Benützbarkeit der Umkehrungsreihe ziemlich lan Rechnungen ergeben, die genügend lange fortgesetzt, wenigstens algebraischen Gleichungen anbetrifft, die Umkehrungsreihe sogar lich erscheinen lassen. Worin besteht also der Wert der Uml reihe? Ich will in der Antwort darauf die Begriffe „theoretis „praktisch" gar nicht anwenden, weil, was jetzt praktisch ist, w ein besseres Mittel für den betreffenden Zweck gefunden hat werden und umgekehrt, was jetzt nur „theoretischen" Wert besz nent praktische Bedeutung erlangen kann. Um mich kurz zu fa Umkehrungsreihe ist ein analytischer Ausdruck, mit dem m operieren kann. Man kann sie multiplizieren, potenzieren, diffe in andere Formen überführen und auf alle möglichen Arten während die gewöhnlichen Näherungsmethoden, obgleich sie fürs Zwecke von großem Werte sind, diese Eigenschaft, da sie eine lichen Ausdruckes entbehren, natürlich nicht besitzen können.

Variation der Umkehrungsreihe. Die funktionellen und ε. Unter Variation verstehe ich hier ganz allgemein eine des Ausdruckes. Dies kann geschehen: erstens durch Verwan Umkehrungsreihe in einen unendlichen Kettenbruch, auf dessen schaft mit der Reihe schon das abwechselnde Vorzeichen de deutlich hinweist, oder man variiert die gegebene Funktion, indem man das Argument x durch eine neue Funktion $\mathfrak{F}(x$ oder, indem man die gegebene Funktion zum Argumente ein macht oder beides miteinander verbindet. Das Symbol dafü $Ff\mathfrak{F}(x) = y = 0$. Diese Änderungen haben den Zweck, eine entwickeln, welche für ein bestimmtes h, etwa $h = 0$, konvergiert u stens die diesem h entsprechende Wurzel mit der Stammgleichung g

Alle diese Änderungen können jedoch nur eine Vereinfac Lösung einer Aufgabe herbeiführen, auf die wir schon im vorig eine positive Antwort erhalten haben. Es fehlt uns der Raum, Variationen wirklich auszuführen und wir beschränken uns Andeutungen. Diese Variationen können aber noch andere Zw folgen, und wir wollen speziell nur an denjenigen Stellen etw verweilen, wo neue Beziehungen zwischen den uns schon bekan neuen „funktionellen" Zahlen aufgedeckt werden, denen wir im ersten Teil unserer Abhandlung eine größere Aufmerksa gewendet haben.

$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots a_n = 0$ ist gegeben. Daraus folgt
$-(a_1 x^{n-1} + \ldots a_n)$; $x = \sqrt[n]{-(a x^{n-1} + \ldots a^n)}$ und endlich
$-(a_1 x^{n-1} + \ldots a_n) = 0$. Da der Wurzelausdruck n-deutig ist, so
man daraus für ein passendes h alle Wurzeln der Gleichung aus
kehrungsreihe erhalten.

$lf(x) = g(x) = y$. Da $f(x) = 0$ ist, so ist y in der Umkehrungs-
= 1 zu setzen. Es ist $g_1 = \frac{f_1}{f}$, $g_2 = \frac{f_2}{f} - \frac{f_1^2}{f^2}$; $g_3 = \frac{f_3}{f} - \frac{3 f_2 f_1}{f^2}$

$$g_4 = \frac{f_4}{f} - \frac{4 f_3 f_1 + 3 f_2^2}{f^2} + \frac{12 f_2 f_1^2}{f^3} - \frac{6 f_1^4}{f^4};$$

$$- \frac{5 f_4 f_1 + 10 f_3 f_2}{f^2} + \frac{20 f_3 f_1^2 + 30 f_2^2 f_1}{f^3} - \frac{60 f_2 f_1^3}{f^4} + \frac{24 f_1^5}{f^5};$$

$$- \frac{6 f_5 f_1 + 15 f_4 f_2 + 10 f_3^2}{f^2} + \frac{30 f_4 f_1^2 + 120 f_3 f_2 f_1 + 30 f_2^3}{f^3}$$

$$\frac{f_1^3 + 270 f_2^2 f_1^2}{f^4} + \frac{360 f_2 f_4^1}{f^5} - \frac{120 f_1^6}{f^6}.$$

us allgemeine Bildungsgesetz der Koeffizienten für ein Glied
f_n^ν, wenn wir wieder die Anzahl der Faktoren mit r bezeich-
tet: $(-1)^{r-1} \cdot \frac{(\alpha a + \beta b + \ldots \nu n)!\,(r-1)!}{\alpha!\,\beta! \ldots \nu!\; a!^\alpha\, b!^\beta \ldots n!^\nu}$, und ihre Summe für
ist $= 0$. — — — — — — — — — — — — — — (32)

Setzt man für F den hyperbolischen Sinus, so wird $\mathfrak{Sin}\, pf(x)$
$= y = 0$; p ist eine beliebige Konstante. Die Werte für x, welche
ullieren, genügen auch der Gleichung $\mathfrak{Sin}\, pf = 0$. Die nach Po-
rtschreitende Größe $g_0 = \frac{g}{g_1}$ ist offenbar $\frac{\mathfrak{Sin}\, pf}{pf_1 \mathfrak{Cos}\, pf} = \frac{\mathfrak{Tg}\, pf}{pf_1}$. Für
f ist $\mathfrak{Tg}\, pf$ immer ein echter Bruch und, da wir über p beliebig
, können wir mittelst dieser Konstanten für g_0 einen beliebigen
ischen 0 und 1 festsetzen. Nun ist $g_1 = pf_1\, \mathfrak{Cos}\, pf$;
$^2 \mathfrak{Sin}\, pf + pf_2\, \mathfrak{Cos}\, pf$; $g_3 = 3p^2 f_1 f_2\, \mathfrak{Sin}\, pf + (p^3 f_1^3 + pf_3)\, \mathfrak{Cos}\, pf$;
$f_1^4 + 4p^2 f_1 f_3 + 3p^2 f_2^2) \mathfrak{Sin}\, pf + (6p^3 f_1^2 f_2 + p f_4)\, \mathfrak{Cos}\, pf$; u. s. f.
es genügt, um das Gesetz der Koeffizientenbildung zu erkennen.
asselbe Gesetz wie in der Umkehrungsreihe für $f(x)$, nur daß der
e Index auch 1 sein kann und das Vorzeichen immer positiv ist.

$$f_a^\alpha f_b^\beta \ldots f_n^\nu = \frac{(\alpha a + \beta b + \ldots \nu n)!}{\alpha!\,\beta! \ldots \nu!\; a!^\alpha\, b!^\beta \ldots n!^\nu} = \varkappa_a^\alpha \varkappa_b^\beta \ldots \varkappa_n^\nu \quad — \quad — \quad (33).$$

r Exponent von p ist $= r = \alpha + \beta + \ldots \nu$.

ostituiert man die so gewonnenen Werte $g_1, g_2, g_3, \ldots$ der Gleichung
i) in die Umkehrungsreihe und nennt die neue Potenzgröße in

2): $\mathfrak{P}$ und in 3) $\mathfrak{Q}$, so ergibt sich in beiden Fällen die mer
Tatsache, daß im allgemeinen Gliede in 2): $\frac{\mathfrak{P}^n}{n!}(\varphi_N + \mathfrak{A}_n)$ ebens
3): $\frac{\mathfrak{Q}^n}{n!}(\varphi_N + \mathfrak{B}_n)$ der Ausdruck φ_N unverändert wieder erscheint,
tiv vermehrt um ein Polynom $\mathfrak{A}$, resp. $\mathfrak{B}$ — — — — — —

In 2) ist außerdem die Koffizientensumme von $\varphi_N - \mathfrak{A}_n$ wie

4) Man kann aus $Ff(x) = g(x)$, auch eine unendliche Reil
so daß $g(x) = p_1 f + p_2 f^2 + p_3 f^3 + \ldots$ in inf. .; $p_1, p_2, p_3, \ldots$
liebige konstante Größen.

Ist also $f(x) = 0$, so ist auch $g(x) = 0$.
Es ist dann $g_1 = p_1 f_1 + 2p_2 f f_1 + 3p_3 f^2 f_1 + \ldots$.
$g_2 = p_1 f_2 + 2p_2 (f f_2 + f_1^2) + 3p_3 (f^2 f_2 + 2 f f_1^2) + \ldots$;
allgemein $g_1 = k_{11} p_1 + k_{12} p_2 + k_{13} p_3 + \ldots$
$g_2 = k_{21} p_1 + k_{22} p_2 + k_{23} p_3 + \ldots$
— — — — — — — — , worin $k_{11}, k_{12}, \ldots$
irgendwelche Verbindungen von $f, f_4, f_2 \ldots$ bedeuten. Setzt
$g_1 g_2, \ldots$ der Reihe nach $= 1$, berechnet mittelst Determinanten
obigen System von unendlich vielen Gleichungen die Größen p
(die zu p_1 gehörige Determinante bezeichnen wir mit D_1, die
hörige mit D_2 u. s. f. und die Determinante des Systems mit D,

$p_1 = \frac{D_1}{D_0}$, $p_2 = \frac{D_2}{D_0}$, u. s. w., $g(x) = \frac{D_1}{D_0} f + \frac{D_2}{D_0} f^2 + \frac{D_3}{D_0} f^3 + \ldots$

und $x = l\left(1 + \frac{D_1}{D_0} f + \frac{D_2}{D_0} f^2 + \ldots\right)$. — — — — — — —

Die Reihe ist, wenn $f < 1$, was man immer erreichen k
wenn kein Quotient $\frac{D^n}{D_0} = \infty$ ist, konvergent. Für andere W
$g_1, g_2, \ldots$ würde man anstatt l auch wieder andere Funktion
arcsin) erhalten.

Erklärung. Das Symbol 1) $\begin{vmatrix} a, & b \\ c, & d \end{vmatrix}$ nennt man eine zweireig
Symbol 2) $\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ d, & e, & f \\ g, & h, & i \end{vmatrix}$ eine dreireihige Determinante.

Allgemein müssen die Horizontal- und Vertikalreihen (Ze
Kolumnen) gleich viel Glieder (Elemente) enthalten. Man verst
unter einer n-reihigen Determinante die Summe aller möglich
Faktoren derart gebildeten Produkte der n^2 Elemente, daß n
Elemente eines Produktes aus der gleichen Reihe oder aus der
Kolumne entnommen werden. Es gibt $n!$ solcher Produkte.

ir wollen nun noch eine Regel angeben, wie man aus der Figur
trix) selbst das Vorzeichen eines solchen Produktes bestimmen
Ich verbinde alle Elemente eines Produktes durch Striche und
so einen vom linken bis zum rechten Vertikalstrich reichenden
g. Die Elemente unterhalb dieses Linienzuges bleiben unbeachtet.
n in jeder Zeile alle rechts vom gewählten Elemente stehenden
e durchgestrichen, so bleibt oberhalb des Linienzuges noch eine An-
mente (in der Figur mit Sternchen bezeichnet) zurück. Ist diese An-
t, so ist $(-1)^a$ das Vorzeichen des betreffenden Produktes — — (36).
h ist 1) $= ad - bc$, 2) $aei - ahf - dbi + dhc + gbf - gec$.
zeichen, beispielweise von gec, wie Fig. 2 zeigt, ist $= (-1)^3$,
zeichen von dhc (Fig. 3) $= (-1)^2$.

Fig. 2.

Fig. 3.

h habe diesen Satz ohne Beweis
einer Anschaulichkeit mitgeteilt. Ein
würde wieder andere Erklärungen
n und kann von jedem Fachmann,
die mit dem Steigen und Fallen der Verbindungsstriche zusammen-
en Inversionen beachtet, leicht hergestellt werden.)

n System von Gleichungen, z. B. $\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= d_3 \end{aligned}\right\}$ wird
der Determinanten auf folgende Weise aufgelöst. Man bildet zu-
ie Determinante des Systems: $\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = D_0$. Die zu x ge-
eterminante D_1 findet man, wenn man in D_0 a durch d ersetzt.
gehörige Determinante D_2 ist gleich D_0, worin b durch d er-
Endlich findet man D_3, die zu z gehörige Determinante, durch
des Buchstaben c durch d. Dann ist $x = \frac{D_1}{D_0}$, $y = \frac{D_2}{D_0}$ und
Dementsprechend verfährt man bei einem System von n Gleichungen.

$\frac{a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots}{b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \ldots}$ kann man gleichsetzen $c_0 + c_1 t + c_2 t^2$
$\ldots$ in inf. Nach Ausmultiplizierung von $(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots)$
$t^2 + \ldots) = a_1 t + a_2 t^2 + \ldots$ und Gleichsetzung der entsprechen-
fizienten findet man: $b_1 c_0 = a_1$; $b_1 c_1 + b_2 c_0 = a_2$;
$+ b_2 c_1 + b_3 c_0 = a_3$; $b_1 c_3 + b_2 c_2 + b_3 c_1 + b_4 c_0 = a_4$;
$+ b_2 c_3 + b_3 c_2 + b_4 c_1 + b_5 c_0 = a_5$; u. s. w.

Daraus ergibt sich sukzessive:

$$c_0 = \frac{a_1}{b_1};\quad c_1 = \frac{a_2}{b_1} - \frac{a_1 b_2}{b_1^2};\quad c_2 = \frac{a_3}{b_1} - \frac{a_2 b_2 + a_1 b_3}{b_1^2} + \frac{a_1}{b}$$

$$c_3 = \frac{a_4}{b_1} - \frac{a_3 b_2 + a_2 b_3 + a_1 b_4}{b_1^2} + \frac{a_2 b_2^2 + 2 a_2 b_2 b_3}{b_1^3} - \frac{a_1 b_2^3}{b_1^4};$$

$$c_4 = \frac{a_5}{b_1} - \frac{a_4 b_2 + a_3 b_3 + a_2 b_4 + a_1 b_5}{b_1^2} + \frac{a_3 b_2^2 + 2 a_2 b_2 b_3 + a_1 b_3^2}{b_1^3}$$

$$- \frac{a_2 b_2^3 + 3 a_1 b_2^2 b_3}{b_1^4} + \frac{a_1 b_2^4}{b_1^5};\ \text{u. s. w.}$$

Aus dem obigen System der Gleichungen kann man diese A für c auch mittelst der Determinanten darstellen.

Die in diesen Ausdrücken herrschenden Gesetze liegen Hand. Für das allgemeine Glied c_n ergeben sich folgende Rege

Die Indizessumme eines Produktes im Zähler des r-ten B $n + r$. Die Anzahl der Faktoren eines solchen Produktes im r-t ist $= r$. Die numerischen Koeffizienten sind nicht von den a- nur von den b-Faktoren abhängig und $= \frac{(\alpha + \beta + \ldots \nu)!}{\alpha!\,\beta!\ldots\nu!}$. Das V wird durch $(-1)^{n-r}$ bestimmt.

Die Ähnlichkeit von $c_0, c_1, \ldots$ mit den Gliedern unserer Um reihe ist unverkennbar. Vergleicht man beispielsweise c_4 mit dem für φ_5, so ist es sehr naheliegend, b_1 mit f_1, b_2 mit $\sigma_2 f_2$, b_3 mit σ_3 zu identifizieren. Ferner ist gleichzusetzen: $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = a_4$ und $\varphi_5 f_1^4 = c_4$ (allgemein $\varphi_n f_1^{n-1} = c_{n-1}$). $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ sind fu Zahlen, deren Multiplikationsregel sich aus der Erwägung ergibt die numerischen Faktoren von b nach der Multiplikation wieder müssen und nur die $\varkappa$-Produkte übrig bleiben dürfen.

Es ist also $\sigma_a^{\alpha}\sigma_b^{\beta}\ldots\sigma_n^{\nu} = \varkappa_a^{\alpha}\varkappa_b^{\beta}\ldots\varkappa_n^{\nu} \cdot \frac{\alpha!\,\beta!\ldots\nu!}{(\alpha+\beta+\ldots\nu)!} =$

$\frac{(\alpha a + \beta b + \ldots \nu n)!}{(\alpha+\beta+\ldots\nu)!\,a!^{\alpha}\,b!^{\beta}\,n!^{\nu}}$. Nimmt man noch eine funktionelle Z mit der Multiplikationsregel $\varepsilon^n = \frac{1}{n!}$, so daß also $[\varepsilon \,.\, \varepsilon^n] = \frac{1}{(n+}$ dann ergibt eine genaue Vergleichung mit der Umkehrungsreih

$$x = h - f \cdot \frac{1}{f_1} + f \cdot \frac{f}{2!\,f_1}\, f_1\varphi_2 - f \cdot \frac{f^2}{3!\,f_1^2} f_1^2\varphi_3 + \ldots =$$

$$= h - \left[\varepsilon f \,.\, (c_0 - \frac{1}{1!} f_0 c_1 + \frac{1}{2!} f_0^2 c_2 - \ldots)\right] \text{ eine neue Form}$$

$$x = h - \left[\frac{\varepsilon f}{f_1 - \sigma_2 f_2(\varepsilon f_0) + \sigma_3 f_3 (\varepsilon f_0)^2 - \ldots (-1)^{n-1}\sigma_n f_n (\varepsilon f_0)^{n-1}}\right]$$

wobei $t = -\frac{\varepsilon f}{f_1} = -\varepsilon f_0$ gesetzt wurde.

a ferner, wenn n die höchste Potenz in der algebraischen Gleichung Ableitung f_{n+1} und alle folgenden $= 0$ sind, so bricht die Reihe ner des Ausdruckes (37) bei $\sigma_n f_n$ von selbst ab.

ellt man endlich aus dem obigen System der Gleichungen für ie Zahlen c durch Determinanten dar, so ist beispielsweise $c_4 =$

$$\begin{vmatrix} , & 0. & 0, & b_1 \\ , & 0, & b_1 & b_2 \\ , & b_1, & b_2 & b_3 \\ , & b_2, & b_3 & b_4 \\ , & b_3, & b_4 & b_5 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0, & 0, & 0, & 0, & b_1 \\ 0, & 0, & 0, & b_1, & b_2 \\ 0, & 0, & b_1, & b_2, & b_3 \\ 0, & b_1, & b_2, & b_3, & b_4 \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & b_5 \end{vmatrix}$$

Ersetzt man darin die a_n, b_n durch die entsprechenden Werte $\sigma_n f_n$ $(n = 2, 3, 4, ..)$ u. s. f., wie oben, und nimmt $f_1 = f_2 = f_3 = \ldots = 1$ an, so erhält man mit Rücksicht auf (7) und, da die zweite Determinante

$)^{1+2+3+4} = (-1)^{\frac{5.4}{2}}$ ist, die merkwürdige Relation zwischen den

$$\sigma_n \text{ wegen } c_4 = \varphi_5 f_1^4 : \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & \sigma_2 \\ 0, & 0, & 1, & \sigma_2, & \sigma_3 \\ 0, & 1, & \sigma_2, & \sigma_3, & \sigma_4 \\ 0, & \sigma_2, & \sigma_3, & \sigma_4, & \sigma_5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2+3+4} \cdot (-1)^4 \cdot 4!$$

— — — — (38).

e Verallgemeinerung dieser Relation für c_n ergibt sich aus der nden Matrix, in der man die erste Zeile und die erste Kolumne tlassen kann und die dann symmetrisch wird, von selbst. Die)eterminante beschränkt sich auf die Diagonale, welche nach (36) $^{1+2+3+\cdots n}$. Der höchste Index von σ ist $n + 1$.

ist z. B. für $n = 2$

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & \sigma_2 \\ 0, & \sigma_2, & \sigma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & \sigma_2 \\ \sigma_2, & \sigma_3 \end{vmatrix} = [\sigma_3 - \sigma_2^2] = \frac{3!}{1!\,3!} - \frac{4!}{2!\,2!^2} =$$

$$= 1 - 3 = -2 = (-1)^{1+2} \cdot (-1)^2 \cdot 2!$$

dere Werte für $f_1, f_2, \ldots$, wie wir sie etwa in (8), (9), (10) an- n haben, würden auch wieder andere Beziehungen zwischen den liefern.

e man sieht, ist unsere Umkehrungsreihe noch lange nicht nach htungen hin ausgewertet; ich begnüge mich jedoch damit, ge- haben, um noch einmal die hauptsächlichsten Resultate unserer ng zu reasummieren,

daß eine verhältnismäßig einfache Umkehrungsreihe existiert, efliegende Beziehungen zu vielen Nachbargebieten, namentlich nktionellen Zahlen, aufweist, und

daß es immer möglich ist, auf direktem Wege ohne eigentliche rechnungen jede algebraische Gleichung mit beliebiger Genauig- ulösen.

17

ze aus der Reihenlehre

von

Georg Maurer,
kgl. Gymnasial-Professor.

Programm
kgl. bayer. Studienanstalt zu Münnerstadt
zum
Schlusse des Schuljahres
1878/79.

Würzburg.
Druck der Thein'schen Druckerei (Stürtz).
1879.

Das vorliegende Programm ist aus dem doppelten Wunsche
den, den Schülern besonders der oberen Gymnasialklassen Einiges
em, was ihnen während des Jahres häufig nur angedeutet
n kann, vorzulegen, dann aber auch, denselben zu zeigen, wie
sie mit den ihnen zu Gebote stehenden Elementen etwa gehen
n. Es wurden die meisterhaften Arbeiten von Schlömilch,
u. A. zu Grunde gelegt, aber in einer den Schülern zugäng-
n Form vorgeführt, ohne deßhalb der Präcision des Ausdruckes
zu vergeben. Möge die kleine Arbeit unter diesem Gesichts-
ihre Würdigung finden.

§ 1.

Differenzen-Reihen.

a) Niedere arithmetische Reihen.

Unter einer niedern arithmetischen Reihe oder arithmetischen
ssion versteht man eine Reihe von Zahlen, in welcher jede da-
efunden wird, daß man zur vorhergehenden stets die nämliche
dirt. Die Zahl, welche jedesmal addirt wird, heißt die Differenz
he. So ist z. B.

5, 7, 9, ... eine arithm. Reihe mit der Differenz 2.

e allgemeine Form der arithmetischen Reihe, deren erstes
= a und Differenz = d ist, ist folgende

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d,\ \ldots\ldots$$

Aus dieser allgemeinen Form ergibt sich, daß man jedes
ner arithmetischen Progression findet, wenn man zum ersten
n Produkt addirt, das aus der Differenz und der Zahl be-
elche angibt, wie viele Glieder dem gesuchten vorangehen.

Soll z das letzte Glied einer Reihe von n Gliedern sein,
nan

$$\text{I.}\quad z = a + (n-1)\,d \quad \text{d. h.}$$

e Glied einer arithmetischen Progression besteht aus der
des ersten Gliedes und dem Produkte aus der Differenz
um 1 verminderten Gliederzahl.

Nimmt man das letzte Glied einer arithmetischen Progression
s, so wird man in derselben jedes neue Glied finden, wenn
1 dem vorher gehenden die Differenz subtrahirt; demnach

ergibt sich die allgemeine Form der arithmetischen Reihe n
selben Gesetze wie oben

$$z,\ z-d,\ z-2d,\ z-3d,\ z-4d$$

5) Um die Summe = s einer arithmetischen Reihe von n
zu finden, hat man, wenn die Reihe einmal mit dem e
einmal mit dem letzten Gliede beginnt,

$$s = a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + (a+4d) +$$
$$s = z + (z-d) + (z-2d) + (z-3d) + (z-4d) +$$

und hieraus erhält man durch Addition

$$2s = (a+z) + (a+z) + (a+z) + (a+z) +$$

und weil die Reihe n Glieder haben soll, so steht der
(a + z) n mal da, also

$$\text{II.}\quad s = (a+z)\,\frac{n}{2}$$ d. h.

die Summe der ersten n Glieder einer arithmetischen R
man, wenn man die Summe des ersten und letzten Glied
halben Gliederzahl multiplicirt.

6) Führt man aus I statt z den Werth in der Form
so erhält man

$$\text{III.}\quad s = [a + a + (n-1)\,d]\,\frac{n}{2}$$
$$= [2a + (n-1)\,d]\,\frac{n}{2}.$$

Mittelst der Formel I — III lassen sich die Aufgaben
metischen Progression lösen.

Beispiele.

1) Man bestimme das erste Glied a und die An
Glieder einer Reihe, deren s = — 90, d = — 2 und z =

1) $z = (a + n - 1)\,d$ 2) $s = (a+z)\,\frac{n}{2}$

$-20 = a - 2n + 2$ $-90 = (2n - 22$

$a = 2n - 22$ $n^2 - 21n = -9$

$a = 8$ oder $a = -10$ $n = 15$ oder $n =$

sind also zwei Reihen möglich; fängt die Reihe mit $a = 8$ ind 15 Glieder, fängt sie aber mit $a = -10$ an, so sind er nöthig, um die Summe $s = -90$ zu erhalten.

In einer arithmetischen Reihe von 6 Gliedern ist die Summe und 4. Gliedes $= 19$, das Produkt dieser 2 Glieder 88. e die Reihe.

1) $(a + 2d) + (a + 3d) = 19$

$$2a + 5d = 19$$

$$a = \frac{19 - 5d}{2}$$

$$a = 2 \text{ oder } 17$$

2) $(a + d)(a + 3d) = 88$

$$\left(\frac{19 - 5d}{2} + 2d\right)\left(\frac{19 - 5d}{2} + 3d\right) = 88$$

$$(19 - d)(19 + d) = 352$$

$$d = \pm 3$$

Reihe : 2, 5, 8, 11, 14, 17, oder umgekehrt.

b) Höhere arithmetische Reihen.

Bei der niedern arithmetischen Reihe sind die ersten Differenzen auf einander folgenden Zahlen constant. Die Progression ialb eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung. Addirt er die n ersten Glieder der niedern arithmetischen Reihe

$\cdot d,\ a + 2d,\ a + 3d,\ a + 4d,\ \ldots\ldots\ a + (n-1)d$

t man

$\cdot d,\ 3a + 3d,\ 4a + 6d,\ 5a + 10d,\ \ldots\ldots\ [2a + (n-1)d]\frac{n}{2}$,

e arithmetische Reihe der zweiten Ordnung gibt.

rfährt man bei dieser Reihe nach derselben Art

$,\ 3a + d,\ 6a + 4d,\ 10a + 10d,\ 15a + 20d,\ \ldots$

t man eine arithmetische Reihe der dritten Ordnung;

$4a + d,\ 10a + 5d,\ 20a + 15d,\ 35a + 35d,\ \ldots\ldots$

arithmetische Reihe der vierten Ordnung.

2) Man findet leicht dadurch, daß man je zwei auf folgende Glieder nämlich das eine vom nächstfolgenden su daß bei der arithmetischen Reihe der ersten Ordnung d Differenzen, bei der der zweiten Ordnung die zweiten Dif bei der der dritten Ordnung die dritten Differenzen gleich sin Nimmt man z. B. die arithmetische Reihe der dritten Ord gibt es folgendes Schema

Reihe vom 3. Grad: $a, 3a+d, 6a+4d, 10a+10d, 15a+$

1. Differenzen: $2a+d, 3a+3d, 4a+6d, 5a+1$
2. „ : $a+2d, a+3d, a+4d$.
3. „ : $d, d,$.

§ 2.

Bestimmung des allgemeinen Gliedes und der S einer arithmetischen höhern Reihe aus dem erste und den Differenzen des ersten Gliedes.

1) Die gegebene Reihe habe folgende Form

$$a, \underset{1}{a}, \underset{2}{a}, \underset{3}{a}, \underset{4}{a}, \underset{5}{a}, \ldots\ldots \underset{n}{a}$$

subtrahirt man das erste Glied vom zweiten, das zweite vom das dritte vom vierten u. s. w., so erhält man die ersten Di der subtrahirten Glieder, welche hinwieder die erste Differe geben, nämlich

$$\underset{2}{a} - \underset{1}{a} = \underset{11}{da};\ \underset{3}{a} - \underset{2}{a} = \underset{12}{da};\ \underset{4}{a} - \underset{3}{a} = \underset{13}{da} \ldots\ldots \underset{n+1}{a} - \underset{n}{a}$$

Dadurch erhält man als erste Differenzenreihe:

$$\underset{11}{da}, \underset{12}{da}, \underset{13}{da}, \underset{14}{da} \ldots\ldots \underset{1n}{da}$$

2) Subtrahirt man in dieser Reihe wieder die Differe erhält man die Differenzen von den Differenzen oder di Differenzenreihe

$$\underset{12}{da} - \underset{11}{da} = \underset{21}{da};\ \underset{13}{da} - \underset{12}{da} = \underset{22}{da};\ \underset{14}{da} - \underset{13}{da} = \underset{23}{da};\ \ldots\ \underset{1n}{da} - \underset{1}$$

demnach ist die zweite Differenzenreihe

$$\underset{21}{da}, \underset{22}{da}, \underset{23}{da}, \ldots\ldots \underset{2n-1}{da}$$

ihrt man so fort, so kann man leicht die dritte, vierte Differenzen= . s. w. ableiten.

Nach diesen Angaben hat man

$= d a_{1\,1}$, daher $a_2 = a_1 + d a_{1\,1}$

$= d a_{1\,2}$ „ $a_3 = a_2 + d a_{1\,2}$

$= a_1 + d a_{1\,1} + d a_{1\,1} + d a_{2\,1}$

$= a_1 + 2 d a_{1\,1} + d a_{2\,1}$

$= d a_{1\,3}$ „ $a_4 = a_3 + d a_{1\,3}$

$= a_1 + 2 d a_{1\,1} + d a_{2\,1} + d a_{1\,2} + d a_{2\,2}$

$= a_1 + 2 d a_{1\,1} + d a_{2\,1} + d a_{1\,1} + d a_{2\,1} + d a_{2\,1} + d a_{3\,1}$

$= a_1 + 3 d a_{1\,1} + 3 d a_{2\,1} + d a_{3\,1}$

$= d a_{1\,4}$ „ $a_5 = a_4 + d a_{1\,4}$

$= a_1 + 3 d a_{1\,1} + 3 d a_{2\,1} + d a_{3\,1} + d a_{1\,4}$

$= a_1 + 3 d a_{1\,1} + 3 d a_{2\,1} + d a_{3\,1} + d a_{1\,3} + d a_{2\,3}$

$= a_1 + 3 d a_{1\,1} + 3 d a_{2\,1} + d a_{3\,1} + d a_{1\,2} + d a_{2\,2} + d a_{2\,2} + d a_{3\,2}$

$= a_1 + 3 d a_{1\,1} + 3 d a_{2\,1} + d a_{3\,1} + d a_{1\,1} + d a_{2\,1} + 2 d a_{2\,1}$
$+ 2 d a_{3\,1} + d a_{3\,1} + d a_{4\,1}$

$= a_1 + 4 d a_{1\,1} + 6 d a_{2\,1} + 4 d a_{3\,1} + d a_{4\,1}$

h diesem sich deutlich aussprechenden Gesetze erhält man das e Glied durch das erste Glied und die Differenzen des ersten in folgender Formel ausgedrückt

$$+ (n-1) d a_{1\,1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} d a_{2\,1} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} d a_{3\,1}$$
$$+ \ldots\ldots d a_{n-1\,1}$$

Auf dieselbe Weise läßt sich auch die Summe der Reihe s erste Glied und die Differenzen des ersten Gliedes aus=

Es ist nämlich $s_1 = a_1$

$$s_2 = a_1 + a_2 = a_1 + a_1 + d_{11}$$
$$= 2a_1 + d_{11}$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$= 2a_1 + d_{11} + a_2 + d_{12}$$
$$= 2a_1 + d_{11} + a_1 + d_{11} + d_{11} + d_{21}$$
$$= 3a_1 + 3d_{11} + d_{21}$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$
$$= 3a_1 + 3d_{11} + d_{21} + a_3 + d_{13}$$
$$= 3a_1 + 3d_{11} + d_{21} + a_2 + d_{12} + d$$
$$= 3a_1 + 3d_{11} + d_{21} + a_1 + d_{11} + 2$$
$$+ d_{21} + d_{31}$$
$$= 4a_1 + 6d_{11} + 4d_{21} + d_{31}$$

Demnach hat man allgemein als Summe von n Gli

$$\text{II. } s_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{1.2} d_{11} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} d_{21} + \ldots$$

Bei diesen beiden Formeln I und II versteht es sich daß sie da abbrechen, wo die constanten Differenzen auf alle folgenden Differenzen Null sind. So sind z. B. für eine ar Reihe der zweiten Ordnung d_{11} und d_{21} bestimmte Werthe

$d_{31} = d_{41} = d_{51} = \ldots\ldots 0$ sind.

Beispiel.

Wie heißt das 15. Glied und die Summe der ersten einer arithmetischen Reihe zweiter Ordnung, wenn das $a_1 = 1$, $d_{11} = 3$ und $d_{21} = 4$ ist?

$$1+14.3+\frac{14.13}{1.2}.4=1+42+364=407;$$

$$1+\frac{15.14}{1.2}.3+\frac{15.14.13}{1.2.3}.4=15+315+1820=2150.$$

Vollzieht man die Multiplikation der Binomialfaktoren und nach Potenzen von n, so erhält man als allgemeine Form Formeln I. und II. für das allgemeine Glied und die Summe

Reihe des ersten Grades $a_n=a+bn$

$$s_n=An+Bn^2$$

Reihe des zweiten Grades $a_n=a+bn+cn^2$

$$s_n=An+Bn^2+Cn^3$$

Reihe des dritten Grades $a_n=a+bn+cn^2+dn^3$

$$s_n=An+Bn^2+Cn^3+Dn^4 \text{ u. s. w.}$$

t man nach dieser Form der Gleichungen eine Reihe zu be-, so müssen die Unbekannten a, b, c u. s. w. aus den Gleichungen t werden; zu dem Ende setzt man statt n die Werthe 1, 2, 3 . . . , t man beziehungsweise das erste, zweite, dritte Glied u. s. w., den gegebenen Werthen dieser Glieder gleich zu setzen sind;) müssen so viele Werthe gegeben sein, als man Unbekannte ; man dieselbe Anzahl von Gleichungen erhalte. Sind statt en Glieder der Reihe einige Glieder derselben nebst den . die sie einnehmen, gegeben, so setzt man für n der Reihe gegebenen Indices der Stellen dieser Glieder, wodurch sich . . . . . bestimmen lassen.

Beispiel.

3 sei die Reihe zu bestimmen, deren 2. Glied = 4, deren d = 17 und deren 6. Glied = 42 ist.

uflösung. Da drei Glieder gegeben sind, so lassen sich ei Gleichungen drei Unbekannte bestimmen, woraus sich eine der zweiten Ordnung ergibt; n ist der Reihe nach 2, 4 und 6.

1) $4 = a + 2b + 4c$ 4) $13 = 2b + 12c$ 6)

2) $17 = a + 4b + 16c$ 5) $25 = 2b + 20c$

3) $42 = a + 6b + 36c$

$$b = \frac{13 - 12 \cdot \frac{3}{2}}{2} = -\frac{5}{2}; \quad a = 4 + 2 \cdot \frac{5}{2} - 4 \cdot \frac{3}{2}$$

Daraus erhält man für das allgemeine Glied

$$a_n = 3 - \frac{5}{2}n + \frac{3}{2}n^2 = \frac{6 - 5n + 3n^2}{2}$$

Setzt man $n = 1$, so gibt es das 1. Glied $= 2$
$n = 2$ „ „ 2. „ $= 4$
$n = 3$ „ „ 3. „ $= 9$
$n = 4$ „ „ 4. „ $= 17$
$n = 5$ „ „ 5. „ $= 18$
$n = 6$ „ „ 6. „ $= 42$ u

Zur Bestimmung der drei Unbekannten in der Sum hat man die Summe der drei ersten Glieder zu setzen, wel ungsweise 2, 6 und 15 ist, daher ähnlich wie vorhin die drei Gl n ist der Reihe nach 1, 2 und 3.

1) $2 = A + B + C$ 4) $2 = 2B + 6C$ oder $1 =$

2) $6 = 2A + 4B + 8C$ 5) $9 = 6B + 24C$ „ $3 =$

3) $15 = 3A + 9B + 27C$ 6) $1 = 2C$ und $C = \frac{1}{2}$

$$C = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}, \quad A = 2$$

Daraus ergibt sich für die Summenformel

$$s_n = 2n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n^3 = \frac{n(4 - n + n^2)}{2}$$

$n = 1$ gibt die Summe von 1 Gliede $= 2$
$n = 2$ „ „ 2 Gliedern $= 6$
$n = 3$ „ „ 3 „ $= 15$
$n = 4$ „ „ 4 „ $= 32$ u

§ 3.

Die figurirten Zahlen.

Form der arithmetischen Progression ist folgende

$a + d,\ a + 2d,\ a + 3d, \ldots\ldots a + (n-1)\,d$

man in dieser Reihe $a = 1$, so erhält man die Grund-
figurirten Zahlen; addirt man die n ersten Glieder der
gibt dieß eine Reihe zweiter Ordnung; durch abermalige
er entstandenen Reihe folgt eine Reihe dritter Ordnung u. s. w.

$-d,\ 1 + 2d,\ 1 + 3d,\ 1 + 4d, \ldots 1 + (n-1)\,d$
$-d,\ 3 + 3d,\ 4 + 6d,\ 5 + 10d, \ldots\ldots$
$-d,\ 6 + 4d,\ 10 + 10d,\ 15 + 20d, \ldots\ldots$

en in diesen Reihen für d nach einander die Werthe 1, 2, 3, 4 ...
gibt dieß die figurirten Zahlen der verschiedenen Ordnungen;
wird

) 1, 2, 3, 4, 5 . . . . Reihe 1. Ordnung
) 1, 3, 6, 10, 15 . . . . „ 2. „
) 1, 4, 10, 20, 35 . . . . „ 3. „

wird

) 1, 3, 5, 7, 9 . . . . Reihe 1. Ordnung
) 1, 4, 9, 16, 25 . . . . „ 2. „
1, 5, 14, 30, 55 . . . . „ 3. „

heißen z. B. die Zahlen 1, 3, 6, 10 . . . . Dreiecks-
igularzahlen, weil eine solche Anzahl Punkte jedesmal als
ordnet werden kann; die Zahlen 1, 4, 9, 16 . . . . .
dem ähnlichen Grunde Quadratzahlen; die Zahlen 1, 4,
.. heißen dreiseitige und 1, 5, 14, 30 . . . . vierseitige
zahlen.

a) Die Polygonalzahlen.

e Polygonalzahlen sind figurirte Zahlen der zweiten Ord-
man erhält dieselben demnach aus der Reihe

$2 + d,\ 3 + 3d,\ 4 + 6d,\ 5 + 10d, \ldots\ldots$

Hieraus 1. Differenzenreihe: $1+d, 1+2d, 1+3d,$

2. „ : $d, \quad d, \quad d$

Da hiernach $\underset{11}{d}a = 1+d$ und $\underset{21}{d}a = d$ ist, so ist das Glied bestimmt als folgend aus § 2. I.

$$\underset{1}{a} = \underset{2}{a} + (n-1)\underset{11}{d}a + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\underset{21}{d}a$$

$$= 1 + (n-1)(1+d) + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}d$$

$$= \frac{2+2n-2+2dn-2d+dn^2-dn-2dn}{2}$$

$$= \frac{dn^2+(2-d)n}{2}$$

Ganz auf dieselbe Weise leitet sich aus § 2. II. das summatorische Glied dieser Zahlenreihe ab als

$$\underset{n}{s} = n\underset{1}{a} + \frac{n(n-1)}{1.2}\underset{11}{d}a + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\underset{21}{d}a$$

$$= n.1 + \frac{n(n-1)}{1.2}(1+d) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}d$$

$$= \frac{6n+3n^2-3n+3dn^2-3dn+dn^3-dn^2-}{6}$$

$$= \frac{dn^3+3n^2+(3-d)n}{6}$$

2) Um nach diesen Formeln das allgemeine und summatorische Glied zu bestimmen, beachte man, daß n die Anzahl summirenden Glieder oder die Seite der Figur ist; es sind dieser Seiten $= m$, so ist m jedesmal um 2 größer als die Differenz also $m = d+2$ oder $d = m-2$; führt man in den obigen für $\underset{n}{a}$ und $\underset{n}{s}$ statt d die Größe m ein, so erhält man das allgemeine und summatorische Glied

1) $\underset{n}{a} = \frac{(m-2)n^2+(4-m)n}{2}$ 2) $\underset{n}{s} = \frac{(m-2)n^3+3n}{6}$

) Nach der Geometrie kann eine Figur weniger als drei Seiten
haben, also muß der kleinste Werth, den m annehmen kann,
= 3 sein.

ür $d = 1$ oder $m = 3$ erhält man die Dreieckzahlen: 1, 3,
1 15, 21, ...

$$a_n = \frac{n(n+1)}{1.2}; \qquad s_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3};$$

$= 2$ oder $m = 4$ erhält man die Quadratzahlen: 1, 4, 9,
5, ...

$$a_n = n^2; \qquad s_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3};$$

$= 3$ oder $m = 5$ die Fünfeckzahlen: 1, 5, 12, 22, 35, ...

$$a_n = \frac{n(3n-1)}{1.2}; \qquad s_n = \frac{n^2(n+1)}{1.2};$$

$= 4$ oder $m = 6$ die Sechseckzahlen: 1, 6, 15, 28, 45, ...

$$a_n = n(2n-1); \qquad s_n = \frac{n(n+1)(4n-1)}{1.2.3};$$

Setzt man in diesen Formeln der Reihe nach $n = 1, 2, 3, 4 \ldots\ldots$
ist a_n die nte Polygonalzahl und s_n die Summe der n ersten
gonalzahlen.

b) Die Pyramidalzahlen.

1) Die Pyramidalzahlen sind figurirte Zahlen der dritten Ordnung,
man erhält dieselben aus der Reihe

$3 + d,\ 6 + 4d,\ 10 + 10d,\ 15 + 20d,\ 21 + 35d, \ldots\ldots$

ts 1. Differenzenreihe: $2+d, 3+3d, 4+6d, 5+10d, 6+15d \ldots$

2. „ $1+2d, 1+3d, 1+4d, 1+5d \ldots$

3. „ $d, \quad d, \quad d, \quad \ldots$

Für das allgemeine Glied ergibt sich wieder aus § 2. man $d a_{11} = 2 + d$, $d a_{21} = 1 + 2d$ und $d a_{31} = d$ setzt,

$$1)\ a_n = a_1 + (n-1) d a_{11} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} d a_{21} + \frac{(n-1)(n-2)(}{1.2.3}$$

$$= 1 + (n-1)(2+d) + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}(1+2d)$$

$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} d$$

$$= \frac{1}{6} d n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n (3-d)$$

Für das summatorische Glied erhält man aus § 2. I

$$2)\ s_n = n a_1 + \frac{n(n-1)}{1.2} d a_{11} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} d a_{21} +$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} d a_{31}$$

$$= n.1 + \frac{n(n-1)}{1.2}(2+d) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(1+$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} d$$

$$= \frac{d}{24} n^4 + \frac{2+d}{12} n^3 + \frac{12-d}{24} n^2 + \frac{4-d}{12} n$$

2) Setzt man in diesen beiden Formeln wie unter de gonalzahlen $d = m - 2$ und für m wieder vom niedrigste angefangen $m = 3, 4, 5$ u. s. w., so erhält man die dre vierseitigen u. s. w. Pyramidalzahlen. Hiebei ergibt sich, allgemeine Glied a_n der Pyramidalzahlen und das summ Glied s_n der Polygonalzahlen identische Formeln haben, so mseitigen Pyramidalzahlen aus den mseitigen Polygonalzah vorgehen.

: $m = 3$ oder $d = 1$ erhält man die dreiseitigen Pyramidal-
1, 4, 10, 20, 35 . . . . .

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}; \qquad s_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4};$$

2 oder $m = 4$ erhält man die vierseitigen Pyramidalzahlen:
1, 30 . . . .

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}; \qquad s_n = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{1.2.3};$$

3 oder $m = 5$ die fünfseitigen Pyramidalzahlen: 1, 6,
. . . .

$$= \frac{n^2(n+1)}{1.2}; \qquad s_n = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{1.2.3.4}$$

Ueberhaupt erhält man die mseitigen Pyramidalzahlen, wenn
den Formeln für das allgemeine und das summatorische Glied
-2 einsetzt, also

$$= \frac{1}{6}(m-2)n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}(5-m)n$$

$$= \frac{(m-2)n^3 + 3n^2 + (5-m)n}{6} \quad \text{und}$$

$$= \frac{m-2}{24}n^4 + \frac{m}{12}n^3 + \frac{14-m}{24}n^2 + \frac{6-m}{12}n$$

$$= \frac{(m-2)n^4 + 2mn^3 + (14-m)n^2 + (6-m)2n}{24}$$

Beispiele.

ge Beispiele mögen die Formeln erläutern.

Vie viel Kugeln enthält eine dreiseitige Kugelpyramide, die
Schichten besteht? Wie viel Kugeln liegen in der Basis?
Kugeln enthält der Haufen noch, wenn die 20 obersten
abgehoben sind?

Auflösung. Da die Pyramide dreiseitig sein soll, sc die einzelnen Schichten Dreiecke, und die Summe aller ir Dreiecken liegenden Kugeln ist die Pyramide; demnach hat n dreiseitigen Pyramidalzahlen:

$$a_n = \frac{n(n+1)}{1.2} \qquad s_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$$

$$a_{30} = \frac{30 \cdot 31}{2} \qquad s_{30} = \frac{30 \cdot 31 \cdot 32}{6}$$

$= 465$ Kugeln in der Basis $= 4960$ Kugeln der Pyra

$$\text{Rest} = s_{30} - s_{20}$$

$$\frac{30.31.32}{6} - \frac{20.21.22}{6} = 4960 - 1540 = 3420 \text{ Kuge}$$

2) Bei einer vierseitigen Pyramide bilden die einzelnen Quadrate, und die Summe aller Kugeln in diesen Quad die Pyramide; demnach sind die viereckigen Polygonal- un midalzahlen zu setzen.

3) Es sind Kugeln in einen länglichen Haufen geschi daß die Basis ein Rechteck und der ganze Haufen ein dr Prisma bildet, dessen beide Grundflächen schief abgeschnit In der obersten Schichte liegen 30 Kugeln, und diese 12 Schichten. Wie viel Kugeln hat der Haufen?

Auflösung. Die oberste Reihe hat 30 Kugeln, dar 2 Reihen mit je $30 + 1$, dann liegen 3 Reihen mit je Kugeln u. s. w., in der Basis liegen 12 Reihen mit je $30 + 11$ es handelt sich also um die Summe folgender Reihe zweiter

Reihe: $30, 2(30+1), 3(30+2), 4(30+3) \ldots . 12($

1. Differenzen: $30+2, \quad 30+4 \quad 30+6, \quad \ldots .$
2. Differenzen: $2, \quad 2, \quad \ldots .$

$$s_n = n a_1 + \frac{n(n-1)}{1.2} d a_{11} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} d a_{21}$$

$$s_{12} = 12.30 + \frac{12.11}{2}(30+2) + \frac{12.11.10}{6}.$$

$$= 360 + 2112 + 440 = 2912 \text{ Kugeln.}$$

§ 4.

Die geometrische Progression.

ter einer geometrischen Progression versteht man eine Zahlen, von denen man jede folgende findet, indem man ehende mit einer durch die ganze Reihe constant bleiben- Quotient oder Exponent genannt, multiplizirt. Bezeich- en Quotienten mit q, das erste Glied mit a, so ist die

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ aq^4 \ldots\ldots$$

s dieser allgemeinen Form sieht man, daß man ein rogression findet, wenn man das erste Glied mit einer iplizirt, deren Dignand der Quotient, und deren Expo- ahl ist, die angibt, wie viele Glieder dem gesuchten . Bezeichnet man daher das letzte Glied einer geome- gression von n Gliedern mit z, so ist

$$\text{I.}\quad z = aq^{n-1}$$

eichnet man die Summe aller Glieder einer geometri- ssion mit s, so ist

$$s = a + aq + aq + aq + aq + \ldots\ldots aq^{n-1}$$

man diese Gleichung mit q, so erhält man

$$sq = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + \ldots\ldots aq^n$$

an diese von der vorhergehenden Gleichung, so ist

$$s(q-1) = a - aq^n \quad \text{also}$$

$$\text{II.}\quad s = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a(q^n-1)}{q-1}$$

as letzte Glied z ein, so ist

$$s = \frac{a - zq}{1-q}$$

der Quotient ein ächter Bruch, so wird q^n für ein ßes n unendlich klein und deßwegen von Null nicht Es wird daher die Summe aller Glieder einer bis he gehenden geometrischen Progression, deren Quotient uch ist, durch die Formel bestimmt

$$s = \frac{a}{1-q}.$$

Beispiele.

1) Welches ist die Summe der Reihe $a^6 + a^5b +$ $+ a^2b^4 + ab^5 + b^6$?

$$s = \frac{a^6\left[\left(\frac{b}{a}\right)^7 - 1\right]}{\frac{b}{a} - 1} = \frac{b^7 - a^7}{b - a}$$

2) Wie groß ist das erste Glied a, wenn $z = 9642$ und $q = \frac{7}{5}$ ist?

$$9642,6 = a\left(\frac{7}{5}\right)^{24} = a.\ 3214,2,\ \text{daraus}$$

3) Welchem gemeinen Bruch entspricht der $0,272727\ldots..$?

$0,272727\ldots. = 27\,(0,01 + 0,0001 + 0,000001$ in der unendlichen Reihe in den Klammern ist $a = 0,01$ u

$$s = \frac{0,01}{1 - 0,01} = \frac{1}{99},\ \text{daher}$$

$$0,272727\ldots.. = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}.$$

§ 5.

Reihen, welche aus arithmetischen und geo Reihen zusammengesetzt sind.

1) Die allgemeinen Formeln einer arithmetischen geometrischen Reihe sind

a, $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d$, $a + 4d$..... $a +$(

b, bq, bq^2, bq^3, bq^4 ..... bq^{n-1}

Multiplizirt man je zwei bezügliche Glieder dieser einander, so erhält man eine Reihe, welche aus der und geometrischen Reihe zusammengesetzt ist, nämlich

ab, $(a+d)bq$, $(a+2d)bq^2$, $(a+3d)bq^3$..... $[a+(n$

woraus sich sofort das allgemeine Glied der Reihe erg

I. $z = [a + (n-1)d]\,bq^{n-1}$

Die Summe s der n ersten Glieder einer solchen Reihe
, wie folgt; es ist

$$
\begin{array}{llllll}
\text{ied} = ab & = ab & & & & \\
\text{„} \quad = (a+d)\,bq & = abq & +bdq & & & \\
\text{„} \quad = (a+2d)\,bq^2 & = abq^2 & +bdq^2 & +bdq^2 & & \\
\text{„} \quad = (a+3d)\,bq^3 & = abq^3 & +bdq^3 & +bdq^3 & +bdq^3 & \\
\text{„} \quad = (a+4d)\,bq^4 & = abq^4 & +bdq^4 & +bdq^4 & +bdq^4 & \\
 & & +bdq^4 & & & \\
\cdot \quad \cdots\cdots & & - - - - & - - - - & - - - & \\
\text{,} \quad = [a+(n-1)d]\,bq^{n-1} & = abq^{n-1} & +bdq^{n-1} & +bdq^{n-1} & +bdq^{n-1} & \\
 & & +bdq^{n-1} & +\cdots\cdots & bdq^{n-1} &
\end{array}
$$

einzelnen Vertikalreihen ergeben sich als geometrische
eren Quotient q ist, und diese lassen sich demnach nach
ddiren; bezeichnet man die 1. Vertikalreihe in Summe
Summe der zweiten mit s_1 u. s. w., so erhält man

$$\frac{q^n-1)}{q-1}; \quad s_1 = \frac{bdq\,(q^{n-1}-1)}{q-1}; \quad s_2 = \frac{bdq^2(q^{n-2}-1)}{q-1};$$

$$s_3 = \frac{bdq^3\,(q^{n-3}-1)}{q-1}; \quad s_{n-1} = \frac{bdq^{n-1}\,(q-1)}{q-1}$$

Summe der Reihe ist also als Summe der einzelnen
jen

$$s_0 + s_1 + s_2 + s_3 + \cdots\cdots s_{n-1}$$

$$\frac{(q^n-1)}{q-1} + \frac{bd\,(q^n-q)}{q-1} + \frac{bd(q^n-q^2)}{q-1} + \frac{bd\,(q^n-q^3)}{q-1}$$
$$+ \cdots\cdots \frac{bd\,(q^n-q^{n-1})}{q-1}$$

$$\frac{(q^n-1)}{q-1} + \frac{bd}{q-1}\,[q^n-q+q^n-q^2+q^n-q^3+\cdots\cdots$$
$$q^n-q^{n-1}]$$

$$\frac{(q^n-1)}{q-1} + \frac{bd}{q-1}\left[(n-1)\,q^n - \frac{q\,(q^{n-1}-1)}{q-1}\right]$$

Beispiel.

Wie groß ist das zwölfte Glied und die Summ
zwölf Glieder der Reihe 1, 6, 20, 56, 144.....,
beiden Reihen 1, 3, 5, 7, 9..... und 1, 2, 4,
durch Multiplikation entstanden ist?

Auflösung. Es ist $a=1$, $d=2$, $n=12$, $b=$

$z=[a+(n-1)d]bq^{n-1}$ $s=\frac{ab(q^n-1)}{q-1}+\frac{bd}{q-1}\left[(n-1)q\right.$

$=[1+11.2].2^{11}$ $=\frac{2^{12}-1}{2-1}+\frac{2}{2-1}\left[11.2^{12}-\right.$

$=23\,.\,2048$ $=4095+2\,[45056-4094]$

$=47104$ $=86019$

§ 6.

Umkehrung der Reihen.

1) Eine Reihe umkehren heißt, aus einer gegeben
welcher z. B. y als Function von x nach fortlaufen
dieser Größe erscheint, eine andere Reihe ableiten, in welch
tion von y nach denselben fortlaufenden Potenzen von
gegebenen Reihe erscheint. Es soll z. B. aus der Re

$$y=ax+bx^2+cx^3+dx^4+\ldots\ldots$$

eine Reihe abgeleitet werden, in welcher x durch y b

$$x=\alpha y+\beta y^2+\gamma y^3+\delta y^4+\ldots\ldots$$

2) Um die unbestimmten Coefficienten α, β, γ,
den Coefficienten a, b, c, d..... der gegebenen
stimmen, entwickelt man aus der Reihe für x die
Reihe für y vorkommenden Potenzen von x und s
dieser Potenzen in die gegebene Reihe von y die hier
Werthe, die sich als Reihen geordnet nach Potenze
stellen werden; dadurch aber erhält man die Größ
Reihe nach den Potenzen von y entwickelt. Setzt m
cienten der ersten Potenz von y einander gleich, s
ein Coefficient bestimmt werden. Die Coefficienten

gen von y werden der Reihe nach Null gesetzt und jedesmal aus einer solchen Gleichung eine der unbestimmten Größen $\gamma, \delta \ldots\ldots$ gefunden werden. Doch müssen nicht bloß einige, n mehrere unbestimmte Coefficienten der umgekehrten Reihe ese Weise entwickelt werden, wenn man auf das Bildungsgesetz Reihe schließen will.

1. Beispiel.

s sei folgende Reihe umzukehren

$$y = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + \ldots\ldots$$

m diese Reihe umzukehren, hat man, wenn die Entwicklung is zur fünften Potenz y^5 fortgesetzt wird

$$= \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + \delta y^4 + \varepsilon y^5 + \ldots\ldots$$
$$x^2 = \alpha^2 y^2 + 2\alpha\beta y^3 + \beta^2 y^4 + 2\alpha\gamma y^4 + 2\beta\gamma y^5 + \gamma^2 y^6 + 2\alpha\delta y^5 + \ldots\ldots$$
$$x^3 = \alpha^3 y^3 + 3\alpha^2\beta y^4 + 3\alpha\beta^2 y^5 + \beta^3 y^6 + 3\alpha^2\gamma y^5 + \ldots\ldots$$
$$x^4 = \alpha^4 y^4 + 4\alpha^3\beta y^5 + \ldots\ldots$$
$$x^5 = \alpha^5 y^5 + \ldots\ldots$$

tatt der Potenzen von x werden in obiger Reihe für y die ellten Potenzreihen nach y eingesetzt und dadurch die unbe- n Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots$ bestimmt.

$$\left.\begin{matrix} \alpha \\ +\beta \\ 2\alpha^2 \end{matrix}\right\} y^2 + \left.\begin{matrix} \gamma \\ 4\alpha\beta \\ 3\alpha^3 \end{matrix}\right\} y^3 + \left.\begin{matrix} \delta \\ 2\beta^2 \\ 4\alpha\gamma \\ 9\alpha^2\beta \\ 4\alpha^4 \end{matrix}\right\} y^4 + \left.\begin{matrix} \varepsilon \\ 4\beta\gamma \\ 4\alpha\delta \\ 9\alpha\beta^2 \\ 9\alpha^2\gamma \\ 16\alpha^3\beta \\ 5\alpha^5 \end{matrix}\right\} y^5 + \ldots\ldots$$

ebei ist $\alpha = 1$; $\beta + 2 = 0$ und $\beta = -2$
-3=0 und $\gamma = 5$; $\delta + 8 + 20 - 18 + 4 = 0$ und $\delta = -14$
$-56 + 36 + 45 - 32 + 5 = 0$ und $\varepsilon = 42$
h ist $x = y - 2y^2 + 5y^3 - 14y^4 + 42y^5 + \ldots$

sich wenigstens in den ersten fünf Gliedern mit Ausnahme ichenwechsels ein deutliches Bildungsgesetz der Reihe nicht ckt.

2. Beispiel.

$$y = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 \ldots\ldots$$

Setzt man wieder $x = \alpha y + \beta y^2 \gamma y^3 + \delta y^4 + \varepsilon y^5 +$ so erhält man wieder wie vorher für die Potenzen von x gegebenen Reihen; substituirt man statt der Potenzen v Reihen, so ist

$$y = \alpha y + \beta \left\{ y^2 + \begin{matrix} \gamma \\ -\alpha\beta \\ \tfrac{1}{3}\alpha^3 \end{matrix} \right\} y^3 + \begin{matrix} \delta \\ -\tfrac{1}{2}\beta^2 \\ -\alpha\gamma \\ \alpha^2\beta \\ -\tfrac{1}{4}\alpha^4 \end{matrix} \Bigg\} y^4 + \begin{matrix} \varepsilon \\ -\beta\gamma \\ -\alpha\delta \\ \alpha\beta^2 \\ \alpha^2\gamma \\ -\alpha^3\beta \\ \tfrac{1}{5}\alpha^5 \end{matrix} \Bigg\} y^5$$

Es ist $\alpha - 1$; $\beta - \tfrac{1}{2} = 0$ und $\beta = \tfrac{1}{2}$; $\gamma - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} = 0$ u $\delta - \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = 0$ und $\delta = \tfrac{1}{24}$; $\varepsilon - \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{24}$ $- \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} = 0$ und $\varepsilon = \tfrac{1}{120}$

Substituirt man in die Reihe von x, so ist

$$x = y + \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{6}y^3 + \tfrac{1}{24}y^4 + \tfrac{1}{120}y^5 \ldots.$$

$$= y + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \frac{y^5}{1.2.3}$$

in welcher Reihe das Gesetz der Bildung in den fünf deutlich hervortritt.

§ 7.

Convergenz und Divergenz.

1) In vielen Rechnungsoperationen kann man zu e stimmt abgeschlossenen Resultat nicht gelangen, sondern der Werth nur durch eine unendliche Wiederholung der Operation annähernd bestimmen. Diese Wiederholungen Form einer Reihe auf, die demnach unendlich sein muß. solche unendliche Reihe ein Resultat haben, so muß es mög in der Reihe so weit zu gehen, daß alle noch folgender kleiner als die unendlich kleine Größe ϱ sind. So ist z.

$$\sqrt{3} = 1{,}73205\ldots\ldots = 1 + \tfrac{7}{10} + \tfrac{3}{100} + \tfrac{2}{1000} + \tfrac{0}{10000} + \tfrac{5}{100000} + \ldots\ldots$$

welche Operationen offenbar folgende allgemeine Form hat

$$\sqrt{x} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots\ldots$$

2) In der unendlichen Reihe ist auch die endliche enthalten. nämlich von einer bestimmten Stelle der Reihe anfangend lieder Null, so bricht die unendliche Reihe ab und geht in dliche über.

3) Es sei $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots a_n$ und

$$s_{n+m} = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots\ldots a_{n+m}$$

s_{n+m} die Fortsetzung der Reihe s_n ist. Soll nun s_n eine Summe so muß die Differenz $s_{n+m} - s_n < \varrho$ sein, d. h. die Summe noch folgenden Glieder in der Reihe s_{n+m} kann das Resultat von mehr um die unendlich kleine Größe ϱ ändern, weßhalb die e der Reihe s_n als bekannt anzusehen ist.

) Reihen, welche derart sind, daß sich die Summe der Glieder bestimmten Zahl nähert, heißen convergent; wenn aber die e einer Reihe mit der Zunahme der Gliederzahl auch fort- d größer wird, so daß sie für eine unendlich große Glieder- uch unendlich groß oder unbestimmbar wird, so heißt eine solche divergent. Da also nach dieser Eigenschaft die divergirende eine bestimmte Summe nicht hat, so bleibt blos die conver- Reihe als Gegenstand der Betrachtung übrig, und auch diese r den Fall, daß sie ein bestimmtes Gesetz der Bildung zeigt.

a) Convergenz der geometrischen Reihe.

n der elementaren Mathematik steht die geometrische Reihe iem ganz bestimmten Bildungsgesetze da.

$$s_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots\ldots aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1 - q},$$

enn eine einfachere Reihe gesetzt wird

$$s_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

Diese geometrische Reihe convergirt bloß dann, w
Quotient der Reihe kleiner als 1 ist; in jedem andern
die Reihe divergent.

α) Ist $x < 1$ und positiv, so wird für $n = \infty$ d
$x^n = 0$ demnach $s_n = \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}$ (siehe

β) Wird $x = 1$, so wird für $n = \infty$ die Summe $s_n = \frac{1-}{1-}$
ein Ausdruck, der weder die Convergenz noch die Divergenz
läßt; es ist aber bei näherer Betrachtung leicht ersichtlich
diesem Falle die Summe der Reihe unendlich groß wird d.
die Reihe divergent sein muß. Ist $x = -1$, so kann eine
gar nicht angegeben werden, da je zwei aufeinander folgend
sich aufheben.

γ) Ist $x > 1$, so wird für $n = \infty$ das Glied $x^n =$
Summe der Reihe unendlich groß oder die Reihe divergen

b) Vergleichung der Reihen mit der geometrischen

Um die Reihen mit der geometrischen Reihe zu ve
muß der Quotient oder das Verhältniß zweier unmittelbar auf
folgenden Glieder bestimmt werden; es sei

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots a_n + s_{n+m}, \text{ wo}$$

$$s_{n+m} = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots\ldots a_{n+m} \text{ ist.}$$

Soll diese Reihe convergiren, so muß der Quotient <
schreibt man an die Reihe s_n auch deren Fortsetzung s_{n+m} fo

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} +$$

$$= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n\left(1 + \frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{a_{n+2}}{a_n} + \frac{a_{n+3}}{a_n}\right.$$

$$= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n\left(1 + \frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n}\right.$$

$$\cdot \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} + \ldots.$$

Man setze $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha_n$; $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \alpha_{n+1}$; $\frac{a_{n+3}}{a_{n+2}} = \alpha_{n+2}$ u. s. w.

Diese Quotienten je zweier auf einander folgenden Glieder üssen, wenn die Convergenz der Reihe Statt haben soll, wie bei r geometrischen Reihe ein constantes Verhältniß angeben, oder ese Quotienten müssen für die nämliche Reihe einander gleich sein. ieses constante Verhältniß x der geometrischen Reihe sei die Grenze, e nicht überschritten werden darf, wenn die Reihe convergiren soll, ıher muß sein

$$1)\ x = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha_n < 1.$$

Nach diesen Bestimmungen hat man demnach in obiger Reihe

$$= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ a_n\left(1 + \alpha_n + \alpha_n . \alpha_{n+1} + \alpha_n . \alpha_{n+1} . \alpha_{n+2} + \ldots\right)$$

Diese Reihe convergirt, wenn die Convergenz der Reihe in den lammern nachzuweisen ist, und divergirt, wenn dieß nicht möglich ist. a aber für die nämliche Reihe die Verhältnisse zweier auf einander lgenden Glieder wie bei der geometrischen Reihe constant sind, so

$$\alpha_n = \alpha_{n+1} = \alpha_{n+2} = \ldots\ \text{oder}$$

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots . a_n\left(1 + \alpha_n + \alpha_n^2 + \alpha_n^3 + \ldots . .\right)$$

$$= a_0 + a_1 + a_2 + \ldots . a_n + a_n\left(\alpha_n + \alpha_n^2 + \alpha_n^3 + \ldots . .\right)$$

Die Reihe in den Klammern ist aber eine geometrische Reihe, ren Summe für ein unendlich großes n sich wie oben nach a, α stimmt, oder

$$2)\ a_n\left(\alpha_n + \alpha_n^2 + \alpha_n^3 + \ldots .\right) = a_n . \frac{\alpha_n}{1 - \alpha_n} = a_n . \frac{a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}}\ \text{d. h.}$$

rd $n = \infty$ und es wird der Quotient, der die Summe der Reihe

$$= \frac{a_n . a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}}$$ ist, dadurch Null, so ist die Reihe convergent, ist er dieß nicht der Fall, so ist diese divergent.

Aus dieser Entwickelung hat sich übrigens als gleichgiltig er- ben, ob das constante Verhältniß $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ positiv oder negativ wird, als einzige Bedingung aufgestellt ist, daß es dem numerischen erthe nach kleiner als 1 sei.

Beispiele.

Zur Untersuchung der Convergenz der Reihen nach dem
hältniß zweier auf einander folgenden Glieder und der für
aufgestellten Formeln dienen folgende Reihen:

1. Beispiel.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots\ldots\frac{1}{n}$$

Die einzelnen Glieder dieser Reihe nehmen zwar bei fortwähr
Zunahme von n unendlich ab, aber dieß genügt zur Conve
der Reihe noch nicht; denn es ist

$$\alpha_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

Wird $n=\infty$, so ist $\frac{1}{n}=0$, demnach der Quotient α_n
also nicht kleiner als 1, weßhalb die angegebene Reihe trot
unendlichen Abnahme der einzelnen Glieder nicht convergirt. Wir
diese Reihe die Formel der Ergänzungssumme angewendet, so zei
auch da, daß die Reihe eine bestimmte Summe nicht hat, d. h.
sie divergent ist; nämlich

$$\frac{a_n\,.\,a_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}=\frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n+1-n}=1$$

Uebrigens ist in diesem Falle die Untersuchung in Bezu
die Ergänzungssumme nicht einmal nöthig, da der Quotient α_n
die Divergenz der Reihe zur Genüge bestätigt. Solche Reihen
man harmonische Reihen.

2. Beispiel.

Eine Reihe, deren Glieder einzeln größer sind als 1, kan
convergiren, wenn auch eine Abnahme der Glieder constatirt i

$$\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+\ldots\ldots\frac{n+1}{n}$$

Da in dieser Reihe trotz des Abnehmens der einzelnen Glieder jedes Glied noch größer als 1 ist, so muß die Reihe divergiren.

3. Beispiel.

Manchmal läßt sich durch Vergleichung mit einer schon bekannten Reihe nachweisen, daß auch die gegebene convergent sein müsse.

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots\ldots\frac{x^n}{n}$$

Vergleicht man diese Reihe mit der geometrischen, welche convergent ist, so läßt sich leicht angeben, daß diese Reihe unter denjenigen Bedingungen convergirt und divergirt; denn es ist

$$\alpha_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{x^n}=\frac{n}{n+1}\cdot x=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}x$$

daraus sich ergibt, daß für $n=\infty$ der Quotient nur dann kleiner als 1 ist, wenn $x<1$ ist, für jeden andern Fall wird der Quotient ≥ 1, also die Reihe divergent. Für $x<1$ convergirt die geometrische Reihe, und da in der gegebenen Reihe jedes Glied noch einen Divisor hat, so muß diese um so mehr convergiren.

Untersucht man die Ergänzungssumme, wenn diese Null wird, so ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}}=\frac{\frac{x^n}{n}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}}=\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{1-\frac{n}{n+1}x}=\frac{x^{n+1}}{n+1-nx}=\frac{1}{\frac{n+1}{x^{n+1}}-\frac{n}{x^n}}$$

daher Ausdruck für ein unendlich großes n nur dann Null wird, wenn $x<1$ ist.

Wird in der gegebenen Reihe Zeichenwechsel angenommen, so ist der Ausdruck für die Ergänzungssumme zugleich, für welche

äußerste Werthe von x die Reihe noch convergent ist, nämlich $x = \pm 1$; denn in dem Falle ist

$$\frac{a_n \cdot a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = \frac{-1}{n+1+n} = -\frac{1}{2n+1}$$

Dieser Ausdruck wird Null für $n = \infty$.

4. Beispiel.

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\ldots \frac{1}{n^2}$$

Das Verhältniß zweier auf einander folgenden Glieder ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{1} = \frac{n^2}{n^2+2n+1} = \frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

Dieser Ausdruck für den Quotienten kann sich der Einheit beliebig nähern und wird für ein unendlich großes n in der Tat gleich 1, zeigt also eine Convergenz nicht an. Betrachtet man den Ausdruck für die Ergänzungssumme, so ist

$$\frac{a_n \cdot a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}} = \frac{1}{(n+1)^2 - n^2} = \frac{1}{2n+1}$$

für ein unendlich großes n wird also die Ergänzungssumme gi Null, was mit Bestimmtheit die Convergenz obiger Reihe anzei

5. Beispiel.

$$x \cdot \cos\varphi + x^2 \cdot \cos 2\varphi + x^3 \cdot \cos 3\varphi + \ldots\ldots x^n \cdot \cos n$$

Das Verhältniß dieser Reihe stellt sich dar als

$$\alpha_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1} \cdot \cos(n+1)\varphi}{x^n \cdot \cos n\varphi} = \frac{\cos(n+1)\varphi}{\cos n\varphi} \cdot x$$

Ist $x \geq 1$, so ist ersichtlich, daß die Reihe nicht convergi da der Quotient α_n in diesem Falle nicht kleiner als 1 werden ka

r Faktor $\frac{\cos(n+1)\varphi}{\cos n\varphi}$ ist nicht im Stande, Convergenz zu be-
da $\cos\varphi$ eine periodisch wachsende und abnehmende Kreis-
ist, die zwischen -1 und $+1$ schwankt. Setzt man nämlich
π, so ist $n\varphi = m\pi$ oder der Winkel ist ein Vielfaches von π.
r $\cos\pi = -1$, so kann der $\cos\pi$ und seine Vielfachen
vergenz nicht bewirken. Der Quotient der Reihe wird demnach
$x < 1$ selbst kleiner als 1.

$$\frac{a_n \cdot a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = \frac{x^n \cdot \cos n\varphi \cdot x^{n+1}\cos(n+1)\varphi}{x^n \cdot \cos n\varphi - x^{n+1}\cos(n+1)\varphi}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{x^{n+1}\cos(n+1\varphi)} - \frac{1}{x^n \cdot \cos n\varphi}}$$

Ausdruck zeigt, daß die Ergänzungssumme der Reihe für
nur dann Null wird, wenn $x < 1$ ist.

atz. Für die Reihe $x \cdot \sin\varphi + x^2 \cdot \sin 2\varphi + x^3 \cdot \sin 3\varphi + \ldots$
φ führen ähnliche Betrachtungen zum nämlichen Ziele.

6. Beispiel.

$$\cdot + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots \frac{x^n}{1.2.3\ldots.n}$$

Bestimmung des Quotienten der Reihe hat man

$$\frac{n+1}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{1.2.3.4\ldots(n+1)} \cdot \frac{1.2.3.4\ldots.n}{x^n} = \frac{1}{n+1}x$$

er Quotient wird für jeden endlichen Werth von x kleiner
sobald $n = \infty$ wird, daher ist die Reihe als convergent

anzusehen. Untersucht man noch die Summe der Ergänzu
so ist

$$\frac{a_n \cdot a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = \frac{\frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}$$

$$= \frac{x^{n+1}}{(n+1)! - n!x}$$

$$= \frac{1}{\frac{1.2.3....(n+1)}{x.x.x....x} - \frac{1.2.3..}{x.x.x..}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{x} \cdot \frac{2}{x} \cdot \frac{3}{x} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{x} \cdot \frac{n+1-x}{x}}$$

Dieser Quotient wird für jeden endlichen Werth von
wenn n unendlich zunimmt, daher ist die Reihe conver
alle Werthe von x, welche zwischen den nicht erreichbaren
$x = +\infty$ und $x = -\infty$ liegen.

§ 8.

Weitere Betrachtungen über Convergenz und Dir

1. Lehrsatz. Es sind zwei Reihen gegeben und m
daß die erste convergirt und ebenso, daß in der zweiten R
einer bestimmten Stelle an das Verhältniß zweier auf
folgender Glieder kleiner als in der ersten Reihe ist. W
behaupten, daß in dieser Falle die zweite Reihe noch mehr
erste convergirt.

$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots a_n + a_{n+1} + \ldots\ldots$ conv

$b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots b_n + b_{n+1} + \ldots$ ist zu unt

Dabei ist gemäß Datum: $\frac{b_{n+1}}{b_n} < \frac{a_{n+1}}{a_n}$,

Diese beiden Reihen können auch, wie folgt, geschrieben werden

$$a_1 + a_2 + \ldots\ldots a_{n-1} + a_n \left(1 + \frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}} + \ldots\ldots\right)$$

$$b_1 + b_2 + \ldots\ldots b_{n-1} + b_n \left(1 + \frac{b_{n+1}}{b_n} + \frac{b_{n+1}}{b_n} \cdot \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} + \frac{b_{n+1}}{b_n} \cdot \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} \cdot \frac{b_{n+3}}{b_{n+2}} + \ldots\ldots\right)$$

olgen in diesen Reihen noch beliebig viele Glieder, so wächst ur der Ausdruck in der Klammer; divergirt die Reihe, so t nur der Ausdruck in der Klammer. Nun ist bekannt, daß $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$ und $\frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} < \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$ u. s. w. ist, was auch giltig ist, eide Reihen unendlich viele Glieder haben. Da nach der setzung die erste Reihe convergiren soll, so ist auch der Aus- t den Klammern convergent, und weil sämmtliche Glieder Klammern der zweiten Reihe kleiner als die der ersten sind, auch die zweite Reihe und zwar rascher als die erste con- .

e erste Reihe kann durch Vergleichung der geometrischen ntersucht werden.

Beispiel.

seien folgende zwei Reihen zur Untersuchung vorgelegt:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\ldots \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \ldots\ldots \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Zuerst ist anzugeben, ob die erste Reihe convergirt.

$$\alpha_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2+2n+1} = \frac{1}{1+\frac{2}{n}+}$$

Für ein unendlich großes n kann sich dieser Quotient a der Einheit beliebig nähern, was noch verhindert, auf e vergenz der Reihe zu schließen; erst wenn für $n = \infty$ die Erg summe Null wird, kann die Reihe bestimmt als converger

$$\frac{a_n \cdot a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}} = \frac{1}{(n+1)^2 - n^2} = \frac{1}{2n+1}$$

welcher Ausdruck für $n = \infty$ in der That Null wird, so die Reihe convergent ist.

In der zweiten Reihe sind die einzelnen Glieder klein der ersten, da die Nenner nicht im Quadrat stehen, sond Nenner mit der um 1 größern Zahl multiplicirt ist.

2. Lehrsatz. Es ist eine Reihe mit positiven Gli geben, deren Convergenz oder Divergenz zu bestimmen ist sind die einzelnen Glieder so, daß sie der Reihe nach imm werden, also $a_0 > a_1 > a_2 > a_3$ u. s. w. Es ist gestattet Reihe eine zweite abzuleiten, indem man die Glieder hera deren Indices Potenzen von 2 sind, und diese Glieder Indices multiplicirt. Findet sich's, daß die abgeleitete Rei vergirt, so convergirt auch die erste Reihe S und umgekeh

$$S = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots\ldots$$
$$S' = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + 16a_{16} + \ldots\ldots$$

I. Wenn S convergirt, so convergirt S' noch mehr.

$$a_1 = a_1$$
$$2a_2 = 2a_2$$
$$4a_4 < 2a_3 + 2a_4$$
$$8a_8 < 2a_5 + 2a_6 + 2a_7 + 2a_8$$
$$16a_{16} < 2a_9 + 2a_{10} + 2a_{11} + 2a_{12} + 2a_{13} + 2a_{14} + 2a_{15} + 2$$

dirt man diese Ungleichheiten, so ist die Summe der Glieder und rechts 2 S, wobei nur a_0 fehlt; es ist also

$$S' < 2S - a_0$$

her S convergirt, so ist S' noch mehr convergent.

Wenn S divergirt, so divergirt auch S'.

$: a_1$

$- a_2 + a_3$

$- a_4 + a_5 + a_6 + a_7$

$- a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15}$ u. s. w.

irt man diese Ungleichheiten, so ist

$$S' > S - a_0$$

o S sich keiner bestimmten Summe nähert, so ist dies bei ehr der Fall. Die Reihe S' läßt aber meistens eine leichtere ung mit der geometrischen Reihe zu.

Beispiel.

$$\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \ldots\ldots \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n^\alpha + 1)} + \ldots\ldots$$

et man für diese Reihe das Verhältniß zweier Glieder, so ist

$$\alpha n = \frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha},$$

ch für $n = \infty$ eine Convergenz nicht erkennen läßt. Führt den Vergleich mittelst des Lehrsatzes, so ist

$$= 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^\alpha} + 4 \cdot \frac{1}{4^\alpha} + 8 \cdot \frac{1}{8^\alpha} + \ldots\ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{4^{\alpha-4}} + \frac{1}{8^{\alpha-1}} + \ldots\ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{(2^{\alpha-1})^1} + \frac{1}{(2^{\alpha-1})^2} + \frac{1}{(2^{\alpha-1})^3} + \ldots\ldots$$

woran man sofort die geometrische Reihe erkennt. Dies convergiren, wenn $\alpha > 1$ und positiv ist. Da für die convergirt, so muß auch S convergiren.

3. Lehrsatz. In einer convergenten Reihe mit lau Gliedern ist die Aenderung der Glieder gleichgiltig.

$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots\ldots$ ist die gege

Daraus ist folgende Ordnung zu nehmen und anz dies ohne Aenderung der Reihe erlaubt ist.

$1 + x^2 + x + x^4 + x^3 + x^5 + x^8 + x^{10} + x^6 +$

Da die Reihe eine eigentliche Summe nicht hat, eine Grenze, der sich die Summe ohne Ende nähert, so der Beweis an der Stelle.

Es heiße die Reihe, deren Glieder versetzt werden so die Summe der zweiten Reihe, deren Glieder aus S sei gleich jener der ersten Reihe, was natürlich nur d ist, wenn S convergent ist. Sind in der umgestellten Glieder bis a_n gesetzt, so werden alle folgenden die Summ nicht mehr um die unendlich kleine Größe ϱ ändern kön ist demnach

$$\varrho > a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + \ldots\ldots$$

In der zweiten Reihe sind nun alle Glieder der aber auch noch solche aufgenommen, die in der ersten Die Summe der ersten Reihe bis a_n ist S, und geht umgestellten Reihe bis a_n, so ist die Summe S'_n und bar, daß S'_n und S_n nicht gleich sind. Wird aber $n =$ wegen der Convergenz der Reihe S

$$S'_n - S_n < \varrho$$

Es ist $S'_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots a_n + a$
$+ a_{n+r''} + a_{n+r'''} + \ldots\ldots a_{n+t}$ und $S'_n - S_n = a$
$+ a_{n+r''} + a_{n+r'''} + \ldots\ldots a_{n+t}$

ıd diese Glieder der Größe nach geordnet, so ist

$$a_{n+r} > a_{n+r'} > a_{n+r''} > a_{n+r'''} \text{ u. s. w.}$$

)t man in der ersten Reihe so weit, daß alle Glieder sich welche der Ordnung nach zwischen a_0 und a_{n+t} liegen, so ist

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots a_{n+t} \text{ und}$$

$$_{n+t} - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots\ldots a_{n+t}$$

ifferenz größer ist als obige $S'_n - S_n$, da diese obige Differenz
: Glieder $a_{n+1} + a_{n+r'} + a_{n+r''} + a_{n+r'''} + \ldots\ldots$ aus-
ist, welche Glieder nur ein Theil der Glieder $a_{n+1} + a_{n+2}$
$+ \ldots\ldots a_{n+t}$ sind. Weil diese beiden Summen nur positive
haben, und die letztere Summe mehr Glieder als die erstere
so ist die zweite Summe nothwendig größer als die erste
ıen der Convergenz der Reihe höchstens ihr gleich; also ist

$> S_{n+t} - S_n > S'_n - S_n$, daher $\varrho > S'_n - S_n$ d. h.

rschied der gegebenen und der umgestellten Reihe ist kleiner
ınendlich kleine Größe ϱ.

merkung. Der Beweis trifft dann nicht mehr ganz zu,
Zeichen der Glieder verschieden sind, weil dabei nicht mehr
st, ob die unendlich kleine Größe $\varrho > S_{n+t} - S_n$ ist.

§ 9.

chtungen über Convergenz und Divergenz der ıen mit wechselnden Vorzeichen der Glieder.

Bestimmung des früher aufgestellten Quotienten $\alpha_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$
die Ableitung desselben ganz allgemein durchgeführt ist,
auch hier zum Ziele; denn setzt man diesen Quotienten in
euck $\frac{a_n \cdot a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}}$ ein und es ergibt sich, daß für $n = \infty$
uck Null wird, so ist damit die Convergenz der Reihe con-

ſtatirt. Es ſollen deshalb nur folgende Angaben in Bezug
mit wechſelnden Vorzeichen der Glieder Statt haben.

1. Lehrſatz. Würde eine Reihe convergiren, wenn
gleiche Vorzeichen hat, ſo iſt dies um ſo mehr der Fall,
Vorzeichen wechſeln.

Geſetzt, es iſt folgende Reihe gegeben

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \ldots\ldots + a_{2n} -$$

Convergirt dieſe Reihe, wenn ſie lauter gleiche Vorze
ſo muß die Ergänzungsſumme der Reihe kleiner als die
kleine Größe ϱ ſein, alſo

$$S_{2n+m} = a_{2n+1} + a_{2n+2} + a_{2n+3} + \ldots\ldots a_{2n+m}$$

Da aber in der gegebenen Reihe auch noch ein Theil d
ſubtrahirt wird, ſo convergirt die Reihe mit wechſelnden
um ſo raſcher nach einer beſtimmten Grenze hin. Wen
Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots$ bei gleichen
der Glieder convergirt, ſo convergirt dieſelbe Reihe $a_0 - a_1 +$
bei wechſelnden Vorzeichen der Glieder um ſo mehr.
ſolchen Reihe gilt der Satz: die Reihe convergirt abgeſehe
Zeichen. Wenn aber die Reihe $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4$
bei wechſelnden Vorzeichen convergirt, ſo folgt daraus
daß dieſelbe Reihe mit lauter poſitiven Gliedern auch
weßhalb hier der Satz gilt: die Reihe convergirt blos
der Vorzeichen der Glieder.

2. Lehrſatz. Nehmen die Glieder einer Reihe
nirenden Vorzeichen von einer gewiſſen Stelle an einzeln in's
ab, ſo kann man ſagen, daß die Reihe convergire, was
Fall iſt, wenn alle Glieder poſitiv ſind.

$$b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - b_5 \ldots\ldots\ldots + b_{2n} -$$

Hiebei iſt $b_{2n} > b_{2n+1} > b_{2n+2} > b_{2n+3} \ldots\ldots\ldots$
bereits $b_{2n} < \varrho$. Iſt die Reihe bis b_{2n} angegeben, ſo iſt
folgende Stück derſelben

$$s = - b_{2n+1} + b_{2n+2} + b_{2n+3} + b_{2n+4} \ldots\ldots \pm$$

ieſe Summe s iſt negativ; denn nimmt man hierin je zwei ander folgende Glieder zuſammen, ſo iſt

$$(b_{2n+1} - b_{2n+2}) - (b_{2n+3} - b_{2n+4}) - (b_{2n+5} - b_{2n+6}) - \ldots.$$

eſe Differenzen erſcheinen ſämmtlich als negative Größen. igs hat die Summe s nur einen ganz geringen negativen denn wird das Glied b_{2n} dazu geſetzt, und werden wieder auf einander folgende Glieder in Klammern genommen, ſo iſt

$$_{2n} - b_{2n+1}) + (b_{2n+2} - b_{2n+3}) + (b_{2n+4} - b_{2n+5}) + \ldots\ldots$$

Differenzen ſämmtlich poſitiv ſind. Alſo iſt die Summe s en Zuſatz von $+ b_{2n}$ bereits wieder in's Gegentheil umge-, woraus folgt, daß $s < b_{2n}$ ſein muß, weil aber wieder) iſt, ſo iſt die Summe $s < \varrho$.

an ſieht hieraus auch, wie groß der Fehler iſt, wenn eine eihe bei einem Gliede abbricht. Der Fehler iſt nämlich noch groß als das erſte weggelaſſene Glied der Reihe.

Beiſpiel.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots\ldots \frac{1}{n}$$

ſer Reihe iſt § 7 Beiſpiel 1 gezeigt, daß ſie divergent ſei.

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \ldots\ldots - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}$$

$$)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\ldots = \frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{56}+\ldots$$

alſo die Reihe mit lauter poſitiven Vorzeichen der Glieder :, ergibt ſich, daß dieſelbe Reihe mit alternirenden Zeichen raſch convergirt.

Lehrſatz. Wenn eine Reihe wechſelnde Zeichen hat und n von den Zeichen convergirt, ſo iſt die Ordnung der Glieder

Eine solche Reihe kann auch als Differenz geschrieben
deren Minuend sämmtliche positive und deren Subtrahend sä
negative Glieder enthält. Wenn also die Reihe schon bei
Vorzeichen der Glieder convergiren würde, so wird dies um
geschehen, wenn noch ein Theil der Glieder subtrahirt wird
vergirt aber die Reihe bloß mit Hilfe der Zeichen, so ist
zulässig, die Ordnung der Glieder zu ändern, weil dadurch
vergenz der Reihe gestört wird.

Es ist z. B. die convergente Reihe gegeben: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} -$
$- \frac{1}{6} \ldots\ldots$ umgestellt wie folgt: $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} -$
$- \frac{1}{10} - \frac{1}{12} \ldots\ldots$

Folgen die Glieder in der zweiten Ordnung, so ist kl
auf ein positives stets zwei negative Glieder folgen, so daß
umgestellten Reihe ein Dritttheil der Glieder positiv und zw
theile negativ sind, während in der ursprünglichen Reihe di
der Glieder positiv, die andere negativ ist. Es ist

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

$$S' = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-}$$

$$S - S' = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+4} + \frac{1}{2n+6} + \ldots\ldots \frac{1}{4n}$$

Die negativen Glieder in S stehen auch in S', aber a
andere, da S' bis 4n geht. Soll auch S' convergiren,
S — S' verschwindend klein sein, wenn $n = \infty$ geworden

$$S - S' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots\ldots\right)$$

eraus folgt, daß die Differenz $S - S' > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ oder $> \frac{1}{4}$ ist,

und S' können nicht beide und nicht nach derselben Grenze
vergiren, da die Reihe S' möglicher Weise auch divergiren kann.
ill man untersuchen, ob die zweite Reihe convergirt, so kann
auch so beschreiben, daß man je ein positives und negatives
usammenfaßt.

$$' = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} \cdots\cdots$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} \cdots\cdots$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \cdots\cdots\right)$$

e Reihe in den Klammern convergirt, ja sie ist die ursprüng-
ihe selbst. An diesem Beispiele sieht man zufällig auch, um
l die ursprüngliche Reihe durch die Umstellung verändert
e Sie wurde um die Hälfte herabgesetzt.

ſatz. Uebrigens ist es nicht immer erlaubt, zwei solche
zu vereinigen, da es möglich ist, daß dadurch Convergenz
wird, wo zuerst Divergenz war.

$1 + 1 - 1 + 1 - 1 \cdots\cdots$ wäre $0 + 0 + 0 \cdots\cdots$

nvergenz, wo anfänglich Divergenz war. Dieses Verfahren
der zusammen zu ziehen, kann nur dann angewendet werden,
e einzelnen Glieder unendlich abnehmen, also bei convergenten
weil nur in dem Fall auch nach der Zusammenziehung wieder
enz Statt hat.

§ 10.

Operationen mit mehreren Reihen.

α) Addition und Subtraction.

Wenn Reihen addirt oder subtrahirt werden sollen, so sind
) nur convergente Reihen gemeint, da diese allein einer be-

stimmten Grenze sich nähern oder eine Summe haben. Da d
Reihen eine bestimmte Summe nicht haben, so kann auch di
oder Differenz zweier solcher Reihen nicht angegeben werd

2) Sollen also die beiden convergenten Reihen S und
werden, so wird für $n = \infty$ auch deren Summe $S + S'$ cor
Die Addition selbst kann auch so vollzogen werden, daß d
staben mit gleichen Indices zusammen genommen werden.

$$S = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots a_n$$

$$S' = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots b_n$$

$$S + S' = a_0 + b_0 + a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \ldots\ldots a$$

und $S + S'$ wird einer bestimmten Zahl sich nähern, wenn
frühern Angaben S und S' einer Grenze einzeln sich nähe

3) Dasselbe gilt auch von der Subtraction.

β) Multiplikation.

Auch hier können blos convergente Reihen zur Behandlung
diese werden multiplizirt, wenn man jedes Glied der einen
jedem der andern multiplizirt und die Produkte beliebig o

$$S = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots\ldots$$

$$S' = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \ldots\ldots$$

$$SS' = a_0 (b_0 + b_1 + b_2 + \ldots\ldots) + a_1 (b_0 + b_1 + b_2 -$$
$$+ a_2 (b_0 + b_1 + b_2 + \ldots\ldots) + \ldots\ldots$$

Das Produkt SS' muß, da die einzelnen Theile desse
vergent sind, selbst convergiren. Wenn aber die Reihen
Hilfe der Zeichen convergiren, so kann der Satz nicht mehr
gelten; da die Grenze der Convergenz für SS' nicht mehr be

§ 11.

Erklärungen.

1) Wenn eine Reihe vorliegt, deren Indices ganze Zahlen sind

$$c_a + c_{a+1} + c_{a+2} + c_{a+3} + \ldots\ldots c_b$$

und b ganze Zahlen sind, so wird eine solche Summe kurz ch in der Regel bezeichnet, daß man vor das allgemeine Glied Summenzeichen Σ, den kleinsten Werth von c unter und den n über Σ setzt, also

$$c_a + c_{a+1} + c_{a+2} + c_{a+3} + \ldots\ldots c_b = \sum_{n=a}^{n=b} c_n$$

In dieser Verbindung ist n blos Summationsbuchstabe, und die ie hängt von n nicht ab. Ist dieser Summationsbuchstabe bekannt, so kann er auch wegbleiben, wo dann a und b die en der Werthe von c angeben, also

$$\sum_{n=a}^{n=b} c_n = \sum_{a}^{b} c_n$$

Ist die Reihe unendlich, so ist für die obere Grenze $n = \infty$ en.

2) Manchmal kann es nothwendig werden, die Grenzen zu ver- n, wodurch Glieder hinzugefügt oder weggelassen werden; diese ur Reihe gehörigen Glieder müssen schließlich wieder subtrahirt ddirt werden; z. B. durch Veränderung der untern Grenze.

$$c_{a-1} + c_a + c_{a+1} + c_{a+2} + \ldots\ldots c_b = \sum_{n=a-1}^{n=b} c^n - c_{a-1}$$

Die untere Grenze darf jedoch hiebei nicht größer werden als re, weil sonst Σ die Bedeutung verliert; außerdem darf n nicht werden. Wird die obere Grenze verändert

$$c_{a+1} + c_{a+2} + c_{a+3} + \ldots\ldots c_{b-1} + c_{b-3} = \sum_{n=a}^{n=b-3} c_n + c_{b-2} + c_{b-1} + c_b$$

ß die obere Grenze nicht kleiner als die untere werden.

3) In Bezug auf diese Summation gelten folgende Sätz

α) Zwei Summen, die unter sich verschieden sind, aber
inander anschließen, lassen sich als eine einzige Summe sch

$$\sum_{n=a}^{n=b} c_n + \sum_{n=b+1}^{n=e} c_n = \sum_{n=a}^{n=e} c_n$$

β) Zwei Summen, welche die gleichen Symbole haben
denen aber die erste größer als die zweite ist und die größ
obere, während die zweite die nämliche untere Grenze hat,
von einander subtrahirt werden.

$$\sum_{n=a}^{n=e} c_n - \sum_{n=a}^{n=b} c_n = \sum_{n=b+1}^{n=e} c_n$$

γ) Zwei Summen, welche dieselben Grenzen, aber versc
Symbole der Summe haben, werden addirt oder subtrahirt,
man ihre Symbole addirt oder subtrahirt.

$$\sum_{n=a}^{n=b} c_n \pm \sum_{n=a}^{n=b} d_n = \sum_{n=a}^{n=b} \left(\underset{n}{c} \pm \underset{n}{d} \right)$$

δ) Eine Summe wird mit einem constanten Faktor multi
wenn man diesen Faktor entweder vor oder nach dem Su
zeichen setzt.

$$m \cdot \underset{a}{c} + \underset{a+1}{mc} + \underset{a+2}{mc} + \ldots\ldots \underset{b}{mc} = m \left(\underset{a}{c} + \underset{a+1}{c} + \underset{a+2}{c} + \right.$$

$$\sum_{n=a}^{n=b} \underset{n}{mc} = m \sum_{n=a}^{n=b} c_n$$

ε) Ist aber der Faktor m nicht constant, sondern varia
ist es nicht erlaubt, diesen Faktor vor Σ zu setzen.

$$a \cdot \underset{a}{c} + (a+1) \underset{a+1}{c} + (a+2) \underset{a+2}{c} + (a+3) \underset{a+3}{c} + \ldots \underset{b}{bc} =$$

§ 12.

Die Binomialreihe.

1) Wenn man mehrere zweitheilige Faktoren, Binome genannt, inen gemeinschaftlichen Theil x haben, mit einander multiplizirt nach den Potenzen dieses gemeinschaftlichen Theiles x ordnet, hält man etwa für fünf Binomialfaktoren folgende Entwicklung

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e)\ldots\ldots =$$

$$\begin{vmatrix} a+b \\ c+d \\ e \end{vmatrix} x^4 + \begin{vmatrix} ab+bc \\ ac \quad bd \\ ad \quad be \\ ae \quad cd \\ \quad ce \\ \quad de \end{vmatrix} x^3 + \begin{vmatrix} abc+bcd \\ abd \quad bce \\ abe \quad bd \\ acd \quad e \\ ace \quad cde \\ ade \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} abcd \\ abce \\ abde \\ acde \\ bcde \end{vmatrix} x + abcd + \ldots.$$

Hieraus ist folgendes ersichtlich:

a) Das erste Glied der Entwicklung ist der gemeinsame Theil Binome mit einem Exponenten, der die Anzahl der Binome be- net; der Coefficient dieses ersten Gliedes ist 1. In den folgenden ern nehmen die Exponenten von x ab, bis das letzte Glied 1 hat, woraus hervor geht, daß die Entwicklung ein Glied hat, als die Anzahl der Faktoren beträgt.

b) Der Coeffizient des zweiten Gliedes ist die Summe aller en Theile der Binome oder die Summe aller Combinationen zweiten Theile zur ersten Klasse (Summe aller Unionen).

c) Der Coeffizient des dritten Gliedes ist die Summe aller Com- ionen aller zweiten Theile zu je zwei oder zur zweiten Klasse me aller Amben).

d) Der Coeffizient des vierten Gliedes ist die Summe aller binationen der zweiten Theile zur dritten Klasse (Summe der en).

e) Das letzte Glied endlich ist das Produkt aller zweiten (oder die höchste Combinationsklasse dieser Theile.

3) Werden n Binomialfaktoren mit einander multiplizi die angedeuteten Bezeichnungen aus der Combinationslehre eing so gibt es folgende Formel

$$(x+a)(x+b(x+c)(x+d)\ldots\ldots(x+n)=$$

$$x^n+SC_{1}^{(n)}\cdot x^{n-1}+SC_{2}^{(n)}\cdot x^{n-2}+SC_{3}^{(n)}\cdot x^{n-3}+\ldots SC_{r}^{(n)}$$

$$+\ldots\ldots SC_{n-1}^{(n)}\cdot x+SC_{n}^{(n)}$$

4) Gilt das Gesetz dieser Entwicklung für ein Produkt Faktoren, so gilt es auch für ein Produkt von $(n+1)$ Fa

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots\ldots\ldots(x+n)=x^n+SC_{1}^{(n)}$$

$$+SC_{2}^{(n)}\cdot x^{n-2}+SC_{3}^{(n)}\cdot x^{n-3}+\ldots\ldots SC_{n-1}^{(n)}\cdot x+SC_{n}^{(}$$

Multiplizirt man noch mit einem Faktor $(x+p)$, so ist

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\ldots\ldots(x+n)(x+p)=$$

$$x^{n+1}+[SC_{1}^{(n)}+p]x^n+[SC_{2}^{(n)}+p\cdot SC_{1}^{(n)}]x^{n-1}+[SC_{3}^{(n)}+p\cdot SC_{2}^{(}$$

$$+[SC_{r}^{(n)}+p\cdot SC_{r-1}^{(n)}]\,x^{n-r+1}+\ldots\ldots p\cdot SC_{n}^{(n)}$$

es ist aber

$$SC_{1}^{(n)}+p=a+b+c+d+\ldots\ldots n+p=SC_{1}^{(n+1)}$$

$$SC_{2}^{(n)}+p\cdot SC_{1}^{(n)}=ab+ac+ad+\ldots bc+bd+\ldots ap+bp$$

$$+\ldots\ldots np=SC_{2}^{(n+1)}$$

$$SC_{3}^{(n)}+p\cdot SC_{2}^{(n)}=SC_{3}^{(n+1)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$SC_{r}^{(n)}+p\cdot SC_{r-1}^{(n)}=SC_{r}^{(n+1)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p\cdot SC_{n}^{(n)}=abcd\ldots\ldots np=SC_{n+1}^{(n+1)}$$

mnach ist die Entwicklung für (n+1) Faktoren

$$(x+b)(x+c)\ldots\ldots(x+n)(x+p) = x^{n+1} + SC_{1}^{(n+1)} \cdot x^{n}$$

$$+1) \cdot x^{n-1} + SC_{3}^{(n+1)} \cdot x^{n-2} + \ldots\ldots SC_{r}^{(n+1)} \cdot x^{n-r+1} + \ldots\ldots$$

$$SC_{n}^{(n+1)} \cdot x + SC_{n+1}^{(n+1)}$$

die Entwicklung für (n + 1) Faktoren dasselbe Gesetz auf= die die für n Faktoren, so ist damit gezeigt, daß diese Ab= allgemeine Giltigkeit besitzt.

Setzt man sämmtliche zweiten Theile der Binomialfaktoren gleich, also $a = b = c = d = \ldots\ldots n = p$, so geht das in die Potenz über, wobei sich die Coefficienten nach der tionslehre einfacher ergeben, nämlich:

$$a + a + a + a + \ldots\ldots = n \cdot a$$

$$a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + \ldots\ldots = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2$$

$$a^3 + a^3 + a^3 + a^3 + \ldots\ldots = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3$$

. . . . . .

$$a^r + a^r + a^r + \ldots\ldots \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots r} a^r$$

. . . . . .

$$: a^{n-1} + a^{n-1} + a^{n-1} + \ldots = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (n-1)}$$

$$= n \cdot a^{n-1}$$

$$a^n + a^n + a^n + \ldots = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (n-1)n} = a^n$$

Hiernach ergibt sich der Binomialsatz als Reihe folge
wobei man noch merke, daß sich die Exponenten der beid
des Binoms in Summe zu n ergänzen.

$$(x+a)^n = x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}a + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}a^2 + \frac{n(n-1)(n-2}{1.2.3}$$

$$+ \ldots\ldots \frac{n(n-1)(1-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots r}x^{n-r}a^r + \ldots \frac{n}{1}x.a^r$$

6) Wird in dieser Reihe —a statt a gesetzt, so w
Glieder mit ungeraden Potenzen des negativen Theiles ne
scheinen, so daß also in der Binomialreihe Zeichenwechsel

$$(x-a)^n = x^n - nx^{n-1}a + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}a^2 - \frac{n(n-1)(n-2}{1.2.3}$$

$$\ldots\ldots (-1)^r.\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots r}x^{n-r}$$

7) Convergirt oder divergirt diese Reihe?

Um hierüber zu entscheiden, kann man durch Divisi
Potenz leicht auf folgende Form bringen

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}x^3 +$$

$$\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n + \ldots\ldots$$

Das Verhältniß zweier Glieder heißt

$$\alpha_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)}{1.2.3\ldots(n+1)} \cdot \frac{1.2.3\ldots}{\alpha(\alpha-1(\alpha-2)..(\alpha}$$

$$\cdot\frac{x^{n+1}}{x^n} = \frac{\alpha-n}{n+1}.x$$

Wird dieses Verhältniß kleiner als 1, so wird die R
convergent zu betrachten sein. Obigen Ausdruck kann man ab
schreiben

$$\alpha_n = -x\frac{1-\frac{\alpha}{n}}{1+\frac{1}{n}}$$

für $n = \infty$ wird sich dieses Verhältniß der Einheit beliebig
, da $\frac{\alpha}{n}$ und $\frac{1}{n}$ kleiner als jede noch so kleine Größe sein kann;
ch bleibt noch der Faktor x übrig. Ist $x < 1$, so wird die
convergiren, ist $x > 1$, divergiren.

) Wenn das Gesetz der Coeffizienten bis zum rten Gliede
ist, so gilt es auch für den $(r+1)$ten Coeffizienten, also
ein

ngenommen, das Entwicklungsgesetz sei bis zum $(r-1)$ten
abgeleitet und als richtig erkannt, also für den Coeffizienten
ewiesen. Verbindet man jede Complexion von $C_{(n)}_{r-1}$ mit jedem
ihr nicht vorkommenden $(n - r + 1)$ Elemente, so erhält man
dukte $(n - r + 1)\, C_{(n)}_{r-1}$ die Combinationen der rten Klasse rmal.

emnach ist für die Coeffizienten giltig

$$_{(n)} = \frac{n - r + 1}{r} C_{(n)}_{r-1} \text{ oder } \binom{n}{r} = \frac{n - r + 1}{r} \binom{n}{r-1}$$

emnach ist allgemein für den Binomialsatz

$$\binom{n}{r} a^r x^{n-r} = \binom{n}{r-1} \cdot \frac{n - r + 1}{r} a^{r-1} x^{n-r+1} \cdot \frac{a}{x}, \text{ d. h.}$$

effizient des rten Gliedes wird nach der Combinationslehre
) abgeleitet, dazu tritt zum $(r-1)$ten Gliede ein Quotient
tor aus den Binomialtheilen, welcher durch Ausscheidung des
Theiles beim Binom als Faktor entsteht; es kann nämlich
$)^n = x^n \left(1 + \frac{a}{x}\right)^n$ bezeichnet werden.

Die vom ersten und letzten Glied gleich weit abstehenden
al-Coeffizienten sind gleich.

n Elemente geben zur rten Combinationsklasse

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\ldots\,(n-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\,r}$$

Complexionen; wird mit der Faktorielle von $(n-r)$ Zäh
Nenner multiplizirt, so ist

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\,r}\cdot\frac{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)\ldots}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\,(n-r}$$

$$=\frac{n\,!}{r\,!\,(n-r)\,!}$$

n Elemente geben zur $(n-r)$ten Klasse, wenn zugl
der rten Faktorielle Zähler und Nenner multiplizirt wird,

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\ldots\,(r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\,(n-r)}\cdot\frac{r\,(r-1)\,(r-2)\,\ldots\ldots}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\,r}$$

$$=\frac{n\,!}{(n-r)\,!\,r\,!}\text{ und}$$

$$\frac{n\,!}{r\,!\,(n-r)\,!}=\frac{n\,!}{(n-r)\,!\,r\,!}\text{ d. h.}$$

die Combinationszahlen der Klassen, die sich zur Anzahl
Elemente ergänzen, sind gleich, oder die Binomial-Coeffizien
Glieder, deren Exponenten sich in gleicher Weise zum Expon
ergänzen, sind gleich.

Diese Eigenschaft der Binomial-Coeffizienten kann au
einfach auf folgende Art gezeigt werden.

$$(x+a)^n=x^n+\binom{n}{1}a\,x^{n-1}+\binom{n}{2}a^2x^{n-2}+\binom{n}{3}a^3x^{n-3}+\ldots$$

$$a^r x^{n-r}+\ldots\ldots\binom{n}{n-1}a^{n-1}x+\binom{n}{n}a^n$$

$$(a+x)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}x+\binom{n}{2}a^{n-2}x^2+\binom{n}{3}a^{n-3}x^3+\ldots$$

$$a^{n-r}x^r+\ldots\ldots\binom{n}{n-1}a\,x^{n-1}+\binom{n}{n}x^n$$

$(x+a)_n = (a+x)^n$ ist, so müssen auch die beiden Ent-
n oder es müssen die Coeffizienten der gleich hohen Potenzen
mialtheile in beiden Fällen gleich sein; also

$$\binom{n}{n};\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1};\binom{n}{2}=\binom{n}{n-2}\cdots\binom{n}{r}=\binom{n-r}{n}$$

Da ein Binom mit dem Exponenten n in der Entwicklung
Glieder gibt, so erhält man, wenn n eine gerade Zahl ist,
rade Anzahl Glieder, und wenn n eine ungerade Zahl ist,
ide Anzahl Glieder. Im ersten Falle gibt es nur ein
Glied, im zweiten aber zwei solche Glieder, von denen das
erſten Glied so weit absteht wie das andere vom letzten.

$$(1+x)^\alpha = 1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\binom{\alpha}{3}x^3+\cdots\cdots$$

Reihe stellt sich demnach als eine Funktion von α dar, also

$$=1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\binom{\alpha}{3}x^3+\binom{\alpha}{4}x^4+\cdots\cdots$$

$$=1+\binom{\beta}{1}x+\binom{\beta}{2}x^2+\binom{\beta}{3}x^3+\binom{\beta}{4}x^4+\cdots\cdots$$

ch Multiplikation dieſer beiden Reihen erhält man

$$)=1+\left.\begin{matrix}\binom{\alpha}{1}\\ \binom{\beta}{1}\end{matrix}\right\}x+\left.\begin{matrix}\binom{\alpha}{2}\\ \binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{1}\\ \binom{\beta}{2}\end{matrix}\right\}x^2+\left.\begin{matrix}\binom{\alpha}{3}\\ \binom{\alpha}{2}\binom{\beta}{1}\\ \binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{2}\\ \binom{\beta}{3}\end{matrix}\right\}x^3+\cdots\cdots$$

$$+\left.\begin{matrix}\binom{\alpha}{r}\\ \binom{\alpha}{r-1}\binom{\beta}{1}\\ \binom{\alpha}{r-2}\binom{\beta}{2}\\ +\cdots\cdots\\ \binom{\alpha}{2}\binom{\beta}{r-2}\\ \binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{r-1}\\ \binom{\beta}{r}\end{matrix}\right\}x^r+\cdots\cdots$$

Diese Summe der Reihe läßt sich kurz durch das Sum
zwischen bestimmten Werthen von n ausdrücken.

$$f(\alpha) \cdot f(\beta) = \sum_{n=0}^{n=\infty} M_n x^n, \text{ wobei}$$

$$M_n = \alpha_0\beta_n + \alpha_1\beta_{n-1} + \alpha_2\beta_{n-2} + \alpha_3\beta_{n-3} + \ldots \alpha_{n-1}\beta_1$$

$$= \sum_{s=0}^{s=n} \alpha_s\beta_{n-s}$$

Diese Reihe wird im Allgemeinen auf beiden Seiten i
liche fortlaufen. Um zu sehen, was aus Σ wird, kann n
der ersten Werthe setzen. Wird $n = 0$, so ist auch $s =$
nur die verschiedenen Werthe von n angibt; man erhält M
wird offenbar, da $\alpha_0 = 1$ und $\beta_0 = 1$ ist

$$M_0 = \alpha_0\beta_0 = 1$$

$$M_1 = \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 = 1 \cdot \frac{\beta}{1} + \frac{\alpha}{1} \cdot 1 = \frac{\alpha+\beta}{1}$$

$$M_2 = \alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0 = 1 \cdot \frac{\beta(\beta-1)}{1.2} + \frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\beta}{1} + \frac{\alpha(\alpha}{1}$$

$$= \frac{\beta(\beta-1)}{1.2} + \frac{\beta.\alpha}{1.2} + \frac{\alpha.\beta}{1.2} +$$

$$= \frac{\beta}{1.2}(\alpha+\beta-1) + \frac{\alpha}{1.2}(\alpha-$$

$$= \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}{1.2}$$

Man kann also wohl sagen und per inductionem weite

$$M_0 = 1;\ M_1 = (\alpha+\beta)_1;\ M_2 = (\alpha+\beta)_2;\ M_3 = (\alpha+\beta$$

Die vollständige Induction wird den Beweis auch
liefern.

?) Dieser Lehrsatz zur Begründung der vollständigen Induction
Ist eine Gleichung bis zu einer gewissen Stelle von n Gliedern
estimmt, so gilt sie auch für den nächst größeren Werth und
) allgemein. Es wird hier vorausgesetzt, daß n Glieder
M_2) einer Gleichung richtig gestellt sind, so hat hiernach auch
$+1)$te Glied seine Richtigkeit.

$\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2\ldots(\alpha+\beta-n+1)}{1.2.3.\ldots.n}$ sei erwiesen,

$=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)\ldots(\alpha+\beta-n+1)(\alpha+\beta-n)}{1.2.3\ldots.n(n+1)}$

falls richtig.

; sei, wie oben bezeichnet,

$$M_n = (\alpha+\beta)_n = \sum_{s=0}^{s=n} \alpha_s \beta_{n-s} \text{ und}$$

$$M_{n+1} = (\alpha+\beta)_{n+1} = \sum_{s=0}^{s=n+1} \alpha_s \beta_{n+1-s}$$

n von M_n auf M_{n+1} zu schließen, multiplizire man $(\alpha+\beta)_n$
t Faktor $(\alpha+\beta-n)$, nämlich

$$-n)(\alpha+\beta)_n = \sum_{s=0}^{s=n} (\alpha+\beta-n)\alpha_s\beta_{n-s}$$

$$= \sum_{s=0}^{s=n} (\alpha-s+\beta-n+s)\,\alpha_s\beta_{n-s}$$

$$= \sum_{s=0}^{s=n} \alpha-s)\,\alpha_s\beta_{n-s} + \sum_{s=0}^{s=n} (\beta-n+s)\,\alpha_s\beta_{n-s}$$

[nach § 11. γ]

$$= \sum_{s=0}^{s=n} (s+1)\,\alpha_{n+1}\beta_{n-s} + \sum_{s=0}^{s=n} (n-s+1)\alpha_s\beta_{n-s+1}$$

Man beachte, daß $s = n$ und daß wenn im Zähler (α Faktor zutritt, im Nenner $(s+1)$ Faktoren erscheinen, eb β_{n-s} durch den Zusatz $(\beta - n + s)$ in β_{n-s-1} übergehen.

Das nächste nach dem n ten Gliede ist $\alpha_{n+1} = \alpha_n \cdot \frac{\alpha-}{n-}$ auch $\alpha_n(\alpha - n) = (n+1)\alpha_{n+1}$ und, weil s nur die ver Werthe von n bezeichnet, so kann auch geschrieben werden $= (s+1)\alpha_{s+1}$. Ganz auf dieselbe Weise ist auch β_{n-s+} $\cdot \frac{\beta - n + s}{n - s + 1}$ oder wieder nach Entfernung des Nenners β_{n-s} ($=(n-s+1)\beta_{n-s+1}$.

Nun darf man die Grenzen verändern und statt s Werth $s = -1$ setzen. Wenn auch sonst negative Indic Sinn geben, so ist dieß doch hier nicht der Fall, weil z. B. α ist, was Bedeutung hat; ebenso darf die obere Grenze v werden. In der ersten Reihe geht also das s von ($-$ und in der zweiten Reihe bis $(n+1)$, wodurch die Gr beiden Reihen als nicht gleich erscheinen. Setzt man aber s so werden durch diese Veränderung die Grenzen der beiden die nämlichen, und da s und s' ganz inhaltslose Symbole kann man wohl statt s' auch wieder s setzen. Oben ist

$$(\alpha+\beta-n)(\alpha+\beta)_n = \sum_{s=0}^{s=n}(s+1)\alpha_{s+1}\beta_{n-s} + \sum_{s=0}^{s=n}(n-s+1)\alpha_s$$

$$= \sum_{s'=0}^{s'=n-1} s'.\alpha_{s'}\beta_{n-s'-1} + \sum_{s=0}^{s=n-1}(n-s+1)$$

oder

$$= \sum_{s=0}^{s=n-1}(s.\alpha_s\beta_{n-s-1} + \sum_{s=0}^{s=n-1}(n-s+1)$$

$$= \sum_{s=0}^{s=n-1}(s+n-s+1)\alpha_s\beta_{n-s-1}$$

$$= (n+1)\sum_{s=0}^{s=n-1}\alpha_s\beta_{n-s-1} \text{ [nach § 11. } \delta\text{],}$$

$$(\alpha+\beta)_n \cdot \frac{\alpha+\beta-n}{n+1} = \sum_{s=0}^{s=n-1}\alpha_s\beta_{n-s-1}$$

ier $(\alpha+\beta)_n \cdot \frac{\alpha+\beta-n}{n+1} = (\alpha+\beta)_{n+1} = M_{n+1}$ ist, so ist

$$= \sum_{s=0}^{s=n+1} \alpha_s \beta_{n-s+1}$$

a aber oben die Multiplikation zweier Binomialreihen, insofern s Funktionen der Exponenten erscheinen, bis zum Ausdruck ect abgeleitet und erwiesen ist, so gilt das Gesetz auch für $\frac{1}{4}$ u. s. w., also allgemein. Es ist also

$$.(\beta) = \sum_{n=0}^{n=\infty} M_n x^n = \sum_{n=0}^{n=\infty} (\alpha+\beta)_n x^n = f(\alpha+\beta), \text{ d. h.}$$

odukt zweier Reihen ist wieder eine Reihe, worin die Summe an die Stelle der einfachen Exponentialgröße tritt.

) Erweitert man diese Gleichung, d. h. multiplizirt man das zweier Reihen mit einer dritten, welche $f(\gamma)$ sei, so ist

$$f(\alpha) \cdot f(\beta) \cdot f(\gamma) = f(\alpha+\beta) \cdot f(\gamma) = f(\alpha+\beta+\gamma)$$

aher gilt für die Multiplikation von mehreren Reihen

$$f(\alpha) \cdot f(\beta) \cdot f(\gamma) \ldots = f(\alpha+\beta+\gamma+\ldots)$$

) Wird $\alpha = \beta = \gamma = \ldots$, so geht die vorher gehende ung in folgenden Ausdruck über

$$f(\alpha)^n = f(n\alpha),$$

ier Ableitung gemäß die Anzahl der Binomialexponenten also eine ganze, positive Zahl sein muß.

rd hierbei $\alpha = 1$, so erhält man

$$f(\alpha)^n = f(1)^n = f(n), \text{ d. h.}$$

nur eine einzige Reihe, welche in ihrer Entwicklung nichts ist als eine Funktion des Potenzexponenten.

15) Es ist oben $f(\alpha) . f(\beta) = f(\alpha+\beta)$. Wird $\beta = -$ so ist

$$f(\alpha) . f(-\alpha) = f(0) = 1 \text{ oder } f(-\alpha) = \frac{1}{f(\alpha)} \text{ d. h.}$$

die oben aufgestellte Entwicklung gilt auch für negative Ex oder für die Funktionen als Divisoren.

$$\frac{1}{(1+x)^{\alpha}} = (1+x)^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.3}x^2 - \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha-}{1.2.3}$$

16) Ist $\alpha = \frac{\beta}{n}$, so wird $n = \frac{\beta}{\alpha}$ und man hat nach setzen über die Potenzen

$$f\left(\frac{\beta}{n}\right)^n = f(\beta), \text{ ferner } f\left(\beta\right)^{\frac{1}{\alpha}} = f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \text{ oder}$$

$$\left[(1+x)^{\beta}\right]^{\frac{1}{\alpha}} = (1+x)^{\frac{\beta}{\alpha}} = f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \text{ also}$$

$$f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = (1+x)^{\frac{\beta}{\alpha}} = 1 + \frac{\frac{\beta}{\alpha}}{1}x + \frac{\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right)}{1.2}x^2 + \frac{\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right.}{1.2.}$$

$$+ \ldots\ldots$$

Die aufgestellte Entwicklung umfaßt auch die gebroche ponenten.

17) Sind α und β incommensurable Zahlen, so ist sicher, daß man jedesmal eine Zahl γ so wählen kann, Unterschied zwischen $\frac{\beta}{\alpha}$ und γ kleiner wird als jede angebb Größe ϱ, oder daß folgende Gleichung gilt

$$(1+x)^{\frac{\beta}{\alpha}} - (1+x)^{\gamma} = f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) - f(\gamma) \pm \varrho$$

n dieſer Gleichung bezeichnet ϱ zwar eine beſtimmte, aber eine ich kleine Zahl. Weil nun γ ſo nahe, als man immer will,

hinrücken kann, und die Reihe in ihrer Entwicklung plötzliche

ze nicht macht, was ihr Bildungsgeſetz, aus der Combinations- bgeleitet, und die Angaben unter 8) und 12) wohl zur Ge- arthun, ſo kann ϱ ſo klein ſein, daß es von Null nicht ver- t ist, d. h. der Binomialſatz gilt auch für jeden inkommenſurablen rationalen Werth und Exponenten.

3) Imaginäre Ausdrücke laſſen nur inſoferne eine Bedeutung ſ zu, als ſie unter die allgemeinen Geſetze des mathematiſchen sich einreihen laſſen; es iſt demnach einleuchtend, daß das altheorem in dieſer Hinſicht auch für imaginäre Ausdrücke iltigkeit haben muß.

$$(1+x)^{\alpha} = f(\alpha)$$

ieſe Gleichung gilt auch dann, wenn etwa $\alpha = q\sqrt{-1}$ iſt.

1. Beiſpiel.

$$(+x)^3 = a^3 + \frac{3}{1}a^2x + \frac{3(3-1)}{1.2}ax^2 + \frac{3(3-1)(3-2)}{1.2.3}x^3$$

$$= a^3 + 3a^3x + 3ax^2 + x^3$$

2. Beiſpiel.

$$\sqrt{3})^4 = 1^4 + \frac{4}{1}1^3.\sqrt{3} + \frac{4(4-1)}{1.2}1^2.(\sqrt{3})^2 + \frac{4(4-1)(4-2)}{1.2.3}$$

$$1.(\sqrt{3})^3 + \frac{4(4-1)(4-2)(4-3)}{1.2.3.4}(\sqrt{3})^4$$

$$= 1 + 4\sqrt{3} + 6.3 + 4.3\sqrt{3} + 9$$

$$= 28 + 16\sqrt{3}$$

3. Beispiel.

Mittelst des Binomialtheorems lassen sich Wurzeln von unendlichen Reihen darstellen:

$$\sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{\frac{1}{2}}{1}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{1.2}x^2 - \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{1.2}$$

$$x^3 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)}{1.2.3.4}x^4 \ldots\ldots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4$$

4. Beispiel.

Aus ganzen Zahlen oder Brüchen läßt sich mittelst des B satzes eine nte Wurzel ziehen. Die Zahl muß einen r Nenner erhalten, der vor die Wurzel kommt; der Zähler in eine Summe oder Differenz verwandeln, deren erster Thei rational ist. Durch Division erhält die Wurzel die Form

$\sqrt[n]{1 \pm x}$, welche als Binom behandelt werden kann.

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{128}{64}} = \frac{1}{4}\sqrt[3]{125+3} = \frac{5}{4}\sqrt[3]{1+\frac{3}{12}}$$

Soll $\sqrt[3]{2}$ etwa bis zur fünften Dezimale bestimmt werd

$$\sqrt[3]{1+\frac{3}{125}} = \left(1+\frac{3}{125}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{\frac{1}{3}}{1}\cdot\frac{3}{125} + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{1.2}\cdot$$

$$+ \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{1.2.3}\cdot\left(\frac{3}{125}\right)^3 + \ldots.$$

$$= 1 + \frac{1}{125} - \frac{1}{9}\left(\frac{3}{125}\right)^2 + \frac{5}{81}\cdot\left(\frac{3}{125}\right)^3 + \ldots$$

$$= 1 + 0{,}008 + 0{,}000064 + 0{,}00000085 .$$

$$\sqrt[3]{2} = \frac{5}{4}\sqrt[3]{1+\frac{3}{125}} = 1{,}25992.$$

Wie man sieht, kann man leicht sehr rasch convergirende Reihen
ten, wenn man es nicht vorzieht, solche Wurzeln mittelst
thmen zu bestimmen.

§ 13.

Exponentialreihen.

) Wird der Exponent einer Größe variabel, so gibt dies eine
ntialgröße, und geschieht die Entwicklung eines Ausdruckes
ch' variablen Exponenten in einer Reihe, so erhält man eine
ntialreihe. Um vom Binomialtheorem auf Exponentialreihen
ngen, setze man

$$a = 1 + b \text{ und hiernach } a^x = (1+b)^x$$

un kann das Binom nach den früheren Angaben entwickelt
).

$$= + \frac{x}{1} b + \frac{x(x-1)}{1.2} b^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} b^3 + \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{x(x-1)(x-2)\ldots.(x-n+1)}{1.2.3\ldots.n} b^n + \ldots\ldots$$

erden die in den Klammern angezeigten Multiplikationen
n und die gleichen Potenzen von x zusammengenommen, so ist

$$= + \left[\frac{1}{1} b + \frac{-1}{1.2} b^2 + \frac{(-1)(-2)}{1.2.3} b^3 + \ldots\ldots\right.$$

$$\left.\frac{(-1)(-2)(-3)..[-(n-1)]}{1.2.3\ldots n} b^n\right] x + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + ..$$

$$= + \left[b - \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{3} b^3 - \frac{1}{4} b^4 \ldots\ldots \pm \frac{1}{n} b^n\right] x + Bx^2 + Cx^3$$

$$+ Dx^4 + \ldots\ldots$$

Die Ausdrücke B, C, D u. s. w. sind irgend welche von b, deren Zusammensetzung vorerst nicht näher angeg Führt man statt b wieder a ein, so ist $b = a - 1$ und de

$$a^x = 1 + \left[(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \frac{1}{4}(a-1)^4 \right.$$
$$\left. \frac{1}{n}(a-1)^n \right] x + Bx^2 + Cx^3 + \ldots.$$
$$= 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots\ldots$$

2) Nachdem der Ausdruck A als eine Reihe von a ei ist, handelt es sich darum, die Ausdrücke B, C, D u. s. w stimmen, beziehungsweise durch A oder a auszudrücken. Z Zwecke hat man, wenn 2x statt x gesetzt und dieser Ausdru als Exponentialreihe und dann als Potenz entwickelt wird,

$$a^{2x} = 1 + 2Ax + 4Bx^2 + 8Cx^3 + 16Dx^4 + \ldots\ldots$$

$$a^{2x} = (a^x)^2 = (1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots\ldots)^2$$

$$= 1 + 2Ax + \left.\begin{matrix} +2B \\ +A^2 \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} 2C \\ +2AB \end{matrix}\right\} x^3 \left.\begin{matrix} +2D \\ +2AC \\ +B^2 \end{matrix}\right\} x^4 +$$

Durch Comparation der gleichen Ausdrücke erhält ma

$$1 + 2Ax + 4Bx^2 + 8Cx^3 + 16Dx^4 + \ldots = 1 + 2Ax + \ldots$$

$$\left.\begin{matrix} +2C \\ +2AB \end{matrix}\right\} x^3 \left.\begin{matrix} +2D \\ +2AC \\ +B^2 \end{matrix}\right\} x^4 +$$

Die Coeffizienten der gleichen Potenzen von x müssen b gleich sein.

$$A = A$$

$$4B = 2B + A^2, \quad \text{daher } B = \frac{A^2}{1.2},$$

$$8C = 2C + 2AB, \quad \text{„ } C = \frac{A^3}{1.2.3},$$

$$16D = 2D + 2AC + B^2, \quad \text{daher } D = \frac{A^4}{1.2.3.4}$$

Nach dieser Ableitung läßt sich wohl allgemein sagen

$$=1+\frac{A}{1}x+\frac{A^2}{1.2}x^2+\frac{A^3}{1.2.3}x^3+\ldots\frac{A^n}{1.2.3\ldots n}x^n+\ldots$$

Da A eine bestimmte Größe von a ist, so ist diese Reihe nach
3. Beispiel für alle Werthe von x convergent. Es ist $A = f(a)$
ist demnach die Basis der Reihe.

3) Setzt man in dieser Reihe $A = 1$ und nennt den besonderen
der Reihe für diesen Fall e, so ist

$$=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\ldots\frac{x^n}{1.2.3\ldots.n}$$

Reihe für alle Werthe von x bis $x = \pm\infty$ convergent ist.

Aus dieser Gleichung läßt sich der numerische Werth von e
imen, wenn $x = 1$ gesetzt wird: es ist

$$=1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots\ldots$$

$$=2{,}718281828459\ldots\ldots$$

Die Zahl e, welche in der Analysis als Basis der sogenannten
chen Logarithmen bekannt ist, ist also eine Funktion von x
$=f(x)$.

4) Durch Multiplikation zweier solcher Exponentialrei hält man wieder eine Reihe von gleichem Charakter

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \cdots \frac{}{1.2.}$$

$$f(y) = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \cdots \frac{}{1.2.}$$

$$f(x) \,.\, f(y) = N_0 + N_1 + N_2 + N_3 + \ldots\ldots N_n,$$

wobei N_n der Complex aller Glieder ist, in welchen die Sun Exponenten von x und y gleich n ist; also ist

$$N_n = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \frac{y}{1} \cdot \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} + \frac{y^2}{1.2} \cdot \frac{x^{n-}}{1.2.3.}$$

$$+ \cdots\cdots \frac{y^{n-2}}{1.2.3\ldots.(n-2)} \cdot \frac{x^2}{1.2} + \frac{y^{n-1}}{1.2.3\ldots.(n-}$$

$$+ \frac{y^n}{1.2.3\ldots.n}$$

$$= \frac{1}{1.2.3\ldots n}\left[x^n + \frac{n}{1} \cdot x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} y^2 \right.$$

$$\left. \frac{n(n-1)}{1.2} x^2 y^{n-2} + \frac{n}{1} x y^{n-1} + y^n \right]$$

$$= \frac{(x+y)^n}{n!}$$ Demnach ist

$$f(x) \,.\, f(y) = 1 + \frac{x+y}{1} + \frac{(x+y)^2}{1.2} + \frac{(x+y)^3}{1.2.3} + \cdots \frac{(x-}{1.2.}$$

Hiebei erhält man blos das erste Glied nicht, da $n = 0$ Bestimmtes bedeutet, und es ist also oben $N_0 = 1$ bloß der Sy halber eingesetzt. Durch diese Darstellung ist aber ersichtli

$$f(x) \,.\, f(y) = f(x+y), \text{ d. h.}$$

das Produkt zweier solcher Reihen ist wieder eine Reih

nach den Potenzen von $(x + y)$. Durch dieselben Schluß-
igen, wie sie beim binomischen Satze § 12, 13 aufgestellt
det man auch für die Exponentialreihen

$$f(x) \cdot f(y) \cdot f(z) \ldots = f(x + y + z + \ldots)$$

Ist $x = y = z = \ldots$, so wird $f(x)^n = f(nx)$;

$= -x$, so ist $f(x) \cdot f(-x) = f(0) = 1$, also hat man auch

$(nx) \cdot f(-nx) = 1$ oder $f(x)^n \cdot f(-nx) = 1$, daher

$$f(-nx) = f(x)^{-n}, \text{ d. h.}$$

je gilt auch für ganze negative Exponenten.

Es ist ferner $f\left(\frac{p}{n}\right)^n = f(p) = f(1)^p$ daher auch $f\left(\frac{p}{n}\right)$

$$= f(1)^{\frac{p}{n}}, \text{ d. h.}$$

chung gilt auch für gebrochene Zahlen.

Es ist noch der Fall anzuführen, wenn x eine irrationale
. Allein weil die Reihe nach einem ganz bestimmt ausge-
m Gesetze fortschreitet, also Abweichungen durchaus nicht
hließt, so kann man statt x jedesmal einen Bruch nehmen,
ihe an x liegt, als man nur immer will, so daß $x = \frac{m}{n} \pm \varrho$
eine von Null nicht verschiedene Größe sein kann.

§ 14.

Reihen zur Berechnung der Logarithmen.

Werden sämmtliche Zahlen als Potenzen einer einzigen Zahl
, so heißt diese eine Zahl die Grundzahl oder Basis und
nenten der Basis heißen die Logarithmen der Zahlen für
is. Der Logarithmus ist demnach jene Zahl, mit welcher

die Basis potenzirt werden muß, um eine andere Zahl, den manden, zu geben. Der Begriff des Logarithmus liegt folgender Gleichung

$$a^x = y \text{ und daraus } x = \overset{a}{\log} y.$$

Werden beide Seiten der Gleichung $a^x = y$ zu irg Potenz z erhoben, so lassen sich beide Theile nach § 13. ponentialreihen nach z entwickeln, nämlich

$$a^{xz} = y^z \text{ und nach § 13. 2.}$$

$$a^{xz} = 1 + Axz + \frac{A^2}{1.2}(xz)^2 + \ldots\ldots$$

$$y^z = 1 + Bz + \frac{B^2}{1.2}z^2 + \ldots\ldots$$

und diese beiden Reihen müssen gleich sein.

$$1 + Axz + \frac{A^2}{1.2}(xz)^2 + \ldots = 1 + Bz + \frac{B^2}{1.2}z^2$$

Hiebei hat man nach den in § 13 gemachten Angab

$$A = (a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \frac{1}{4}(a-1)$$

Dem analog muß sein

$$B = (y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3 - \frac{1}{4}(y-1)$$

weil aber die beiden Reihen von a^{xz} und y^z nichts andere die Entwicklungen der nämlichen Funktion von z, so e nach dem Satze der unbestimmten Coeffizienten

$$Ax = B \text{ und daraus } x = \frac{B}{A}$$

2) Der Ausdruck $A = (a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-$

r lediglich von der Grundzahl a des Logarithmen-Systems
ig. Bezeichnet man des kürzeren Ausdruckes wegen

$$\frac{1}{(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3-\frac{1}{4}(a-1)^4\ldots.}=M$$

man

$$=\left[(y-1)-\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{1}{3}(y-1)^3-\frac{1}{4}(y-1)^4\ldots..\right]$$

$$=M\left[(y-1)-\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{1}{3}(y-1)^3-\frac{1}{4}(y-1)^4\ldots..\right]$$

ist aber oben angegeben, daß $x=\overset{a}{\log} y$ ist, daher ist

$$=M\left[(y-1)-\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{1}{3}(y-1)^3-\frac{1}{4}(y-1)^4\ldots\right]$$

eine einfache Reihe zu haben, kann man $y+1$ statt y
dadurch erhält man

$$\overset{a}{\log}(1+y)=M\left[y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4\ldots..\right]$$

den Angaben in § 7, Beispiel 3 und § 9, 1 geht her-
diese Reihe convergirt, aber nur für Werthe von y, welche
-1 und $+1$ liegen, diese beiden Werthe von 1 als äußerste
noch mit inbegriffen.

Der Faktor M ist, wie oben angegeben ist, ein bloßer Aus-
Basis a des Systems. Da aber die Basis für ein System
chseln kann, so muß auch M für dasselbe logarithmische
onstant sein. Dieser Faktor heißt deßhalb der Modulus
ms.

Setzt man als einfachsten Fall den, wenn $M=1$ ist, so wird
obige $A=1$; bezeichnet man diese Logarithmen, welche
lichen heißen, mit L, so ist

$$L(1+y)=y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4\ldots..$$

Geht man wieder auf den Ausdruck a zurück, indem man
setzt, so erhält man

$$\mathrm{L}\,a = (a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \frac{1}{4}(a-1)^4 .$$

welche Reihe nichts anderes als der Ausdruck A ist, so
also $A = La$ hat; also ist in der § 13, 2 aufgestel
das A eine bestimmte Größe.

$$a^x = 1 + \frac{La}{1}.x + \frac{(La)^2}{1.2}.x^2 + \frac{(La)^3}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

Wird nun der Modulus $M = 1$, so wird auch $A =$
wird dieser spezielle Werth der Reihe mit e bezeichnet, so

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

woraus sich ergibt, daß e die Basis des einfachsten Lo
systems, nämlich der natürlichen Logarithmen ist, w
$e = 2{,}718281828459 \ldots$ in § 13, 3 bestimmt ist.

5) Setzt man in der unter 2) aufgestellten Reihe y
so erhält man dieselbe Reihe, welche oben unter 4) für
geben ist, so daß man allgemein hat

$$M = \frac{1}{A} = \frac{1}{La}, \text{ d. h.}$$

der Modul eines Logarithmensystems für die Basis a ist gleich d
dividirt durch den natürlichen Logarithmus der Basis dieses

6) Man kann daher von einem logarithmischen S
ein anderes übergehen, wenn man folgende einfache Grund
in Bezug auf den Exponenten der Potenz und den L
beachtet; es sei

$$\overset{a}{\log} u = t, \text{ daher } a^t = u$$

$$\overset{b}{\log} u = v, \quad \text{„} \quad b^v = u$$

$$\overset{a}{\log} b = c, \quad \text{„} \quad a^c = b$$

Daraus folgt, daß $a^t = b^v$ ist, oder $a^t = a^{cv}$.

e Potenzen sind also einander gleich und ebenso sind die
n der Potenzen einander gleich; die Gleichung kann daher
n, wenn die Exponenten einander gleich sind, daher

$$t = cv \text{ oder}$$

$$\overset{a}{\log} u = \overset{a}{\log} b \,.\, \overset{b}{\log} u, \text{ daraus } \overset{b}{\log} u = \frac{\overset{a}{\log} u}{\overset{a}{\log} b}$$

man in dieser Gleichung $a = e$ und $b = 10$, so ist

$$\overset{10}{\log} u = \frac{1}{\overset{e}{\log} 10} \,.\, \overset{e}{\log} u, \text{ d. h.}$$

$\frac{1}{L10}$ ist der Modul des Systems für die Basis 10, ge-

vom System, dessen Basis e ist, oder das System der
n Logarithmen wird auf das dekadische System, dessen
ist, übergeführt.

es sind nun Reihen zunächst zur Berechnung der natürlichen
en aufzustellen; es ist

$$L(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots\ldots$$

statt x gesetzt, so ist

$$L(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \ldots\ldots$$

letztere Reihe von der ersteren subtrahirt, so ist

$$-L(1-x) = L\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 \ldots\right)$$

Nach dieser Reihe können die Logarithmen berechnet werden,
wischen -1 und $+1$ dem Werthe nach gelegen ist. Aller-
diese Reihe noch den Nachtheil, daß sie ziemlich langsam
. Allein es müssen ja nur darnach die Logarithmen der
n berechnet werden, da die der übrigen Zahlen durch Addition

oder Multiplikation gemäß der Bedeutung der Potenz bes
können. Außerdem gibt die Reihe L 1 nicht, welcher 2
natürlichen Logarithmen der ersten 10 Zahlen sind:

ist $x = \frac{1}{3}$, so ist

$$L\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = L2 = 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7+\ldots\ldots\right.$$

$$= 0{,}693147$$

ist $x = \frac{1}{2}$, so ist

$$L\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = L3 = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7+\ldots\ldots\right.$$

$$= 1{,}098612$$

$$L4 = 2L2 = 1{,}386294$$

ist $x = \frac{1}{4}$, so ist

$$L\frac{1+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = L\tfrac{5}{3};\ L5 = L3+2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{4}\right.\right.$$

$$= 1{,}098612 + 0{,}510824$$

$$= 1{,}609436$$

$$L6 = L2 + L3 = 1{,}791759$$

ist $x = \frac{1}{6}$, so ist

$$L\frac{1+\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}} = L\tfrac{7}{5};\ L7 = L5+2\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{6}\right.\right.$$

$$= 1{,}609436 + 0{,}336572$$

$$= 1{,}945908$$

$$L\ 8 = 3L2 = 2{,}079441$$

$$L\ 9 = 2L3 = 2{,}197224$$

$$L10 = L2+L5 = 2{,}302584$$

a aber obige Reihe nicht sehr rasch convergirt, also zur
ı der Logarithmen nach dieser Reihe jedesmal ziemlich
)er nöthig sind, so ist darauf zu sehen, daß die Reihe so
werde, daß sie rasch convergire, also schon wenige Glieder
mung der Logarithmen hinreichen; es sei

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{n+1}{n} \text{ und daraus}$$

$$x=\frac{1}{2n+1}$$

dieser Bestimmung von x hat man als Reihe

$$=2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^5+\ldots\ldots\right)$$

e schon ziemlich rasch convergirt. Setzt man nach einander
3 ....., so erhält man der Reihe nach die Logarithmen
ander folgenden Zahlen, da der Nenner n den Logarithmus
gehenden Zahl jedesmal addirt.

m die letzte Reihe noch mehr convergent zu machen, was
ung der Logarithmen von vielen Stellen zur Vereinfachung
ng nöthig ist, setze man

$$x=\frac{2}{n^3-3n}, \text{ dann wird}$$

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{n^3-3n+2}{n^3-3n-2}=\frac{(n-1)^2(n+2)}{(n+1)^2(n-2)}$$

ch geht $L\frac{1+x}{1-x}$ in folgenden Ausdruck über

$$\frac{n+2)}{n-2)}=2L(n-1)+L(n+2)-2L(n+1)-L(n-2)$$

$$=-L(n-2)+2L(n-1)-2L(n+1)+L(n+2)$$

$$=2\left[\frac{2}{n^3-3n}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{n^3-3n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{2}{n^3-3n}\right)^5\right.$$

$$\left.+\ldots\ldots\right]$$

In dieser Reihe können blos die Werthe von $n = 1$ nicht zugelassen werden, weil die Ausdrücke keinen ä geben und der Bruch $\frac{(n-1)^2 (n+2)}{(n+1)^2 (n-2)}$ in dem einen diese im andern aber unendlich, also in jedem Falle unbestim

I. für $n = 3$ erhält man

$$2L2 - 2L4 + L5 = -2L2 + L5 = 2[\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{9})^3 +$$

II. für $n = 4$ erhält man

$$-L2 + 2L3 - 2L5 + L6 = 3L3 - 2L5 = 2[\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{6})^5 + \ldots .]$$

III. für $n = 5$ erhält man

$$-L3 + 2L4 - 2L6 + L7 = 2L2 - 3L3 + L7 = 2[\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{5}\tfrac{1}{5})^5 + \ldots\ldots .]$$

IV. für $n = 6$ erhält man

$$-L4 + 2L5 - 2L7 + L8 = L2 + 2L5 - 2L7 = 2[\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{9}\tfrac{1}{9})^5 + \ldots\ldots .]$$

Es sind hier vier Gleichungen, aber auch vier nämlich die Logarithmen der ersten vier Primzahlen, aus diesen Gleichungen bestimmt werden können. Die convergirt bereits so rasch, daß das zweite Glied auf die Stellen keinen Einfluß mehr hat. Geht man für n auf Zahlen fort, so entstehen Reihen, deren erstes Glied zur des Logarithmus genügt.

11) Die aus den angegebenen Reihen hervorgeh rithmen sind die natürlichen oder auch die sogenannten h Logarithmen, deren Basis $e = 2{,}718281828459 \ldots$ ist. rithmen werden aber in der gewöhnlichen mathematisch nicht benützt, sondern es sind die sogenannten gemeinen ode Logarithmen, deren Basis 10 ist, allgemein im Gebrauch. lichen Logarithmen werden auf ein künstliches System

ian nach 6) den natürlichen Logarithmus einer Zahl mit dem des Systems multiplizirt. Der Modul für das Brigg'sche ist aber

$$M = \frac{1}{\mathrm{L}10} = \frac{1}{2{,}302584\ldots} = 0{,}434294\ldots.$$

erhält man z. B., wenn man den Brigg'schen Logarithmus bezeichnet,

$$\log 5 = \frac{1}{\mathrm{L}10} \cdot \mathrm{L}5 = M\,\mathrm{L}5 = 0{,}434294 \cdot 1{,}609436$$
$$= 0{,}69897$$

gg'schen Logarithmus von 5 abgeleitet vom natürlichen Loga- von 5.

§ 15.

Das Brigg'sche System.

In diesem in der niederen Analysis allein gebräuchlichen mensystem ist die Basis 10, und demnach sind alle Zahlen enzen von 10 betrachtet, oder die gemeinen Logarithmen Exponenten, mit denen 10 zu potenziren ist, um eine ge- Zahl zu erhalten.

$10^0 = 1$, daher $\log 1 = 0$
$10^1 = 10$, „ $\log 10 = 1$
$10^2 = 100$, „ $\log 100 = 2$
$10^3 = 1000$, „ $\log 1000 = 3$ u. s. w.

ese Exponenten oder die Logarithmen der einzifferigen Zahlen lso zwischen 0 und 1, die der zweizifferigen zwischen 1 und 2, dreizifferigen zwischen 2 und 3 u. s. w. Diese ganzen bilden also die Kennziffer oder Charakteristik, welche angibt, Ziffern bei einer Zahl als Ganze anzusehen sind; die Brüche rithmen sind durch Dezimalbrüche gewöhnlich bis auf sieben angegeben und heißen die Mantisse.

Weil in der Arithmetik die Dezimalbrüche nichts ande als eine Fortsetzung der ganzen Zahlen unter die Einheit, der Logarithmus eines Dezimalbruches negativ sein, oder we den Logarithmus der Dezimalstellen positiv setzt, so wird die teristik negativ sein, weil der Nenner größer ist als der Zä

2) Die Berechnung der Brigg'schen Logarithmen ka auch direkt und bequem mittelst der Kettenbrüche durchführe natürlich nur die Logarithmen der Primzahlen zu bestimm Es sei z. B. $x = \log 7$ oder die Gleichung $10^x = 7$ zu be

Da 7 zwischen 1 und 10 liegt, so muß $x > 0$ uni sein; man setze

$$x = \frac{1}{\alpha}, \text{ wo } \alpha > 1 \text{ ist, daher}$$

$$10^{\frac{1}{\alpha}} = 7 \text{ oder } 7^{\alpha} = 10$$

Der Werth von α liegt zwischen 1 und 2, da $7^1 = 7^2 = 49$ ist; man setze also

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\beta}, \text{ wo } \beta > 1 \text{ ist, daher}$$

$$7^{\alpha} = 7^{1+\frac{1}{\beta}} = 7 \cdot 7^{\frac{1}{\beta}} = 10 \text{ oder } 7^{\frac{1}{\beta}} = \frac{10}{7} = 1{,}4285714$$

Man hat also $7^{\frac{1}{\beta}} = 1{,}4285714 \ldots$ oder $1{,}42857^{\beta} =$

Setzt man $\beta = 5$, so ist $1{,}42857^5 = 5{,}94986 < 7$, aber $\beta = 6$, so ist $1{,}42857^6 = 8{,}49961 > 7$, demnach zwischen 5 und 6 oder es ist

$$\beta = 5 + \frac{1}{\gamma}, \text{ wo } \gamma > 1 \text{ ist.}$$

Wird für β substituirt, so ist

$1{,}4285714^{5-\frac{1}{\gamma}} = 1{,}4285714^5 \cdot 1{,}4285714^{\frac{1}{\gamma}} = 7$

$1{,}4285714^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{7}{1{,}4285714^5} = \frac{7}{5{,}94986} = 1{,}17652\ldots$

$1{,}42857 = 1{,}17652^{\gamma}$

tzt man für γ verschiedene Werthe, so findet man

für $\gamma = 2$ ist $1{,}17652^{\gamma} = 1{,}3841 < 1{,}4285\ldots.$

für $\gamma = 3$ ist $1{,}17652^{\gamma} = 1{,}6284 > 1{,}4285\ldots.$

r Werth von γ liegt also zwischen 2 und 3 oder es ist

$$\gamma = 2 + \frac{1}{\delta},\ \text{wo}\ \delta > 1\ \text{ist.}$$

rd für γ substituirt, so ist

$1{,}17652^{2+\frac{1}{\delta}} = 1{,}17652^2 \cdot 1{,}17652^{\frac{1}{\delta}} = 1{,}42857$

her $1{,}17652^{\frac{1}{\delta}} = \frac{1{,}42857}{1{,}17652^2} = \frac{1{,}42857}{1{,}3841} = 1{,}0331\ldots.$

r $1{,}17652 = 1{,}0321^{\delta}$

rden für δ verschiedene Werthe gesetzt, so findet man

für $\delta = 5$ ist $1{,}0321^{\delta} = 1{,}1711 < 1{,}1765\ldots$

für $\delta = 6$ ist $1{,}0321^{\delta} = 1{,}2087 > 1{,}1765\ldots$

raus folgt der Werth für δ, nämlich

$$\delta = 5 + \frac{1}{\varepsilon},\ \text{wo}\ \varepsilon > 1\ \text{ist;}$$

ähnliche Weise wie oben hat man wieder

$$1{,}0321^{5+\frac{1}{\varepsilon}} = 1{,}0321^{5} \cdot 1{,}0321^{\frac{1}{\varepsilon}} = 1{,}17652\ldots.$$

$$0{,}0321^{\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{1{,}1765}{1{,}0321^{5}} = \frac{1{,}1765}{1{,}1711} = 1{,}0046\ldots.$$

oder $1{,}0321 = 1{,}0046^{\varepsilon}$

Setzt man wieder für ε verschiedene Werthe, so sin daß $\varepsilon > 6$ und $\varepsilon < 7$ ist oder

$$\varepsilon = 6 + \frac{1}{\eta}, \text{ wo } \eta > 1 \text{ ist; u. s. w.}$$

Dadurch bestimmt sich x als Kettenbruch

$$x = \cfrac{1}{\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+\frac{1}{\varepsilon}\ldots.}}}} \qquad = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\frac{1}{6}}}}}.$$

Bestimmt man den fünften Näherungsversuch, so $\frac{371}{439} = 0{,}845102$, welcher Bruch noch um 0,000004 v $= 0{,}845098$ abweicht. Geht man in der Bestimmung de des Kettenbruches weit genug, so erhält man den Logarith jeder nur beliebigen Genauigkeit. Auf diese Weise können d schen Logarithmen für die Primzahlen direkt bestimmt un übrigen Zahlen durch Addition der Logarithmen der Fak funden werden.

§ 16.

Die Logarithmen-Gesetze.

Den Gebrauch der Logarithmen bestimmen die Gesetz b die Basis des Systems und a und c irgend welche Za Potenzen der Basis sind.

1) $\overset{b}{\log} ac = \overset{b}{\log} a + \overset{b}{\log} c$, d. h., ein Produkt wird logarithmirt, n man die nach der gleichen Basis genommenen Logarithmen Faktoren addirt. Umkehrung: Logarithmen nach der gleichen s werden addirt, wenn man das Produkt der Logarithmanden dieser Basis logarithmirt.

$$a = b^x, \text{ daher } \quad x = \overset{b}{\log} a$$

$$c = b^y, \quad \text{„} \quad y = \overset{b}{\log} c$$

$$ac = b^{x+y}, \text{ „ } \quad x + y = \overset{b}{\log} ac$$

$$\text{oder } \overset{b}{\log} ac = \overset{b}{\log} a + \overset{b}{\log} c$$

2) $\overset{b}{\log} \frac{a}{c} = \overset{b}{\log} a - \overset{b}{\log} c$; d. h., ein Quotient wird logarithmirt, n man vom Logarithmus des Dividenden den des Divisors nach gleichen Basis subtrahirt. Umkehrung: Logarithmen mit gleicher s werden von einander subtrahirt, wenn man den Quotienten Logarithmanden nach dieser Basis logarithmirt.

$$a = b^x, \text{ daher } \quad x = \overset{b}{\log} a$$

$$c = b^y, \quad \text{„} \quad y = \overset{b}{\log} c$$

$$\frac{a}{c} = b^{x-y}, \text{ „ } \quad x - y = \overset{b}{\log} \frac{a}{c}$$

$$\text{oder } \overset{b}{\log} \frac{a}{c} = \overset{b}{\log} a - \overset{b}{\log} c.$$

3) $\overset{b}{\log} a^n = n \cdot \overset{b}{\log} a$, d. h. eine Potenz wird logarithmirt, wenn den Logarithmus des Dignanden nach der Basis mit dem onenten multiplizirt. Umkehrung: Eine Zahl wird mit einem rithmus multiplizirt, wenn man die Potenz aus dem Logarithden und der Zahl als Exponenten nach der Basis logarithmirt.

$$a = b^x, \text{ daher } x = \overset{b}{\log} a$$

$$a^n = b^{nx}, \text{ „ } nx = \overset{b}{\log} a^n$$

$$\text{oder } \overset{b}{\log} a^n = n \cdot \overset{c}{\log} a$$

4) $\overset{b}{\log}\sqrt[n]{a} = \frac{\overset{b}{\log} a}{n}$, d. h. eine Wurzel wird logarithmirt, man den Logarithmus des Radikanden nach der Basis durch Radikator dividirt. Umkehrung: Ein Logarithmus wird durch Zahl dividirt, wenn man die Wurzel aus dem Logarithmander dem Divisor als Radikator nach der gleichen Basis logarithmir

$$a = b^x, \qquad \text{daher } x = \overset{b}{\log} a$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^x} = b^{\frac{x}{n}} \quad , \quad \frac{x}{n} = \overset{b}{\log}\sqrt[n]{a}$$

$$\text{oder } \overset{b}{\log}\sqrt[n]{a} = \frac{\overset{b}{\log} a}{n}$$

Zusatz. Der Ausdruck $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^x}$ ist allerdings für Fall nur giltig, wenn die arithmetische Wurzel, also der eine p reelle Werth der Wurzeln, verstanden wird, weil sonst nte W ein vieldeutiger Ausdruck ist.

1. Beispiel.

$$x = (3{,}90451)^2 \frac{\sqrt[5]{(12{,}87532)^3}}{\sqrt[3]{(0{,}79102)^2}}$$

$$\log x = 2 \log 3{,}90451 + \frac{3}{5}\log 12{,}87532 - \frac{2}{3}\log 0{,}79102$$

$$= 1{,}1831330 + \frac{3}{5} . 1{,}1097580 - \frac{2}{3} (0{,}8981875-$$

$$= 1{,}1831330 + 0{,}6658548 - 0{,}9321250 +$$

$$= 1{,}9168628$$

$$x = 82{,}5777.$$

2. Beispiel.

$$x = 8{,}456 \sqrt[5]{\frac{0{,}3967 - 6{,}35\sqrt[4]{(0{,}735806)^3}}{\frac{(2{,}5008)^2}{8{,}3206} + \frac{(1{,}59842)^2}{3\sqrt[3]{\frac{3}{4}}}}}$$

Da Summe und Differenzen unter dem Wurzelzeichen nicht rithmirbar sind, so müssen die einzelnen Theile für sich logarith= werden; zu dem Zwecke sei

$= 8{,}456 \quad ; \quad b = 0{,}3967 \quad ; \quad c = 6{,}35 \sqrt[4]{(0{,}735806)^3}$

$= \frac{(2{,}5008)^2}{8{,}3206} \quad ; \quad e = \frac{(1{,}59842)^2}{3 \sqrt[3]{\frac{3}{4}}}$

Daher ist $x = a \sqrt[5]{\frac{b-c}{d+e}}$

$= \log 6{,}35 + \frac{3}{4} \log 0{,}735806$
$= 0{,}8027737 + \frac{3}{4} (0{,}8667633 - 1)$
$= 0{,}8027737 + 0{,}9000725 - 1$
$= 0{,}7028462$
$= 5{,}04483$

$= 2 \log 2{,}5008 - \log 8{,}3206$
$= 0{,}7961580 - 0{,}9201546$
$= 0{,}8760034 - 1$
$= 0{,}75163$

$= 2 \log 1{,}59842 - \log 1{,}5 - \frac{1}{3} \log 6$
$= 0{,}4073808 - 0{,}1760913 - 0{,}2593838$
$= 0{,}4073808 - 0{,}4354751$
$= 0{,}9719057 - 1$
$= 0{,}93736$

$8{,}456 \sqrt[5]{\frac{0{,}3967 - 5{,}04483}{0{,}75163 + 0{,}93736}}$

$= 8{,}456 \sqrt[5]{\frac{4{,}64813}{1{,}68899}}$

$= \log 8{,}456 + \frac{1}{5} (\log 4{,}64813 - \log 1{,}68899)$
$= 0{,}9271650 + \frac{1}{5} (0{,}6672783 - 0{,}2276270)$
$= 1{,}0150952$
$= 10{,}3537.$

Beiträge

zur

eorie der Maxima und Minima

der einfachen Integrale.

Mit

hmigung der Philosophischen Facultät der Universität Leipzig

als Habilitationsschrift

öffentlich zu vertheidigen

im Saale der Medicinischen Facultät

am 4. December, Vormittags 11 Uhr

von

Adolph Mayer,
Dr. phil.

Leipzig,
Druck von B. G. Teubner.

Herrn

Prof. Dr. Friedrich Julius Richelot

gewidmet.

Vorwort.

Seitdem Jacobi im 17. Bande des Crelle'schen Journales ersten Male andeutete, wie man bei verschwindender erster ation die zweite Variation jedes einfachen, eine abhängige able enthaltenden Integrales auf eine zur Untersuchung ihres ens geschickte Form bringen könne, ist das Problem der ction der zweiten Variation der Gegenstand vieler und beender Arbeiten geworden, welche von verschiedenen Seiten Lösung desselben gelangen. Ich erinnere hier nur an die ndlungen von Spitzer*), Hesse**), Clebsch***) und schitz†). Alle diese Abhandlungen beschäftigen sich aber oder weniger ausschliesslich mit der Umformung der zweiVariation, ohne tiefer auf den eigentlichen Zweck derselben, auf die Aufstellung der Kriterien des Maximums und Minis der einfachen Integrale einzugehen, und man findet im meinen hierüber nur diejenigen Sätze angeführt, welche sich dem Anblick der zweiten Variation in ihrer reducirten Form ttelbar ergeben. Die eigenthümliche Form dieser Sätze nun aber sofort, dass dieselben noch nicht die wahren rien des Maximums und Minimums sein können; sondern ruhen so zu sagen noch unentwickelt in ihnen. In der haben die Kriterien, welche Jacobi††) ohne Beweis ange-

*) Sitzungsberichte der Wiener Akademie vom Jahre 1854, p. 1014.
**) Crelle J. 54, p. 227.
***) Crelle J. 55, p. 254 u. p. 335.
†) Crelle J. 65, p. 26.
††) Crelle J. 17, p. 73. Vgl. auch Jacobi, Vorlesungen über nik, herausgegeben von Clebsch, Berlin 1866, p. 47, 48.

geben hat, eine ganz andere Gestalt. Diese Jacobi'sche
terien sind aber, soviel ich weiss, bisher nur in dem al
fachsten Falle, wo die Function, deren Integral ein Ma
oder Minimum werden soll, bloss eine abhängige Variab
deren ersten Differentialquotienten enthält, wirklich bewiese
den und es scheint sehr schwierig zu sein, die hierbei von J
benutzte Schlussweise auch nur auf die nächst einfache
auszudehnen.

In Folge einer Anregung meines hochverehrten L
Herrn Prof. Richelot, versuchte ich im vorigen Jahre d
terien des Minimums einiger besonderen Integrale zu besti
Ich fand bei diesen Integralen eine merkwürdige Beziehun
schen dem Nenner der Reduction und einer anderen
minante, die in den Jacobi'schen Kriterien eine grosse
spielt. Die Reduction der zweiten Variation enthält eine g
Anzahl willkürlicher Constanten. Es zeigte sich, dass bei j
der Bestimmung dieser Constanten beide Determinanten id
werden. Indem dieser Satz, der sich bald als nicht blo
behandelten, speciellen Problemen eigenthümlich, sonde
allgemein gültig erwies, mit einer wichtigen Bemerkun
bunden wurde, die von Herrn Prof. Richelot herrührt u
der Unmöglichkeit des Verschwindens der zweiten Variation
gewissen Bedingungen handelt, ergab sich schliesslich auf
ganz anderen Wege der Beweis und die Ausdehnung der Ja
schen Kriterien auf den allgemeinen Fall der Variationsre
bei einer unabhängigen Variabeln. Die Ableitung und Aufs
dieser Kriterien ist die Aufgabe, welche sich die vorli
Arbeit gestellt hat. Ich bemerke aber von vornherein, da
selbe keinen Anspruch darauf macht, diese Aufgabe voll
zu absolviren. Es werden vielmehr immerhin noch einige
unerledigt bleiben. So werden sich namentlich gewisse Fä
geben, in denen die Strenge der Schlussweise zum mi
sehr bedenklich wird, und die daher als Ausnahmefälle ers
werden, obgleich man wohl mit ziemlicher Gewissheit anh
darf, dass dieselben in den Sätzen selbst keine Ausn
bilden.

Den Ausgangspunct der Betrachtungen bildet natürl
Reduction der zweiten Variation. Wiewohl nun die hier
züglichen Formeln unmittelbar den Abhandlungen von Cl

n entnommen werden können, so schien es doch sowohl der
tändigkeit, als auch einiger Abweichungen wegen zweck-
ig, diese Reduction wirklich durchzuführen. Es boten sich
u vorzüglich zwei Wege dar, von denen der eine von
sch, der andere von Lipschitz herrührt. Lipschitz
lie Reduction der zweiten Variation nur für solche Probleme
ndelt, in denen keine Bedingungsgleichungen auftreten. Seine
ode lässt sich jedoch leicht auch auf bedingte Probleme aus-
en und zeichnet sich vortheilhaft durch ihre Kürze aus.
n, indem sie die gesuchte Reduction durch einen geschickten
tgriff unmittelbar erhält, tritt bei ihr die wahre Natur des
emes nicht so klar zu Tage, wie bei der Methode von
sch. Ich habe es daher vorgezogen, mich an die letztere
alten. Dabei ist die Rechnung zum grossen Theile durch
sse ersetzt worden, deren Grundidee den Richelot'schen
sungen über Variationsrechnung vom Winter 1864/65 ent-
nen ist.

Die auf diese Weise erhaltene Reductionsformel enthält
nbar eine grosse Menge willkürlicher Constanten zuviel. Es
ht daher die Aufgabe, nachzuweisen, dass diese Constanten
n soviel verschiedenen Verbindungen vorkommen, als will-
he Constanten in die directe Lösung des Problems eingehen
n. Diese Aufgabe ist factisch schon durch die Arbeiten von
sch und Lipschitz gelöst worden. Ich habe versucht,
einer directeren Weise ähnlich zu behandeln, wie sie in
infachsten Fällen von Spitzer und Hesse behandelt wor-
st.

Die willkürlichen Constanten der Reduction sind ferner an
e Bedingungsgleichungen gebunden und es ist bisher nur
ngrundelegung einer besonderen Art von Integrationscon-
n des Urproblems (den s. g. kanonischen Constanten) gezeigt
n, wie man diesen Bedingungsgleichungen Genüge thut.
ann jedoch auch bei jedem beliebigen Systeme der Grund-
nten, wenn auch nicht die allgemeinen, so doch wenigstens
e specielle Werthsysteme der willkürlichen Constanten an-
welche diese Bedingungen identisch erfüllen, und diese
len Werthsysteme sind es gerade, für welche die Identität
eiden oben erwähnten Determinanten eintritt. Indessen
n gewisse Ausnahmefälle möglich zu sein; daher wird es

schliesslich doch nöthig, jene besondere Gattung von Integra
constanten einzuführen und die Resultate von Clebsch zu
zu nehmen.

Nach diesen Vorbereitungen, welche den ersten Thei
Arbeit ausmachen und neben vielem Bekannten auch Ma
enthalten, was, ohne für das Folgende gerade nothwendig zu
doch an und für sich Interesse haben dürfte, werden sodan
zweiten Theile die Kriterien des Maximums und Minimum
einfachen Integrale auf dem oben angedeuteten Wege abge
zunächst nur unter der Voraussetzung, dass die Grenzwerth
Variabeln sämmtlich gegeben seien; auf diesen Fall lassen
aber, wie später gezeigt wird, alle anderen zurückführen.

Der dritte Theil endlich erläutert diese Kriterien an ei
einfachen Beispielen aus der Mechanik, von denen jedoch
eins, dasselbe, welches auch Jacobi betrachtet hat, ausfü
behandelt wird. Für dieses Beispiel, das Integral der kle
Wirkung bei der elliptischen Bewegung eines Planeten, hal
die Kriterien ausserdem noch auf einem zweiten, directen
bewiesen, der demjenigen ganz analog ist, welchen Jaco
dem angegebenen einfachsten Falle eingeschlagen hat. Ac
lässt sich auch das allgemeinere Beispiel des Integrals der kle
Wirkung bei einer beliebigen Centralbewegung behandeln
welches die Kriterien (wenigstens insoweit sich dieselben g
trisch deuten lassen) am Schlusse ohne Beweis angegeben

Leipzig, August 1866.

I.

Reduction der zweiten Variation auf ihre einfachste Form.

§ 1.

ls die allgemeinste Aufgabe der Variationsrechnung bei unabhängigen Variabeln lässt sich bekanntlich, indem man ebsch, Crelle J. 55, p. 336) alle anderen darauf zurück- kann, die folgende betrachten:

s sollen $y_1, y_2 \ldots y_n$ als Functionen von x so be- nt werden, dass das Integral:

$$\ldots\ldots\ldots \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_1', y_2, y_2', \ldots y_n, y_n')\, dx,$$

wie üblich y_n' für $\frac{dy_n}{dx}$ gesetzt worden ist, ein num oder Minimum und zugleich den m Differen- eichungen erster Ordnung:

$$\ldots\ldots \varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = 0, \ldots \varphi_m = 0$$

t werde, wo $m < n$ ist.

e vorliegende Arbeit wird sich daher mit diesem Problem chäftigen haben.

es Problem ist aber so, wie es hier ausgesprochen wurde, icht völlig bestimmt; es wird erst ein bestimmtes, wenn ber die Grenzwerthe der Variabeln gewisse Verfügungen Ich werde mich im Folgenden auf die Betrachtung des sten Falles beschränken, des Falles nämlich, wo die

Grenzen x_0 und x_1, sowie die Grenzwerthe der ctionen y sämmtlich gegeben sind, und nur ga Schlusse (§ 21) einige Bemerkungen über die complici Fälle hinzufügen. Ich nehme überdies an, dass die De nante:

$$(3) \quad \ldots\ldots R = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2\Omega}{\partial y_1' \partial y_1'} & \cdots & \frac{\partial^2\Omega}{\partial y_n' \partial y_1'} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1'} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1'} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2\Omega}{\partial y_1' \partial y_n'} & \cdots & \frac{\partial^2\Omega}{\partial y_n' \partial y_n'} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n'} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n'} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1'} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n'} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1'} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n'} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix},$$

d. i. die Hesse'sche Determinante der Function:

$$(4) \quad \ldots\ldots \Omega = F + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_m \varphi_m$$

in Bezug auf die $n + m$ Variabeln

$$y_1' \; y_2' \ldots y_n' \qquad \lambda_1 \; \lambda_2 \ldots \lambda_m$$

nicht identisch Null sei, eine Voraussetzung, deren Grun sogleich ergeben wird.

§ 2.

Das vorgelegte Problem ist nach der Lagrange'scher tiplicatorentheorie identisch mit dem Folgenden:

Die Functionen y und λ so zu bestimmen, das Integral

$$(5) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots I = \int_{x_0}^{x_1} \Omega \, dx$$

bei gegebenen Grenzwerthen von x, y_1, y_2 . . . . y Maximum oder Minimum werde;

wobei jedoch hinzuzufügen ist, dass bei der Vergle des Variationswerthes dieses Integrals mit den Werthen dasselbe für andere Functionen y und λ erhält, stets nur Functionen y zu berücksichtigen sind, welche den m Bedin gleichungen (2) genügen.

Soll nun das Integral (5) ein Maximum oder Minimum wer- so muss seine erste Variation verschwinden und seine zweite ıtion stets negativ oder stets positiv sein.

Aus der ersten Bedingung ergeben sich die $n + m$ Differen- eichungen

$$\ldots\ldots \frac{\partial \Omega}{\partial y_h} = \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega}{\partial y_h'}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda_k} = \varphi_k = 0.$$

Um zu untersuchen, wie viel willkürliche Constanten die In- tion dieser Gleichungen mit sich bringt, will ich statt der- n zunächst die folgenden Gleichungen betrachten:

$$\ldots\ldots\ldots \frac{\partial \Omega}{\partial y_h} = \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega}{\partial y_h'}, \quad \frac{d\varphi_k}{dx} = 0.$$

$n + m$ Gleichungen sind linear in Bezug auf die $n + m$;en:

$$y_1'', \; y_2'' \ldots y_n'' \qquad \lambda_1' \; \lambda_2' \ldots \lambda_m',$$

in Bezug auf die zweiten Differentialquotienten der y und rsten der λ, und lassen sich in Folge der über die Deter- ıte R gemachten Voraussetzung nach diesen Grössen auf-

Nennt man (y_h'') und (λ_k') die so erhaltenen Werthe von nd λ_k', so kann man demnach die Gleichungen (6*) er- ı durch das System von $2n + m$ simultanen Differential- ungen erster Ordnung:

$$\ldots\ldots \frac{dy_h}{dx} = y_h', \quad \frac{dy_h'}{dx} = (y_h''), \quad \frac{d\lambda_k}{dx} = (\lambda_k').$$

ollständige Integration eines solchen Systems führt aber wie nt $2n + m$ Integrationsconstanten mit sich. Unterwirft man um die Lösungen der Differentialgleichungen (6) zu erhal- die aus dem System (6**) folgenden, $2n + m$ willkürliche ınten enthaltenden Werthe der y und y' den m Bedingungs- ungen (2), welche particuläre Integrale der Differential- ıngen (6*) sind, so erhält man m von x unabhängige Be- ıgsgleichungen zwischen diesen $2n + m$ Constanten, die onach auf $2n$ reduciren.

erade soviel willkürliche Constanten aber sind nöthig, um n Grenzbedingungen zu genügen. Das Problem ist also h und bestimmt. Es würde dagegen im Allgemeinen über- mt sein, wenn die Determinante R identisch Null wäre.

Wir werden nun immer voraussetzen, dass man die chungen (6) integrirt habe und wollen mit:

(7) . . . . . $y_h = [y_h], \quad \lambda_k = [\lambda_k]$

die allgemeinen Lösungen dieser Differentialgleichungen be nen, wobei also $[y_h]$ und $[\lambda_k]$ Functionen von x und v willkürlichen Constanten sind. Diese willkürlichen Cons werde ich je nach Bequemlichkeit mit

$$a_1, a_2 \ldots a_{2n}$$

oder mit

$$a_1, a_2 \ldots a_n, \quad \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$$

bezeichnen, sodass also $a_{n+h} = \alpha_h$ ist. Dieselben sind in un Falle so zu bestimmen, dass die n Functionen $[y_h]$ für x und $x = x_1$ die gegebenen Werthe y_{h0} und y_{h1} annehmen

Diese Bestimmung kann nur für ganz besondere Werth Grenzen und der Grenzwerthe unmöglich werden. Denn kann die Grössen λ aus den Differentialgleichungen (6) volls eliminiren und daher die Functionen $[y_h]$ auch betrachte die vollständigen Lösungen eines Systems von n Differ gleichungen zweiter Ordnung, welche nur zwischen x, y_1, y_2 bestehen*). Es ist aber die charakteristische Eigenschaf vollständigen Lösungen eines solchen Systems, dass sich $2n$ Integrationsconstanten ausdrücken lassen müssen durc Anfangs- und Endwerthe der y.

Der Deutlichkeit wegen soll im Folgenden durch Einschlie in eckige Klammern immer angedeutet werden, dass in der

---

*) Die Elimination der λ lässt sich auf folgende Weise be stelligen. Man bestimmt aus den n Gleichungen

$$(A) \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial y_h} = \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega}{\partial y_h'}$$

die n Grössen y' als Functionen von x, der y, y'', λ und λ', setzt Werthe in die $2m$ Gleichungen

$$\frac{d\varphi_k}{dx} = 0, \quad \varphi_k = 0$$

ein, drückt sodann vermittelst dieser Gleichungen die $2m$ Grös und λ' durch die y, y'' und x aus und substituirt schliesslich Werthe rückwärts in die Gleichungen (A). Das so erhaltene S Differentialgleichungen muss bei unserer Voraussetzung von de Ordnung sein, weil es aequivalent sein muss dem System (6).

lossenen Ausdrücken für die y und λ die Lösungen (7) zu n sind, in welchen wir nun die Constanten a als bestimmte, ı die Grenzwerthe gegebene Grössen zu betrachten haben.

In den meisten Fällen, wo die Differentialgleichungen (6) wirklich integriren lassen, gewährt eine besondere Integramethode grossen Vortheil. Diese Methode, die zuerst von lton bei mechanischen Problemen entdeckt und später von i sehr vervollkommnet wurde, beruht darauf, dass sich die ration der Differentialgleichungen (6) zurückführen lässt auf ösung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, e folgendermassen erhalten wird:

Man setzt allgemein:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} = \frac{\partial V}{\partial y_i}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = F - \sum_1^n y_h' \frac{\partial V}{\partial y_h}$$

eliminirt aus diesen $n+1$ Gleichungen mit Hülfe der ichungen (2) die $n+m$ Grössen:

$$y_1', y_2' \ldots y_n', \quad \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_m.$$

Elimination kann in Folge der über die Determinante R hten Voraussetzung nie unmöglich werden und ergiebt eine le Differentialgleichung erster Ordnung zwischen der unbeen Function V und den Variabeln $x, y_1, y_2 \ldots y_n$, die lton'sche partielle Differentialgleichung des Pros $\delta I = 0$.

ennt man nun eine vollständige Lösung dieser Differentialng, d. h. kennt man eine Function V von $x, y_1, y_2 \ldots y_n$ willkürlichen Constanten $a_1, a_2 \ldots a_n$, von denen keine ldditiv vorkommt, welche dieser Differentialgleichung genügt, l:

$$\ldots \frac{\partial V}{\partial y_i} = \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}, \qquad (9) \ldots \frac{\partial V}{\partial a_i} = \alpha_i$$

anonischen Integralgleichungen der Differentialıungen (6) und die aus ihnen folgenden Werthe der y die allgemeinen Lösungen dieser Differentialgleichungen.

e n Constanten $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ kann man nach dem Vor-

gange von Jacobi füglich die zu $a_1, a_2 \ldots a_n$ gehörigen k
nischen Constanten dieser Lösungen nennen.

Solche kanonische Constanten lassen sich auch dann
einführen, wenn man die Gleichungen (6) auf irgend einen
deren Wege integrirt hat.

Man findet einen sehr eleganten Beweis dieser Angab
der Abhandlung von Clebsch, Crelle J. 55, p. 337 — 340.

Wir werden in der Folge sehen, dass die Zugrundele
kanonischer Constanten für gewisse Untersuchungen von gr
Vortheil ist. Vorläufig aber werden wir unter

$$a_1, a_2 \ldots a_n, a_{n+1} \ldots a_{2n}$$

resp. $$a_1, a_2 \ldots a_n, \alpha_1 \ldots \alpha_n$$

irgend ein beliebiges vollständiges System Integrationsconst
der Lösungen (7) verstehen.

§ 3.

Hat man somit diejenigen Functionen y gefunden, für w
die erste Variation δI verschwindet, so kommt es nun zw
darauf an, das Zeichen der zweiten Variation, d. i. des Int

$$(10) \ldots \ldots \ldots \ldots \delta^2 I = \int_{x_0}^{x_1} \Omega_2 \, dx$$

zu untersuchen, worin Ω_2 diejenige homogene Function zw
Ordnung der $2n + m$ Variabeln z, $z' = \frac{dz}{dx}$ und μ bed
welche entsteht, wenn man in:

$$\Omega = F + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots \lambda_m \varphi_m$$

an die Stelle der Functionen y und λ die Functionen:

$$[y] + \varepsilon z, \; [\lambda] + \varepsilon \mu$$

treten lässt und in der Entwickelung nach Potenzen von
Coefficienten von ε^2 nimmt, also:

$$(11) \; 2\Omega_2 = 2 \sum_1^m{}_k \mu_k \sum_1^n{}_h \left\{ \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_h} \right] z_h + \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_h'} \right] z_h' \right\}$$

$$+ \sum_1^n{}_h \sum_1^n{}_i \left\{ \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h \partial y_i} \right] z_h z_i + 2 \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h \partial y_i'} \right] z_h z_i' + \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h' \partial y_i'} \right] z_i' \right.$$

Bei dieser Untersuchung hat man unter den z und μ willkürliche, halb der Grenzen endlich und stetig bleibende Functionen zu verstehen. Jedoch ist die Willkürlichkeit dieser Funen keine unbeschränkte. Da nämlich nur solche Functionen Rechnung zu bringen sind, welche den m Bedingungsgleien (2) genügen und in den beiden Grenzen gegebene Werthe men, so sind auch nur solche Functionen z zu berücksich- welche den m aus (2) entspringenden Bedingungsglei-en:

$$\cdots \frac{\partial \Omega_2}{\partial \mu_k} \equiv \sum_1^n{}_h \left\{ \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_h}\right] z_h + \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_h'}\right] z_h' \right\} = 0$$

en und in den beiden Grenzen verschwinden.

Man sieht, dass man in Folge dieser Bedingungsgleichungen lieder der Function Ω_2, welche die Variationen μ enthalten, ganz weglassen kann. Es ist jedoch der folgenden Transionen wegen vortheilhaft, sie beizubehalten.

Wir müssen demnach jetzt untersuchen, ob das Integral (10) positiv oder stets negativ bleibt für alle beliebigen, zwischen renzen x_0 und x_1 endlich und stetig bleibenden Functionen z, e den m Bedingungsgleichungen (12) genügen und in den Grenzen verschwinden. Ist dies der Fall, so machen die e (7) der y das Integral (1) mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen (2) zu einem wirklichen Maximum oder um. Kann dagegen die zweite Variation ihr Zeichen ändern, let weder ein Maximum, noch ein Minimum statt.

§ 4.

m diese Untersuchung anstellen zu können, ist es im Allen nöthig, die zweite Variation auf eine einfachere Form ngen. Wir werden sehen, dass man die Function Ω_2 darkann als ein Aggregat von 3 Functionen, einer homogenen on zweiter Ordnung A von nur n Argumenten $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$, lineare Functionen der z und ihrer Differentialquotienten em Differentialquotienten einer homogenen Function zweiter ng B der z, und endlich einer Function, welche durch die ungsgleichungen (12) identisch verschwindet. Kann man überdies so einrichten, dass diese Bedingungsgleichungen

in lineare Bedingungsgleichungen zwischen den ω übergehe hat man die genannte Aufgabe auf die weit einfachere zu geführt, das Zeichen des Integrals

$$\delta^2 I = \int_{x_0}^{x_1} A\,dx$$

zu untersuchen, wenn zwischen den n Argumenten der Fu A m lineare Bedingungsgleichungen bestehen.

Ehe wir jedoch an diese Reduction der zweiten Var auf ihre einfachste Form gehen, wollen wir zuvor eine an einfachere Umformung der zweiten Variation ableiten, die später von grossem Nutzen sein wird.

Die Function Ω_2 ist homogen und von der zweiten Ord in Bezug auf die $2n + m$ Variabeln z, z', μ. Daher ist tisch:

$$2\Omega_2 = \sum_1^n{}_h \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial z_h} z_h + \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_h'} z_h' \right) + \sum_1^m{}_k \frac{\partial \Omega_2}{\partial \mu_k} \mu_k.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung lässt sich aber also schre

$$\sum_1^n{}_h \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial z_h} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_h'} \right) z_h + \frac{d}{dx} \sum_1^n{}_h \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_h'} z_h + \sum_1^m{}_k \frac{\partial \Omega_2}{\partial \mu_k} \mu_k$$

Integrirt man nun zwischen den Grenzen x_0 und x_1, so man mit Rücksicht darauf, dass die Variationen z den Beding gleichungen (12) genügen und in den beiden Grenzen versch den sollen, die folgende erste Umformung der zweiten Varia

$$(13) \quad \ldots \quad \delta^2 I = \tfrac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} dx \sum_1^n{}_h \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial z_h} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_h'} \right) z_h.$$

§ 5.

Bei weitem schwieriger ist die Reduction der zweiten V tion auf ihre einfachste Form. Sie verlangt, wie aus dem sagten leicht erhellt, dass man die Function Ω_2 auf die bringe:

$$(14) \quad \ldots \quad \Omega_2 = A + \frac{dB}{dx} + \sum_1^m{}_k (\Psi_k + \mu_k) \frac{\partial \Omega_2}{\partial \mu_k},$$

worin:

$$\ldots 2A = \sum_{1}^{n}\sum_{1}^{n}\left[\frac{\partial^2\Omega}{\partial y_\varrho' \partial y_\sigma'}\right]\omega_\varrho\,\omega_\sigma$$

$$\ldots 2B = \sum_{1}^{n}\sum_{1}^{n}\beta_{hi}z_h z_i$$

$$\ldots \Psi_k = C_1^{\,k}z_1 + C_2^{\,k}z_2 + \ldots C_n^{\,k}z_n$$

$$\ldots \omega_\varrho = \frac{dz_\varrho}{dx} + \alpha_1^{\,\varrho}z_1 + \alpha_2^{\,\varrho}z_2 + \ldots \alpha_n^{\,\varrho}z_n$$

während gleichzeitig die Functionen:

$$\ldots\ldots \frac{\partial\Omega_2}{\partial\mu_k} = \sum_{1}^{n}\left\{\left[\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_h}\right]z_h + \left[\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_h'}\right]z_h'\right\}$$

gehen sollen in:

$$\ldots\ldots\ldots \frac{\partial\Omega_2}{\partial\mu_k} = \sum_{1}^{n}\left[\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_\varrho'}\right]\omega_\varrho.$$

überzeugt sich zunächst leicht, dass das vorliegende Transtionsproblem möglich und bestimmt ist. Denn man hat die:

$\frac{n(n+1)}{2}$ unbekannten Functionen β_{hi}

$n \cdot m$ „ „ $C_i^{\,k}$

und die n^2 „ „ $\alpha_i^{\,\varrho}$,

anzen also über:

$$\frac{n(n+1)}{2} + nm + n^2$$

en zu verfügen und mit Weglassung der Identitäten ergeben us der Gleichung (14) $n^2 + \frac{n(n+1)}{2}$ und aus den m Gleien (20) $n \cdot m$ Gleichungen. Man hat also gerade soviel ungen als Unbekannte.

ersuchen wir, um einen näheren Einblick in die Natur des ms zu gewinnen, dasselbe direct anzugreifen.

us dem Ansatz (14) erhalten wir durch Differentiation nach Gleichung:

$$\sum_1^n{}_i \left\{ \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h \partial y_i}\right] z_i + \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h \partial y_i'}\right] z_i' \right\} =$$

$$= \sum_1^n{}_\varrho \sum_1^n{}_\sigma \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_\varrho' \partial y_\sigma'}\right] \alpha_h^{\varrho} \omega_\sigma + \frac{d}{dx} \sum_1^n{}_i \beta_{hi} z_i$$

$$+ \sum_1^m{}_k \left\{ (\mu_k + \Psi_k) \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_h}\right] + C_h{}^k \frac{\partial \Omega_2}{\partial \mu_k} \right\}$$

und hieraus durch Differentiation einmal nach z_i und e
nach z_σ':

$$\left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h \partial y_i}\right] = \sum_1^n{}_\varrho \sum_1^n{}_\sigma \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_\varrho' \partial y_\sigma'}\right] \alpha_h^{\varrho} \alpha_i^{\sigma} + \frac{d\beta_{hi}}{dx}$$

$$+ \sum_1^m{}_k \left\{ C_i{}^k \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_h}\right] + \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i}\right] C_h{}^k \right\}$$

$$\left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h \partial y_\sigma'}\right] = \sum_1^n{}_\varrho \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_\varrho' \partial y_\sigma'}\right] \alpha_h^{\varrho} + \beta_{h\sigma} + \sum_1^m{}_k \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_\sigma'}\right] C_h{}^k.$$

Die Verbindung dieser beiden Gleichungen liefert:

$$\left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h \partial y_i}\right] - \frac{d\beta_{hi}}{dx} = \sum_1^n{}_\sigma \left\{ \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h \partial y_\sigma'}\right] - \beta_{h\sigma} \right\} \alpha_i^{\sigma}$$

$$+ \sum_1^m{}_k \left\{ C_i{}^k \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_h}\right] + C_h{}^k \left(\left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i}\right] - \sum_1^n{}_\sigma \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_\sigma'}\right] \alpha \right.\right.$$

Durch Einsetzung der Werthe (18) ergeben sich aber aus
Gleichungen (20) die $n \,.\, m$ Gleichungen:

$$\left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i}\right] = \sum_1^n{}_\sigma \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_\sigma'}\right] \alpha_i^{\sigma}.$$

Hiernach lässt sich die vorhergehende Gleichung auch so schre

$$(21) \quad \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h \partial y_i}\right] - \frac{d\beta_{hi}}{dx} = \sum_1^n{}_\sigma \left\{ \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h \partial y_\sigma'}\right] - \beta_{h\sigma} \right\} \alpha_i^{\sigma}$$

$$+ \sum_1^m{}_k C_i{}^k \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_h}\right].$$

Aus den $n + m$ Gleichungen:

$$\left[\frac{\partial^2\Omega}{\partial y_i \partial y_\varrho'}\right] - \beta_{i\varrho} = \sum_1^n{}_\sigma \left[\frac{\partial^2\Omega}{\partial y_\sigma' \partial y_\varrho'}\right] \alpha_i^\sigma + \sum_1^m{}_k C_i^k \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_\varrho'}\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i}\right] = \sum_1^n{}_\sigma \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_\sigma'}\right] \alpha_i^\sigma,$$

nen $\varrho = 1, 2 \ldots n$, $k = 1, 2 \ldots m$ ist, kann man nun die m linear in dieselben eingehenden Grössen

$$\alpha_i^1, \alpha_i^2 \ldots \alpha_i^n, \; C_i^1, \; C_i^2 \ldots C_i^m$$

amen als Functionen der $\beta_{i\varrho}$. Denn da die Determinante R Null ist, so kann auch die Determinante $[R]$, welche aus entsteht, wenn man darin für die y und λ die Lösungen nführt, nicht identisch verschwinden, so lange man die $2n$ anten a jener Lösungen willkürlich lässt. Nun sind aller- diese Constanten hier nicht mehr als willkürliche Grössen trachten; sie haben vielmehr bestimmte, durch die Grenz- e gegebene Werthe. Es könnte daher sehr wohl sein, dass ner gewissen, besonderen Wahl der Grenzwerthe oder der anten a diese Determinante Null würde. Es versteht sich von selbst, dass wir von alle den speciellen Ausnahmefällen en, die nur durch besondere Ausnahmewerthe dieser Con- n hervorgebracht werden können, m. a. W., dass wir die werthe gewissermassen selbst als willkürliche Grössen be- en. Unter dieser Voraussetzung kann die Determinante $[R]$ dann nicht identisch verschwinden, wenn wir in ihr den lichen Constanten die aus den Grenzbedingungen folgenden e geben, und daher lassen sich die Gleichungen (22), (23) den Grössen α_i^σ und C_i^k auflösen. Die Substitution ihrer e in die Gleichung (21) liefert eine Gleichung, die von un- nten Grössen nur noch die β enthält, und die, wie man erkennt, ungeändert bleibt, wenn man in ihr die Indices i mit einander vertauscht. Indem man daher in dieser ung für h und i der Reihe nach alle ganzen Zahlen von n setzt, erhält man $\frac{n(n+1)}{2}$ simultane Differentialgleichun- ster Ordnung zur Bestimmung der $\frac{n(n+1)}{2}$ Functionen β, allgemeine Lösungen $\frac{n(n+1)}{2}$ willkürliche Constanten ent- Hat man diese Gleichungen integrirt, so ergeben sich

die $n^2 + nm$ Grössen α_i^h und C_i^k aus den $n^2 + nm$, in] auf dieselben linearen Gleichungen (21) und (22) ohne Integr Man sieht hieraus, dass die allgemeine Lösung des T formationsproblemes (14), (20) nicht mehr als $\frac{n(}{}$ willkürliche Constanten enthalten kann.

§ 6.

Allein die Differentialgleichungen, aus denen man die Fu nen β zu bestimmen hat, sind nicht linear, und daher is Problem auf diese directe Weise angegriffen nicht lösbar. müssen desshalb einen anderen indirecten Weg einschlagen

Wir gehen zu diesem Ende zurück zu den Differe gleichungen des Problems $\delta I = 0$:

$$(b) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y_h} = \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega}{\partial y_h'}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda_k} = 0.$$

Denkt man sich in diesen Gleichungen die Lösungen $[y$ $[\lambda]$ eingeführt, so werden sie identisch erfüllt. Differentiir dieselben unter dieser Voraussetzung nach irgend einer Const a der Lösungen, so erhält man demnach wiederum iden Gleichungen. Diese letzteren Gleichungen stellen sich nun wie man leicht sieht, wenn man zur Abkürzung

$$\frac{\partial [y_h]}{\partial a} = u_h, \quad \frac{\partial [\lambda_k]}{\partial a} = r_k$$

setzt und unter $\Omega_2{}^a$ diejenige Function der u, $\frac{du}{dx}$ und r vere die aus Ω_2 durch die Substitutionen:

$$z_1 = u_1, \; z_2 = u_2, \; \ldots \; z_n = u_n$$
$$\mu_1 = r_1, \; \mu_2 = r_2, \; \ldots \; \mu_m = r_m$$

hervorgeht, also dar:

$$\frac{\partial \Omega_2{}^a}{\partial u_h} = \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega_2{}^a}{\partial \frac{du_h}{dx}}, \quad \frac{\partial \Omega_2{}^a}{\partial r_k} = 0.$$

Hieraus folgt, dass diese Werthe der z und μ den Differe gleichungen:

$$(24) \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_h} = \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega_2}{\partial z_h'}, \quad \frac{\partial \Omega_2}{\partial \mu_k} = 0$$

;en, welche Gleichungen nichts anderes sind, als die Diffe-
ılgleichungen des Problems, die Functionen z und μ so zu
nmen, dass die zweite Variation $\delta^2 I$ selbst ein Maximum oder
ıum werde.

Iat man also die Differentialgleichungen des Urproblems
irt, so hat man damit zugleich auch die Lösungen der
entialgleichungen (24) gefunden und man sieht, da das Sy-
(24) linear und wegen der über $[R]$ gemachten Voraus-
ıg von derselben Ordnung ist wie die Differentialgleichungen
ass die vollständigen Lösungen desselben sich also darstellen:

$$z_i = \sum_1^{2n}{}_h \gamma_h \frac{\partial [y_i]}{\partial a_h}, \quad \mu_k = \sum_1^{2n}{}_h \gamma_h \frac{\partial [\lambda_k]}{\partial a_h},$$

die γ willkürliche Constanten bedeuten.

ieser wichtige Satz macht es nun möglich, das ganze Trans-
ionsproblem ohne eine neue Integration zu lösen.

Vir wissen, dass es möglich ist, die Unbekannten des Pro-
so zu bestimmen, dass die Gleichungen (14) und (20)
ch erfüllt werden und dass sich aus dieser Aufgabe gerade
viel Gleichungen ergeben, als Unbekannte vorhanden sind.
oblem wird daher gelöst sein, sobald es gelingt, aus (14)
0) solche Gleichungen zu folgern, aus denen sich die
lichen Unbekannten bestimmen lassen.

ifferentiiren wir nun die Gleichung

$$\ldots \quad \Omega_2 = A + \frac{dB}{dx} + \sum_1^m{}_k (\mu_k + \Psi_k) \frac{\partial \Omega_2}{\partial \mu_k}$$

nach z_i und einmal nach z_i', so erhalten wir die beiden
ngen:

$$\frac{\Omega_2}{z_i} = \frac{\partial A}{\partial z_i} + \frac{d}{dx}\frac{\partial B}{\partial z_i} + \sum_1^m{}_k \left\{ C_i^k \frac{\partial \Omega_2}{\partial \mu_k} + (\mu_k + \Psi_k) \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i}\right] \right\}$$

$$\frac{\Omega_2}{z_i'} = \frac{\partial A}{\partial z_i'} + \frac{\partial B}{\partial z_i} + \sum_1^m{}_k (\mu_k + \Psi_k) \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'}\right].$$

s diesen beiden Gleichungen folgt, wenn man die zweite
differentiirt und sodann von der ersteren abzieht:

$$(26)\quad \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega_2}{\partial z_i'} = \frac{\partial A}{\partial z_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial A}{\partial z_i'}$$

$$+ \sum_1^m{}_k \left\{ C_i{}^k \frac{\partial \Omega_2}{\partial \mu_k} + (\mu_k + \Psi_k)\left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i}\right] - \frac{d(\mu_k + \Psi_k)\left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'}\right]}{dx} \right.$$

Solcher Gleichungen hat man n für $i = 1, 2, \ldots n$. S
sind die Integrabilitätsbedingungen für den Ausdruck:

$$\frac{dB}{dx} = \Omega_2 - A - \sum_1^m{}_k (\mu_k + \Psi_k)\frac{\partial \Omega_2}{\partial \mu_k}.$$

Es folgt aus ihnen, dass jedes System Lösungen der
rentialgleichungen (24) gleichzeitig ein System Lösungen
Differentialgleichungen:

$$(27)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial z_i} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial A}{\partial z_i'} + \displaystyle\sum_1^m{}_k \left\{ (\mu_k + \Psi_k)\left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i}\right] - \frac{d(\mu_k + \Psi_k)\left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'}\right]}{dx} \right. = \\ \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial \mu_k} = 0 \end{cases}$$

und umgekehrt jedes System Lösungen dieser letzteren Differe
gleichungen gleichzeitig auch ein System Lösungen der Glei
gen (24) sein muss.

Da nun aber nach (15) und (20) A und die $\frac{\partial \Omega_2}{\partial \mu_k}$ ganz
mogene Functionen der n Grössen ω sein sollen, so ergiebt
ein System Lösungen der Gleichungen (27) aus den n
Gleichungen:

$$(28)\quad \begin{cases} \omega_1 = 0, \ \omega_2 = 0, \quad \ldots \ \omega_n = 0 \\ \mu_1 + \Psi_1 = 0, \ \mu_2 + \Psi_2 = 0, \ \ldots \ \mu_m + \Psi_m = 0 \end{cases}$$

von denen die n ersten lineare Differentialgleichungen
Ordnung, die letzten endliche Gleichungen sind.

Umgekehrt müssen sich also in jedem System allgem
Lösungen der Gleichungen (24) die $2n$ willkürlichen Const
so bestimmen lassen, dass diese Lösungen gleichzeitig auch
sungen der Gleichungen (28) werden, und zwar muss die
die n ersten Gleichungen (28) lineare Differentialgleichungen
Ordnung sind, also n Systeme particulärer Lösungen zu
auf n verschiedene Weisen möglich sein.

Es seien diese n Systeme particulärer Lösungen:

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = u_1^{\sigma},\ z_2 = u_2^{\sigma},\ \ldots\ z_n = u_n^{\sigma} \\ \mu_1 = r_1^{\sigma},\ \mu_2 = r_2^{\sigma},\ \ldots\ \mu_m = r_m^{\sigma} \end{array}\right\}\ \sigma = 1,\ 2,\ \ldots\ n,$$

t man also [vgl. (18) und (17)]:

$$\ldots \frac{du_\varrho{}^{\sigma}}{dx} + a_1{}^{\varrho}\, u_1{}^{\sigma} + \alpha_2{}^{\varrho}\, u_2{}^{\sigma} + \ldots\ \alpha_n{}^{\varrho}\, u_n{}^{\sigma} = 0$$

$$\ldots\ r_k{}^{\sigma} + C_1{}^{k} u_1{}^{\sigma} + C_2{}^{k} u_2{}^{\sigma} + \ldots\ C_n{}^{k} u_n{}^{\sigma} = 0.$$

Kennt man daher diese n Systeme particulärer Lösungen, an man zunächst aus den n^2 Gleichungen (29) die n^2 Grössen aus den $n\,m$ Gleichungen (30) die $n\,m$ Grössen C bestimmen. nan aber die Werthe der α und C gefunden, so braucht lieselben nur in die Gleichungen (22) einzusetzen, um daraus die Werthe der Functionen β zu erhalten.

Das ganze Transformationsproblem ist somit gelöst, sobald ingt, die Bedingungen zu finden, welche zwischen den $2n^2$ nten $\gamma_h{}^{\sigma}$ von n Systemen allgemeiner Lösungen:

$$\ldots\ u_i{}^{\sigma} = \sum_1^{2n}{}_h\, \gamma_h{}^{\sigma} \frac{\partial [y_i]}{\partial a_h},\quad r_k{}^{\sigma} = \sum_1^{2n}{}_h\, \gamma_h{}^{\sigma} \frac{\partial [\lambda_k]}{\partial a_h}$$

fferentialgleichungen (24) stattfinden müssen, damit diese gen gleichzeitig auch Lösungen der Gleichungen (28) seien.

m diese Bedingungen zu ermitteln, gehen wir zurück Gleichungen (25). Setzen wir in denselben für die z und nd welche Lösungen:

$$z_i = u_i{}^{\sigma},\ \mu_k = r_k{}^{\sigma}$$

eichungen (28) und bezeichnen mit $\Omega_2{}^{\sigma}$ und B^{σ} die Werthe, die Functionen Ω_2 und B durch diese Substitutionen an-n, so erhalten wir:

$$\ldots\ldots\ldots\ \frac{\partial \Omega_2{}^{\sigma}}{\partial \frac{du_i{}^{\sigma}}{dx}} = \frac{\partial B^{\sigma}}{\partial u_i{}^{\sigma}}.$$

s muss demnach möglich sein, in n allgemeinen Lösungen eichungen (24) die $2n^2$ willkürlichen Constanten so zu be-n, dass den n^2 Gleichungen (32) genügt werden kann durch $\frac{+1)}{2}$ Functionen:

$$\beta_{ih} = \beta_{hi}.$$

t man umgekehrt diese n Systeme particulärer Lösungen eichungen (24) ermittelt, und sodann aus den Gleichungen Functionen β bestimmt, so ist jedes dieser Systeme zu-

gleich ein System Lösungen der Gleichungen (28). Denn jedes dieser Systeme gleichzeitig den Gleichungen (24) und Gleichungen

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial z_i'} = \frac{\partial B}{\partial z_i}$$

genügt, so muss es in Folge der identischen Gleichungen zugleich auch den $n + m$ Gleichungen genügen:

$$\frac{\partial A}{\partial z_i'} + \sum_1^m{}_k (\mu_k + \Psi_k) \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'}\right] = 0$$

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial \mu_k} = 0.$$

Setzt man demnach zur Abkürzung:

$$\mu_k + \Psi_k = q_k,$$

so muss jedes der in Rede stehenden Systeme die $n + m$ chungen erfüllen:

$$0 = \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_1' \partial y_1'}\right] \omega_1 + \cdots \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_n' \partial y_1'}\right] \omega_n + \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1'}\right] q_1 + \cdots \left[\frac{\partial \varphi_n}{\partial y_1'}\right]$$

. . . . . .

$$0 = \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_1' \partial y_n'}\right] \omega_1 + \cdots \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_n' \partial y_n'}\right] \omega_n + \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n'}\right] q_1 + \cdots \left[\frac{\partial \varphi_n}{\partial y_n'}\right]$$

$$0 = \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1'}\right] \omega_1 + \cdots \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n'}\right] \omega_n$$

. . . . . .

$$0 = \left[\frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1'}\right] \omega_1 + \cdots \left[\frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n'}\right] \omega_n.$$

Da nun nach Voraussetzung die Determinante dieser Gleichu $[R]$ nicht identisch Null sein soll, so können diese Gleichu nicht anders bestehen, als indem sämmtliche ω und q versch den, d. h. eben es muss jedes der genannten Systeme die chungen (28) identisch erfüllen.

Die Aufgabe, die Bedingungen zu finden, welche zwi den $2n^2$ Constanten von n Systemen Lösungen der Gleichu (24) bestehen müssen, damit diese Lösungen zugleich auch Gleichungen (28) erfüllen, ist demnach auf die zurückgeh die Bedingungen zu finden, unter welchen man den n^2 Gleichu (32) genügen kann durch die $\frac{n(n+1)}{2}$ Functionen $\beta_{hi} = \beta_{ih}$

us den Gleichungen:

$$\ldots \quad \beta_{1i}\, u_1^{\sigma} + \beta_{2i}\, u_2^{\sigma} + \ldots \beta_{ni}\, u_n^{\sigma} = \frac{\partial \Omega_2^{\sigma}}{\partial \frac{du_i^{\sigma}}{dx}}$$

t sich nun, wenn wir mit

$$\ldots\ldots U = \Sigma \pm u_1^{1}\, u_2^{2} \ldots u_n^{n}$$

terminante der n^2 Functionen u bezeichnen:

$$U\beta_{hi} = \sum_1^n{}^{\sigma} \frac{\partial U}{\partial u_h^{\sigma}} \frac{\partial \Omega_2^{\sigma}}{\partial \frac{du_i^{\sigma}}{dx}}.$$

also allgemein $\beta_{hi} = \beta_{ih}$ sei, müssen die $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungs-ngen erfüllt werden:

$$\ldots\ldots \sum_1^n{}^{\sigma} \frac{\partial U}{\partial u_h^{\sigma}} \frac{\partial \Omega_2^{\sigma}}{\partial \frac{du_i^{\sigma}}{dx}} = \sum_1^n{}^{\sigma} \frac{\partial U}{\partial u_i^{\sigma}} \frac{\partial \Omega_2^{\sigma}}{\partial \frac{du_h^{\sigma}}{dx}}.$$

nn diese Bedingungsgleichungen auf eine einfachere Form . Multiplicirt man nämlich die Gleichung (34) mit u_h^{ϱ} und t nach h von 1 bis n, so entsteht:

$$U \frac{\partial \Omega_2^{\varrho}}{\partial \frac{du_i^{\varrho}}{dx}} = \sum_1^n{}^{h} u_h^{\varrho} \sum_1^n{}^{\sigma} \frac{\partial U}{\partial u_i^{\sigma}} \frac{\partial \Omega_2^{\sigma}}{\partial \frac{du_h^{\sigma}}{dx}}.$$

cirt man ferner diese Gleichung mit u_i^{τ} und summirt so-n $i = 1$ bis $i = n$, so erhält man mit Weglassung des chaftlichen Factors U:

$$\ldots\ldots \sum_1^n{}^{i} u_i^{\tau} \frac{\partial \Omega_2^{\varrho}}{\partial \frac{du_i^{\varrho}}{dx}} = \sum_1^{\varrho}{}^{h} u_h^{\varrho} \frac{\partial \Omega_2^{\tau}}{\partial \frac{du_h^{\tau}}{dx}}.$$

n diese letzteren Gleichungen, aus welchen sich rückwärts lie Gleichungen (34) ergeben, übrigens auch leicht direct Gleichungen (32) ableiten.

Gleichungen (35) aber sind unabhängig von x. Denn d zwei Systeme Lösungen

$$z_h = u_h^{\varrho}, \quad \mu_k = r_k^{\varrho}$$
$$z_h = u_h^{\tau}, \quad \mu_k = r_k^{\tau}$$

rentialgleichungen (24) gilt identisch die Formel:

$$\sum_1^n{}_h \left\{ u_h^{\varrho} \frac{\partial \Omega_2^{\tau}}{\partial u_h^{\tau}} + \frac{du_h^{\varrho}}{dx} \frac{\partial \Omega_2^{\tau}}{\partial \frac{du_h^{\tau}}{dx}} \right\} + \sum_1^m{}_k r_k^{\varrho} \frac{\partial \Omega_2^{\tau}}{\partial r_k^{\tau}}$$

$$= \sum_1^n{}_h \left\{ u_h^{\varrho} \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega_2^{\tau}}{\partial \frac{du_h^{\tau}}{dx}} + \frac{du_h^{\varrho}}{dx} \frac{\partial \Omega_2^{\tau}}{\partial \frac{du_h^{\tau}}{dx}} \right\} = \frac{d}{dx} \sum_1^n{}_h u_h^{\varrho} \frac{\partial \Omega}{\partial \frac{du}{dx}}$$

Da aber Ω_2 eine homogene Function zweiter Ordnung der G
z, $\frac{dz}{dx}$ und μ ist, so bleibt der erste Theil dieser Gleichur
geändert, wenn man die Indices ϱ und τ mit einander verta
Dasselbe muss also auch von dem zweiten Theile gelten, d
muss identisch:

$$\frac{d}{dx} \sum_1^n{}_h u_h^{\varrho} \frac{\partial \Omega_2^{\tau}}{\partial \frac{du_h^{\tau}}{dx}} = \frac{d}{dx} \sum_1^n{}_h u_h^{\tau} \frac{\partial \Omega_2^{\varrho}}{\partial \frac{du_h^{\varrho}}{dx}}$$

sein, woraus durch Integration folgt

$$\sum_1^n{}_h \left\{ u_h^{\varrho} \frac{\partial \Omega_2^{\tau}}{\partial \frac{du_h^{\tau}}{dx}} - u_h^{\tau} \frac{\partial \Omega_2^{\varrho}}{\partial \frac{du_h^{\varrho}}{dx}} \right\} = \text{Const.}$$

Wir sehen somit, dass die n Systeme Lösungen (31) der Differ
gleichungen (24) gleichzeitig auch Lösungen der Gleichunge
sind, sobald zwischen ihren $2n^2$ Constanten die $\frac{n(n-1)}{2}$,
unabhängigen Bedingungsgleichungen (35) bestehen.

Nunmehr bietet die definitive Lösung unserer Transform
aufgabe keinerlei Schwierigkeit mehr.

Wir erhalten zunächst aus den n Gleichungen:

$$(29) \quad \frac{du_i^{\sigma}}{dx} + \alpha_1{}^i u_1{}^{\sigma} + \ldots \alpha_n{}^i u_n{}^{\sigma} = 0$$
$$\sigma = 1, 2, \ldots n$$

in Verbindung mit der Gleichung:

$$(18) \quad -\omega_i + \frac{dz_i}{dx} + \alpha_1{}^i z_1 + \ldots \alpha_n{}^i z_n = 0$$

für ω_i den folgenden Werth:

$$(36) \quad U \omega_i = \begin{vmatrix} \frac{dz_i}{dx} & z_i & \ldots & z \\ \frac{du_i^1}{dx} & u_1{}^1 & \ldots & u_n{}^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{du_i^n}{dx} & u_1{}^n & \ldots & u_n{}^n \end{vmatrix} = U_i.$$

len n Gleichungen:

$$\ldots\ldots \beta_{1i}\, u_1{}^{\sigma} + \ldots . \beta_{ni}\, u_n{}^{\sigma} = \frac{\partial \Omega_2{}^{\sigma}}{\partial \frac{du_i{}^{\sigma}}{dx}}$$

$$\sigma = 1,\ 2,\ \ldots\ n$$

ferner, wenn man noch die Gleichung;

$$\beta_{1i}\, z_1 + \ldots . \beta_{ni}\, z_n = \frac{\partial B}{\partial z_i}$$

nimmt:

$$. U . \frac{\partial B}{\partial z_i} = - \begin{vmatrix} 0 & z_1 \ldots . z_n \\ \frac{\partial \Omega_2{}^1}{\partial \frac{du_i{}^1}{dx}} & u_1{}^1 \ldots . u_n{}^1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial \Omega_2{}^n}{\partial \frac{du_i{}^n}{dx}} & u_1{}^n \ldots . u_n{}^n \end{vmatrix} = - \Delta_i .$$

ı ergiebt sich aus den Gleichungen (30) mit Hinzuziehung eichungen (17):

$$. U (\mu_k + \Psi_k) = \begin{vmatrix} \mu_k & z_1 \ldots . z_n \\ r_k{}^1 & u_1{}^1 \ldots . u_n{}^1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ r_k{}^n & u_1{}^n \ldots . u_n{}^n \end{vmatrix} = R_k .$$

hält nach (14) somit schliesslich die folgende Endformel:

$$. 2\Omega_2 = \sum_1^n \sum_i \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h' \partial y_i'}\right] \frac{U_h U_i}{U^2} - \frac{d}{dx} \sum_1^n{}_i \frac{z_i \Delta_i}{U} + 2 \sum_1^m{}_k \frac{R_k}{U} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \mu_k},$$

l $\frac{\partial \Omega_2}{\partial \mu_k}$ selbst nach (20) und (36) übergeht in:

$$\ldots\ldots \frac{\partial \Omega_2}{\partial \mu_k} = \sum_1^n{}_h \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_h'}\right] \frac{U_h}{U} .$$

t jedoch stillschweigend die Voraussetzung gemacht, dass e willkürlichen Constanten $\gamma_h{}^{\sigma}$ der Lösungen (31) den gen (34) oder (35) gemäss so bestimmen könne, dass rminante U nicht identisch Null wird.

Was die Grössen $\frac{\partial \Omega_2{}^\sigma}{\partial \frac{du_h{}^\sigma}{dx}}$ betrifft, so sind dieselben de

durch die Formel

$$\frac{\partial \Omega_2{}^\sigma}{\partial \frac{du_h{}^\sigma}{dx}} = \sum_1^n \left\{ \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h' \partial y_i} \right] u_i{}^\sigma + \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h' \partial y_i'} \right] \frac{du_i{}^\sigma}{dx} \right\} + \sum_1^m{}_k r_k{}^\sigma \left[\right.$$

Substituirt man hierin für die u^σ und r^σ ihre Werthe (31 erhält man den einfacheren Ausdruck:

$$(41) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\partial \Omega_2{}^\sigma}{\partial \frac{du_h{}^\sigma}{dx}} = \sum_1^{2n}{}_i \gamma_i{}^\sigma \frac{\partial}{\partial a_i} \left[\frac{\partial \Omega}{\partial y_h'} \right].$$

§ 7.

Wir sahen in § 5, dass in die allgemeine Lösung des Tr formationsproblems (14), (20) nicht mehr als $\frac{n(n+1)}{2}$ willkü Constanten eingehen können. Unsere Lösung (39), (40) scheint weit mehr willkürliche Constanten zu enthalten. De ihr kommen die $2n^2$ willkürlichen Constanten $\gamma_h{}^\sigma$ von n Sys Lösungen der Differentialgleichungen (24) vor, die nur den $\frac{n}{2}$ Bedingungsgleichungen (34) oder (35) zu genügen haben. schliessen daraus von vornherein, dass diese willkürlichen stanten sowohl in der Endformel (39), wie in jenen Bedin gleichungen nur in n^2 wirklich von einander verschiedene bindungen vorkommen können. Denn sonst könnten si willkürlichen Constanten nicht auf die richtige Anzahl

$$n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

reduciren. Dies wird aber nun noch erst wirklich zu beweise

Die willkürlichen Constanten $\gamma_h{}^\sigma$ kommen nur vor i Grössen:

$$u^\sigma, \quad \frac{du^\sigma}{dx}, \quad r^\sigma.$$

Beachtet man nun, dass die Ausdrücke

$$\frac{\partial \Omega_2{}^\sigma}{\partial \frac{du_h{}^\sigma}{dx}}$$

e homogene Functionen der u^σ, $\frac{du^\sigma}{dx}$ und r^σ sind, deren cienten für jedes σ dieselben sind; denkt man sich ferner eterminanten U_i, Δ_i und R_k nach den z und $\frac{dz}{dx}$ entwickelt lie dabei auftretenden Partialdeterminanten der Δ_i weiter t, so erkennt man ohne Mühe, dass alle Determinanten, die n Formeln (39), (40) vorkommen, sich zusammensetzen aus Determinanten von den Formen:

$$\left|\begin{matrix} \frac{du^1_{h_1}}{dx} & u^1_{h_2} \dots u^1_{h_n} \\ \frac{du^2_{h_1}}{dx} & u^2_{h_2} \dots u^2_{h_n} \\ \dots\dots\dots & \\ \frac{du^n_{h_1}}{dx} & u^n_{h_2} \dots u^n_{h_n} \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} r^1_k & u^1_{h_2} \dots u^1_{h_n} \\ r^2_k & u^2_{h_2} \dots u^2_{h_n} \\ \dots\dots\dots & \\ r^n_k & u^n_{h_2} \dots u^n_{h_n} \end{matrix}\right| \quad \text{und } U,$$

$h_1, h_2 \dots h_n$ irgend welche Zahlen aus der Reihe $1, 2 \dots n$ eine beliebige der Zahlen $1, 2, \dots m$ bedeutet, und aus en, welche unabhängig von den u, $\frac{du}{dx}$ und r sind.

iese Determinanten sind es also allein, welche die willkür- Constanten enthalten. Substituirt man nun in diese De- anten die Werthe:

$$\dots u_i^\sigma = \sum_1^{2n} {}_h \gamma_h^\sigma \frac{\partial [y_i]}{\partial a_h}, \quad r_k^\sigma = \sum_1^{2n} {}_h \gamma_h^\sigma \frac{\partial [\lambda_k]}{\partial a_h}$$

erlegt dieselben sodann nach dem Productensatz der De- anten, so sieht man, dass die $2n^2$ willkürlichen Constanten die Formeln (39), (40) nur in Determinanten von der Form en:

$$\dots\dots \left|\begin{matrix} \gamma^1_{k_1} & \gamma^1_{k_2} \dots \gamma^1_{k_n} \\ \gamma^2_{k_1} & \gamma^2_{k_2} \dots \gamma^2_{k_n} \\ \dots\dots\dots & \\ \gamma^n_{k_1} & \gamma^n_{k_2} \dots \gamma^n_{k_n} \end{matrix}\right| = \Gamma_{k_1 k_2 \dots k_n},$$

für $k_1 k_2 \dots k_n$ alle möglichen verschiedenen ganzen Zahlen bis $2n$ zu setzen sind.

Aber auch in die $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungsgleichungen gehen diese Determinantenconstanten ein.

Denn da die Gleichungen (34) und (35) die einen aus andern folgen, sobald die Determinante U nicht Null ist, und Gleichungen (35) unabhängig von x sind, so erhellt, dass di Bedingungsgleichungen genügt werden muss, sobald man die kürlichen Constanten $\gamma_h{}^\sigma$ nur so bestimmt, dass sie den Gleichu (34) für irgend einen beliebig gewählten Werth von x geni und dass die Determinante U nicht verschwindet, wenn man Variabeln x diesen Werth giebt. Die Gleichungen (34) aber halten, wie man leicht sieht, die Constanten $\gamma_h{}^\sigma$ ebenfalls nu Determinanten von der Form (42).

Die Anzahl dieser Determinanten ist nun offenbar gleich Anzahl der Combinationen von $2n$ Elementen zur n^{ten} Classe,

$$= \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2\ldots n} = p.$$

Es gehen überdies sowohl in (39) und (40), wie in (34) nur Verhältnisse dieser Determinanten ein. Führen wir daher Verhältnisse

$$(43) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\Gamma_{k_1 k_2 \cdots k_n}}{\Gamma_{1\,2\,\cdots\,n}}$$

als neue Constanten ein, so erhalten wir in der Lösung uns Transformationsproblems $p-1$ willkürliche Constanten, zwis denen aber noch die $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungsgleichungen (34) s finden. Soll demnach diese Lösung keine willkürlichen Consta zuviel enthalten, so muss sich nachweisen lassen, dass die säm lichen $p-1$ Determinantenverhältnisse (43) ausgedrückt we können durch gewisse n^2 derselben.

Diesen Beweis wird der folgende § liefern.

§ 8.

Lehrsatz. Wenn:

$$k_1\ k_2\ \ldots\ k_n$$

irgend n verschiedene der $2n$ Zahlen

$$1\ 2\ \ldots\ n$$

ıten und man bildet aus $2n^2$ beliebigen Elemen-
$_i^\sigma$ die:

$$p = \frac{2n\,(2n-1)\,\ldots\,(n+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,n}$$

minanten:

$$\ldots\ldots\ \Gamma_{k_1\ k_2\ \ldots\ k_n} = \begin{vmatrix} \gamma_{k_1}^1 & \gamma_{k_2}^1 & \ldots & \gamma_{k_n}^1 \\ \gamma_{k_1}^2 & \gamma_{k_2}^2 & \ldots & \gamma_{k_n}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ \gamma_{k_1}^n & \gamma_{k_2}^n & \ldots & \gamma_{k_n}^n \end{vmatrix},$$

ıden zwischen diesen p Determinanten:

$$p - n^2 - 1$$

einander unabhängige, identische Relationen
vermittelst derer man durch gewisse n^2 der
Determinantenverhältnisse:

$$\ldots\ldots\ldots\ \frac{\Gamma_{k_1\ k_2\ \ldots\ k_n}}{\Gamma_{1\,2\,\ldots\,n}}$$

brigen ausdrücken kann.

eweis. Unter der Voraussetzung, dass

$$y_\sigma{}^k = \gamma_1{}^\sigma\ x_1{}^k + \gamma_2{}^\sigma\ x_2{}^k + \ldots\ \gamma_{2n}^\sigma\ x_{2n}^k$$
$$b_\sigma{}^k = \gamma_1{}^\sigma\ c_1{}^k + \gamma_2{}^\sigma\ c_2{}^k + \ldots\ \gamma_{2n}^\sigma\ c_{2n}^k$$

t man nach dem Satze von der Multiplication der Deter-
n:

$$\begin{vmatrix} \ldots\ \gamma_n{}^1 & \gamma_{n+1}^1 \ldots \gamma_{2n}^1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ \gamma_n{}^n & \gamma_{n+1}^n \ldots \gamma_{2n}^n \\ \ldots\ \gamma_n^{n+1} & \gamma_{n+1}^{n+1} \ldots \gamma_{2n}^{n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ \gamma_n^{2n} & \gamma_{n+1}^{2n} \ldots \gamma_{2n}^{2n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1{}^1 \ldots x_n{}^1 & x_{n+1}^1 \ldots x_{2n}^1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1{}^n \ldots x_n{}^n & x_{n+1}^n \ldots x_{2n}^n \\ c_1{}^1 \ldots c_n{}^1 & c_{n+1}^1 \ldots c_{2n}^1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1{}^n \ldots c_n{}^n & c_{n+1}^n \ldots c_{2n}^n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y_1{}^1 \ldots y_n{}^1 & y_{n+1}^1 \ldots y_{2n}^1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1{}^n \ldots y_n{}^n & y_{n+1}^n \ldots y_{2n}^n \\ b_1{}^1 \ldots b_n{}^1 & b_{n+1}^1 \ldots b_{2n}^1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_1{}^n \ldots b_n{}^n & b_{n+1}^n \ldots b_{2n}^n \end{vmatrix}.$$

Setzt man nun allgemein:

$$\gamma_i^{n+h} = 0, \quad \gamma_{n+h}^{n+h} = 1,$$

sodass:

$$y_{n+h}^k = x_{n+h}^k, \quad b_{n+h}^k = c_{n+h}^k$$

wird; setzt man ferner:

$$c_{n+h}^k = 0, \quad c_{n+k}^k = 1$$

und nimmt man endlich für $k = 1, 2, \ldots n$

$$b_1{}^k = 0, \; b_2{}^k = 0, \ldots b_n{}^k = 0$$

an, so erhält man nach einem zweiten bekannten Determinantensatze aus der obigen identischen Formel den Satz;

Wenn man die n^2 Grössen c_h^z mit Hülfe der n linearen Gleichungen:

$$(44) \quad \ldots \begin{cases} \gamma_1{}^1 c_1{}^k + \gamma_2{}^1 c_2{}^k + \ldots \gamma_n{}^1 c_n{}^k + \gamma_{n+k}^1 = 0 \\ \gamma_1{}^2 c_1{}^k + \gamma_2{}^2 c_2{}^k + \ldots \gamma_n{}^2 c_n{}^k + \gamma_{n+k}^2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_1{}^n c_1{}^k + \gamma_2{}^n c_2{}^k + \ldots \gamma_n{}^n c_n{}^k + \gamma_{n+k}^n = 0, \end{cases}$$

in denen $k = 1, 2 \ldots n$ ist, ausdrückt durch die Grössen γ_i^σ, so erfüllen diese Werthe die Gleichungen identisch:

$$\begin{vmatrix} \gamma_1{}^1 & \gamma_2{}^1 \ldots \gamma_n{}^1 \\ \gamma_1{}^2 & \gamma_2{}^2 \ldots \gamma_n{}^2 \\ \ldots & \ldots\ldots \\ \gamma_1{}^n & \gamma_2{}^n \ldots \gamma_n{}^n \end{vmatrix} \cdot \Delta = \begin{vmatrix} y_1{}^1 & y_2{}^1 \ldots y_n{}^1 \\ y_1{}^2 & y_2{}^2 \ldots y_n{}^2 \\ \ldots & \ldots\ldots \\ y_1{}^n & y_2{}^n \ldots y_n{}^n \end{vmatrix},$$

worin:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1{}^1 \ldots x_n{}^1 & x_{n+1}^1 \ldots x_{2n}^1 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ x_1{}^n \ldots x_n{}^n & x_{n+1}^n \ldots x_{2n}^n \\ c_1{}^1 \ldots c_n{}^1 & 1 \quad \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ c_1{}^n \ldots c_n{}^n & 0 \quad \ldots 1 \end{vmatrix}$$

und:

$$y_\sigma{}^k = \gamma_1{}^\sigma x_1{}^k + \gamma_2{}^\sigma x_2{}^k + \ldots \gamma_{2n}^\sigma x_{2n}^k$$

ist.

Hieraus folgt umgekehrt, dass sich die n^2 Grössen c_i abhängig von den Werthen der Grössen x_i^k so müssen bestimmen lassen, dass identisch:

$$\ldots\ldots\ldots \Delta = \frac{1}{\Gamma}\begin{vmatrix} y_1^1 & y_2^1 & \ldots & y_n^1 \\ y_1^2 & y_2^2 & \ldots & y_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^n & y_2^n & \ldots & y_n^n \end{vmatrix}$$

worin Γ zur Abkürzung für $\Gamma_{1\,2\,\ldots\,n}$ gesetzt ist. Entlt man nun aber die beiden Seiten dieser Gleichung nach Partialdeterminanten:

$$\begin{vmatrix} x_{k_1}^1 & x_{k_2}^1 & \ldots & x_{k_n}^1 \\ x_{k_1}^2 & x_{k_2}^2 & \ldots & x_{k_n}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{k_1}^n & x_{k_2}^n & \ldots & x_{k_n}^n \end{vmatrix},$$

hält man beiderseits:

$$p = \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1\,.\,2\ldots n}$$

e, deren Coefficienten rechter Hand gerade die Determinanhältnisse

$$\frac{\Gamma_{k_1\,k_2\,\ldots\,k_n}}{\Gamma}$$

Durch Gleichsetzung der Coefficienten derselben Partialminante erhält man folglich $p-1$ Gleichungen und diesen 1 Gleichungen muss nach dem Vorhergehenden genügt werönnen durch passende Bestimmung der n^2 Grössen $c_h{}^k$. ist nun nicht anders möglich, als wenn von diesen $p-1$ iungen

$$p - 1 - n^2$$

Folge der übrigen n^2 sind, d. h., da auf den rechten Seiten $p-1$ Gleichungen je eine der $p-1$ Grössen (43) allein es müssen zwischen diesen $p-1$ Determinanten

$$p - 1 - n^2$$

sche, von einander unabhängige Relationen bestehen.

Es ergiebt sich aber zugleich auch ein verhältnissmässig her Weg, diese identischen Relationen aufzustellen.

Man sieht nämlich sofort, dass unter den $p-1$ Gleichungen, ch aus (45) ergeben, n^2 sind, auf deren linken Seiten je von den n^2 Grössen $c_h{}^k$ steht. Diese n^2 Gleichungen, die üglich also bezeichnen kann:

$$(46) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots c_h^k = \frac{\Gamma_h^k}{\Gamma},$$

bestimmen die n^2 Grössen c_h^k durch gewisse n^2 der Dete nantenverhältnisse (43). Indem man nun diese Werthe de Elemente c_h^k in die übrigen $p-1-n^2$ aus (45) folge Gleichungen einsetzt, erhält man:

$$p-1-n^2$$

Relationen, die allein zwischen den $p-1$ Determinantenver nissen (43) bestehen. Dies sind die gesuchten identischen I tionen.

Anstatt die $2n^2$ Grössen γ_i^σ als gegeben anzunehmen die n^2 Grössen c_h^k durch dieselben auszudrücken, kann man auch umgekehrt die Aufgabe stellen, bei beliebig gegeb Werthen der c_h^k n^2 von den Grössen γ_i^σ, z. B. diejenigen denen $i > n$ ist, als Functionen der c_h^k und der n^2 übriger so zu bestimmen, dass die Gleichung (45) identisch wird. I man aber die Aufgabe in dieser Weise, so sieht man, dass linken Seiten der Gleichungen (46) völlig unabhängig von ei der sind. Dasselbe muss daher auch von den rechten Se dieser Gleichungen gelten. Daraus erhellt, dass zwischen $p-1$ Determinantenverhältnissen (43) nicht mehr als $p-1-$ von einander unabhängige identische Relationen bestehen kön Alle identischen Relationen, die etwa sonst noch zwischen d Determinanten (42) bestehen, müssen sich also aus den genan $p-1-n^2$ Relationen ableiten lassen.

Da sonach zwischen den $p-1$ Determinantenverhältnis (43) $p-1-n^2$ von einander unabhängige identische Relati bestehen, so wird man durch n^2 von diesen Verhältnissen übrigen ausdrücken können; aber nicht durch n^2 beliebige, im Allgemeinen nicht jede der $p-1-n^2$ identischen I tionen mehr als n^2 oder auch nur n^2 dieser Verhältnisse ent Es zeichnen sich aber n^2 von diesen Determinantenverhältni vor allen übrigen aus, diejenigen nämlich, welche die rec Seiten der Gleichungen (46) bilden. Diese sind sicher u hängig von einander und in der That sieht man, wenn diese Grössen durch die n^2 Gleichungen (44) einführt, d Auflösungen die Gleichungen (46) sind, unter Benutzung beka Determinantensätze, dass sich die $p-1$ Determinantenver

ausdrücken lassen allein durch die Grössen c_h^k. Diese n^2 tnisse sind also die wahren Grundverhältnisse, durch welche le übrigen ausdrücken lassen.

m schliesslich die Ableitung der $p = n^2 - 1$ identischen nen an dem einfachsten Beispiele zu zeigen, sei $n = 2$. erhält man aus dem Ansatz (45) die folgenden $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} - 1 = 5$ ngen:

$$\Gamma_1^1 = \Gamma_{23},\ \Gamma \cdot c_2^1 = \Gamma_{31},\ \Gamma \cdot c_1^2 = \Gamma_{24};\ \Gamma \cdot c_2^2 = \Gamma_{11}$$

$$\Gamma \cdot \begin{vmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{vmatrix} = \Gamma_{34},$$

nen die bekannte Identität folgt:

$$\Gamma_{12} \cdot \Gamma_{34} = \Gamma_{23}\Gamma_{41} - \Gamma_{24} \cdot \Gamma_{31}$$

$$\Gamma_{hi} = \gamma_h^1 \gamma_i^2 - \gamma_h^2 \gamma_i^1.$$

§ 9.

e beiden vorhergehenden §§ beweisen, dass die willkür-Constanten in der Lösung unseres Transformationsproblems That nur in n^2 wirklich verschiedenen Verbindungen vor-n, welche noch $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungsgleichungen erfüllen , dass also diese Lösung factisch nur $\frac{n(n+1)}{2}$ wirklich liche Constanten enthält. Der letzte § zeigt aber zugleich welche Grössen man als die wahren Grundconstanten des s betrachten kann, und man sieht, dass, wenn man die rminantenverhältnisse

$$\frac{\Gamma_h^k}{\Gamma} = c_h^k$$

e Constanten einführt, die Constanten γ_i^σ sowohl aus den neln (39), (40), wie aus den $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungsgleichungen chen müssen. Diese Rechnung wollen wir nun durch-

ist offenbar ganz gleichgültig, ob wir die Grössen c_h^k oder die ihnen entgegengesetzten $-c_h^k$ als neue Con-einführen. Der bequemeren Schreibart wegen ziehen wir te vor und setzen daher nach (44):

(47) . . . . $\gamma_{n+k}^{\sigma} = \gamma_1^{\sigma} c_1^{k} + \gamma_2^{\sigma} c_2^{k} + \ldots \gamma_n^{\sigma} c_n^{k}$.

Durch diese Substitutionen gehen die Grössen:

$$(31)\quad u_i^{\sigma} = \sum_1^{2n} \gamma_h^{\sigma} \frac{\partial [y_i]}{\partial a_h}, \qquad r_k^{\sigma} = \sum_1^{2n} \gamma_h^{\sigma} \frac{\partial [\lambda_k]}{\partial a_h}$$

über in:

$$(48)\quad u_i^{\sigma} = \sum_1^{n} \gamma_h^{\sigma} v_i^{h}, \qquad r_k^{\sigma} = \sum_1^{n} \gamma_h^{\sigma} \nu_k^{h},$$

worin unter Benutzung der Bezeichnung $a_{n+h} = \alpha_h$ gesetzt den ist:

$$(49)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial [y_i]}{\partial a_h} + c_h^{1} \dfrac{\partial [y_i]}{\partial \alpha_1} + c_h^{2} \dfrac{\partial [y_i]}{\partial \alpha_2} + \ldots c_h^{n} \dfrac{\partial [y_i]}{\partial \alpha_n} = v_i^{h} \\ \dfrac{\partial [\lambda_k]}{\partial a_h} + c_h^{1} \dfrac{\partial [\lambda_k]}{\partial \alpha_1} + c_h^{2} \dfrac{\partial [\lambda_k]}{\partial \alpha_2} + \ldots c_h^{n} \dfrac{\partial [\lambda_k]}{\partial \alpha_n} = \nu_k^{h}. \end{cases}$$

Beachtet man nun, dass $\dfrac{\partial \Omega_2^{\sigma}}{\partial \dfrac{du_i^{\sigma}}{dx}}$ eine lineare Function der Grö

$$u^{\sigma}, \frac{du^{\sigma}}{dx} \text{ und } r^{\sigma}$$

ist, so erhellt, dass durch die Substitutionen (48):

$$\frac{\partial \Omega_2^{\sigma}}{\partial \dfrac{du_i^{\sigma}}{dx}} = \sum_1^{n} \gamma_h^{\sigma} \frac{\partial \Omega_2^{h}}{\partial \dfrac{dv_i^{h}}{dx}}$$

wird, worin natürlich rechter Hand jetzt Ω_2^{h} diejenige Fun bedeutet, die aus Ω_2 durch die Substitutionen $z = v^h$, μ entsteht. Hiernach gehen die Bedingungsgleichungen:

$$(35)\quad \sum_1^{n} \left\{ u_i^{\tau} \frac{\partial \Omega_2^{\varrho}}{\partial \dfrac{du_i^{\varrho}}{dx}} - u_i^{\varrho} \frac{\partial \Omega_2^{\tau}}{\partial \dfrac{du_i^{\tau}}{dx}} \right\} = 0$$

über in:

$$\sum_1^{n} \begin{vmatrix} \sum_1^{n} \gamma_h^{\tau} v_i^{h}, & \sum_1^{n} \gamma_k^{\varrho} v_i^{k} \\ \sum_1^{n} \gamma_h^{\tau} \dfrac{\partial \Omega_2^{h}}{\partial \dfrac{dv_i^{h}}{dx}}, & \sum_1^{n} \gamma_k^{\varrho} \dfrac{\partial \Omega_2^{k}}{\partial \dfrac{dv_i^{k}}{dx}} \end{vmatrix} = 0,$$

oder, wenn man jedes Glied dieser Summe entwickelt, in:

$$\sum_{h,k} \begin{vmatrix} \gamma_h^{\tau}\gamma_h^{\varrho} \\ \gamma_k^{\tau}\gamma_k^{\varrho} \end{vmatrix} \cdot \sum_1^n \begin{vmatrix} v_i^h, & v_i^k \\ \dfrac{\partial \Omega_2^h}{\partial \dfrac{dv_i^h}{dx}}, & \dfrac{\partial \Omega_2^k}{\partial \dfrac{dv_i^k}{dx}} \end{vmatrix} = 0.$$

er Gleichungen haben wir $\frac{n(n-1)}{2}$ und jede Gleichung ent-

$\frac{(n-1)}{2}$ Terme. Wenn daher die Determinante der $\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$

cienten:

$$(\gamma_h^{\tau}\gamma_k^{\varrho} - \gamma_k^{\tau}\gamma_h^{\varrho}),$$

was dasselbe sagen will, die Determinante:

$$\Gamma = \Sigma \pm \gamma_1^1 \gamma_2^2 \ldots \gamma_n^n$$

Null ist, so kann den $\frac{n(n-1)}{2}$ Gleichungen (35) nur ge-

werden durch die $\frac{n(n-1)}{2}$ Gleichungen:

$$\ldots\ldots \sum_1^n \left\{ v_i^h \frac{\partial \Omega_2^k}{\partial \dfrac{dv_i^k}{dx}} - v_i^k \frac{\partial \Omega_2^h}{\partial \dfrac{dv_i^h}{dx}} \right\} = 0,$$

enen die γ_i^{σ} ganz verschwunden sind und die ebenso wie eichungen (35) unabhängig von x sind, indem nach (49)

$$z_i = v_i^{\sigma}, \quad \mu_k = v_k^{\sigma}$$

gen der Differentialgleichungen (24) sind.

Umgekehrt, wenn wir in den Gleichungen (47) für die c_i^k welche endliche, den Gleichungen (50) genügende Werthe und sodann bei einem ganz beliebigen Werthsysteme der-n Constanten γ_i^{σ}, in denen $i \leqq n$ ist, die n^2 übrigen Con-n γ_{n+i}^{σ} durch die Gleichungen (47) bestimmen, so genügen Werthe der $2n^2$ Constanten γ_h^{σ} stets den Bedingungsglei-en (35) und daher ist es immer erlaubt, die Determinante Null verschieden anzunehmen.

lachen wir nun die Substitutionen (48) in den Gleichungen 6:

$$\ldots\ldots\ldots U = \Sigma \pm u_1^1 u_2^2 \ldots u_n^n$$

$$\ldots \frac{du_i^{\sigma}}{dx} + \alpha_1^i u_1^{\sigma} + \alpha_2^i u_2^{\sigma} + \ldots \alpha_n^i u_n^{\sigma} = 0$$

$$\ldots r_k^{\sigma} + C_1^k u_1^{\sigma} + C_2^k u_2^{\sigma} + \ldots C_n^k u_n^{\sigma} = 0$$

$$(32) \quad \ldots - \frac{\partial \Omega_2{}^{\sigma}}{\partial \frac{du_i{}^{\sigma}}{dx}} + \beta_{1i} u_1{}^{\sigma} + \beta_{2i} u_2{}^{\sigma} + \ldots \beta_{ni} u_n{}^{\sigma} = 0,$$

so gehen dieselben über in:

$$(51) \quad \ldots U = \Sigma \pm \gamma_1{}^1 \gamma_2{}^2 \ldots \gamma_n{}^n \Sigma \pm v_1{}^1 v_2{}^2 \ldots v_n{}^n$$

$$\sum_1^n{}^h \gamma_h{}^{\sigma} \left\{ \frac{dv_i{}^h}{dx} + \alpha_1{}^i v_1{}^h + \alpha_2{}^i v_2{}^h + \ldots \alpha_n{}^i v_n{}^h \right\} = 0$$

$$\sum_1^n{}^h \gamma_h{}^{\sigma} \left\{ \nu_k{}^h + C_1{}^k v_1{}^h + C_2{}^k v_2{}^h + \ldots C_n{}^k v_n{}^h \right\} = 0$$

$$\sum_1^n{}^h \gamma_h{}^{\sigma} \left\{ - \frac{\partial \Omega_2{}^h}{\partial \frac{dv_i{}^h}{dx}} + \beta_{1i} v_1{}^h + \beta_{2i} v_2{}^h + \ldots \beta_{ni} v_n{}^h \right\} =$$

Jede der letzten 3 Gleichungen repräsentirt für $\sigma = 1, 2,$ ein System von n Gleichungen. Da nun die Determina nicht $= 0$ sein soll, so folgt aus ihnen, dass:

$$\frac{dv_i{}^h}{dx} + \alpha_1{}^i v_1{}^h + \alpha_2{}^i v_2{}^h + \ldots \alpha_n{}^i v_n{}^h = 0$$

$$\nu_k{}^h + C_1{}^k v_1{}^h + C_2{}^k v_2{}^h + \ldots C_n{}^k v_n{}^h = 0$$

$$\beta_{1i} v_1{}^h + \beta_{2i} v_2{}^h + \ldots \beta_{ni} v_n{}^h = \frac{\partial \Omega_2{}^h}{\partial \frac{dv_i{}^h}{dx}}$$

sein muss. Indem man diese Gleichungen ganz ebenso v § 6 die Gleichungen (29), (30), (32) benutzt, gelangt m den folgenden Endformeln:

$$(52) \quad \ldots 2\Omega_2 = \sum_1^n{}^h \sum_1^n{}^i \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h' \partial y_i'} \right] \frac{S_h S_i}{S^2} - \frac{d}{dx} \sum_1^n{}^i \frac{z_i \nabla_i}{S}$$

$$+ 2 \sum_1^m{}^k \frac{N_k}{S} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \mu_k}$$

$$(53) \quad \ldots \frac{\partial \Omega_2}{\partial \mu_k} = \sum_1^n{}^h \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_h'} \right] \frac{S_h}{S},$$

worin die Grössen S, S_i, ∇_i, N_k durch dieselben Gleichu definirt sind, wie in § 6 die Grössen U, U_i, Δ_i, R_k, nur l in diesen Gleichungen überall v statt u und ν statt r zu se ben ist. Die Bedeutung der Grössen $v_i{}^h$ und $\nu_k{}^h$ ist durch Gleichungen (49) gegeben und die Ausdrücke:

$$\frac{\partial \Omega_2{}^h}{\partial \frac{dv_i{}^h}{dx}}$$

st sich, wie man leicht aus diesen Gleichungen erkennt, also allen:

$$\ldots \frac{\partial \Omega_2{}^h}{\partial \frac{dv_i{}^h}{dx}} = \frac{\partial}{\partial a_h}\left[\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}\right] + \sum_1^n{}_\sigma c_h{}^\sigma \frac{\partial}{\partial \alpha_\sigma}\left[\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}\right].$$

§ 10.

Die Transformationsformel (52) gilt identisch für alle be-en endlichen Werthe der n^2 Constanten $c_h{}^k$, welche den [1] Bedingungsgleichungen:

$$\ldots \ldots \sum_1^n{}_i \left\{ v_i{}^h \frac{\partial \Omega_2{}^k}{\partial \frac{dv_i{}^k}{dx}} - v_i{}^k \frac{\partial \Omega_2{}^h}{\partial \frac{dv_i{}^h}{dx}} \right\} = 0$$

ten und für welche die Determinante

$$S = \Sigma \pm v_1{}^1 v_2{}^2 \ldots v_n{}^n$$

n identisch Null ist. Sie enthält also in der That nur noch [1] willkürliche Constanten.

Es handelt sich nun darum, diese Constanten wirklich den nten Forderungen gemäss zu bestimmen. Jedoch wird es nicht darauf ankommen, die allgemeinsten Werthe dieser nten zu ermitteln, obgleich wir später nach dem Vorgange lebsch auch dazu gelangen werden, sondern es wird für n Hauptzweck wenigstens ausreichen, ein bestimmtes System e der $c_h{}^k$ zu finden, welches jenen Bedingungen genügt. ie Eintheilung der $2n$ Integrationsconstanten der Lösungen die zwei Gruppen

$$a_1, a_2 \ldots a_n \text{ und } \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$$

isher eine vollkommen willkürliche. Diese Willkürlichkeit wir nun etwas beschränken.

n das System Lösungen $[y_i]$ nach Annahme ein vollstän-sein soll, so müssen sich, wie schon in § 2 bemerkt wurde, Integrationsconstanten desselben ausdrücken lassen durch $_i$ und y_{i0}. Daraus folgt, dass sich aus den n Gleichungen:

$$(7) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad y_i = [y_i]$$

stets n von den $2n$ Integrationsconstanten bestimmen s müssen als Functionen von $x, y_1, y_2 \ldots y_n$ und von den n gen Constanten. Ich will nun von jetzt ab annehmen, da Constanten $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ diese Eigenschaft besitzen.

Aus den n Gleichungen (7) kann man dann die n Cons $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ bestimmen als Functionen von

$$x, y_1, y_2 \ldots y_n \qquad a_1, a_2 \ldots a_n.$$

Bezeichnet man durch Einschliessung in runde Klammern d in den eingeschlossenen Ausdrücken für die α diese Func zu setzen sind, so erhält man aus (7) die für jeden Wert $x, y_1, y_2 \ldots y_n, a_1, a_2 \ldots a_n$ identischen Gleichungen:

$$y_i = ([y_i]).$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich daher durch Differen nach a_h die ebenfalls identischen Gleichungen:

$$0 = \left(\frac{\partial[y_i]}{\partial a_h}\right) + \left(\frac{\partial[y_i]}{\partial \alpha_1}\right)\frac{\partial(\alpha_1)}{\partial a_h} + \left(\frac{\partial[y_i]}{\partial \alpha_2}\right)\frac{\partial(\alpha_2)}{\partial a_h} + \ldots \left(\frac{\partial[y_i]}{\partial \alpha_n}\right)\frac{\partial}{\partial}$$

Hieraus folgt, wenn wir für die y überall die Lösungen $[y$ setzen, dass identisch, für jedes h und i und für alle belie Werthe der Constanten a und α die Gleichung gelten mus

$$(55) \ldots 0 = \frac{\partial[y_i]}{\partial a_h} + \frac{\partial[y_i]}{\partial \alpha_1}\left[\frac{\partial(\alpha_1)}{\partial a_h}\right] + \ldots \frac{\partial[y_i]}{\partial \alpha_n}\left[\frac{\partial(\alpha_n)}{\partial a_h}\right]$$

Bezeichnet man daher mit x_ω irgend einen beliebigen bestim Werth von x und mit:

$$\left[\frac{\partial(\alpha_k)}{\partial a_h}\right]_\omega$$

den Werth von $\left[\frac{\partial(\alpha_k)}{\partial a_h}\right]$ für $x = x_\omega$, so sieht man, das Ausdrücke:

$$(56) \ldots \omega_i{}^h = \frac{\partial[y_i]}{\partial a_h} + \left[\frac{\partial(\alpha_1)}{\partial a_h}\right]_\omega \frac{\partial[y_i]}{\partial \alpha_1} + \ldots \left[\frac{\partial(\alpha_n)}{\partial a_h}\right]_\omega \frac{\partial[y_i]}{\partial \alpha_n}$$

für $x = x_\omega$ sämmtlich verschwinden.

Setzen wir aber allgemein:

$$(57) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad c_h{}^k = \left[\frac{\partial(\alpha_k)}{\partial a_h}\right]_\omega,$$

d nach (49):

$$v_i^h = \omega_i^h.$$

d daher bei dieser Bestimmung der n^2 Constanten c_h^k den 1) Bedingungsgleichungen:

$$\ldots\ldots \sum_1^n{}_i \left\{ v_i^h \frac{\partial \Omega_2^k}{\partial \frac{dv_i^k}{dx}} - v_i^k \frac{\partial \Omega_2^h}{\partial \frac{dv_i^h}{dx}} \right\} = 0$$

für $x = x_\omega$, folglich, da diese Gleichungen unabhängig sind, auch für jedes x. Eine Ausnahme könnte nur dann den, wenn bei dieser Constantenbestimmung eine oder e Functionen

$$\frac{\partial \Omega_2^\tau}{\partial \frac{dv_\varrho^\tau}{dx}}$$

ch würden für $x = x_\omega$. Ein solches Unendlichwerden ber nur für einzelne besondere Werthe von x_ω eintreten r werden x_ω immer so wählen können, dass sowohl diese nen, wie die Ausdrücke $\left[\frac{\partial(\alpha_k)}{\partial a_h}\right]$ endlich bleiben für $x = x_\omega$.

ichung (57) liefert uns dann ein endliches System Werthe , welche den Bedingungsgleichungen (50) sicher genügt. bleibt aber noch zu zeigen, dass für diese Werthe der Determinante S nicht identisch Null ist.

rch die Substitutionen (57) wird:

$$\ldots S = \Sigma \pm \omega_1^1 \, \omega_2^2 \ldots \omega_n^n = S(x, x_\omega).$$

eterminante steht aber mit einer anderen Determinante innigem Zusammenhang, mit der Determinante nämlich:

$$\Delta(x_1 \, x_\omega) = \begin{vmatrix} \frac{\partial[y_1]}{\partial a_1} & \ldots & \frac{\partial[y_1]}{\partial a_n} & \frac{\partial[y_1]}{\partial \alpha_1} & \ldots & \frac{\partial[y_1]}{\partial \alpha_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial[y_n]}{\partial a_1} & \ldots & \frac{\partial[y_n]}{\partial a_n} & \frac{\partial[y_n]}{\partial \alpha_1} & \ldots & \frac{\partial[y_n]}{\partial \alpha_n} \\ \frac{\partial[y_1]_\omega}{\partial a_1} & \ldots & \frac{\partial[y_1]_\omega}{\partial a_n} & \frac{\partial[y_1]_\omega}{\partial \alpha_1} & \ldots & \frac{\partial[y_1]_\omega}{\partial \alpha_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial[y_n]_\omega}{\partial a_1} & \ldots & \frac{\partial[y_n]_\omega}{\partial a_n} & \frac{\partial[y_n]_\omega}{\partial \alpha_1} & \ldots & \frac{\partial[y_n]_\omega}{\partial \alpha_n} \end{vmatrix},$$

in der

$$\frac{\partial [y_i]_\omega}{\partial a_h} = \left[\frac{\partial [y_i]}{\partial a_h}\right] x = x_\omega$$

ist, und die man betrachten kann als die Functionaldeterm
der $2n$ Functionen $[y_h]$ und $[y_h]_\omega$ in Bezug auf die $2n$ Co
ten a und α. Mit Benutzung der Bezeichnung (56) kan
nach dem Satze, dass eine Determinante ungeändert bleibt,
man in ihr eine Verticalreihe der Elemente vermehrt u
mit demselben Factor multiplicirten correspondirenden El
einer anderen Verticalreihe, die letztere Determinant
schreiben:

$$\Delta(x, x_\omega) = \begin{vmatrix} \omega_1{}^1 & \dots & \omega_1{}^n & \frac{\partial [y_1]}{\partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial [y_1]}{\partial \alpha_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_n{}^1 & \dots & \omega_n{}^n & \frac{\partial [y_n]}{\partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial [y_n]}{\partial \alpha_n} \\ [\omega_1{}^1]_\omega & \dots & [\omega_1{}^n]_\omega & \frac{\partial [y_1]_\omega}{\partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial [y_1]_\omega}{\partial \alpha_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\omega_n{}^1]_\omega & \dots & [\omega_n{}^n]_\omega & \frac{\partial [y_n]_\omega}{\partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial [y_n]_\omega}{\partial \alpha_n} \end{vmatrix}.$$

Nun ist aber in Folge der Identität (55)

$$[\omega_i{}^h]_\omega = [\omega_i{}^h] x = x_\omega = 0.$$

Setzt man daher:

(60) $$Y = \Sigma \pm \frac{\partial [y_1]}{\partial \alpha_1} \frac{\partial [y_2]}{\partial \alpha_2} \dots \frac{\partial [y_n]}{\partial \alpha_n}$$

und bezeichnet mit Y_ω den Werth von Y für $x = x_\omega$,
hält man:

(61) $$\Delta(x, x_\omega) = Y_\omega \cdot S(x, x_\omega).$$

Diese identische Formel liefert den Satz:

Wenn man den n^2 Constanten $c_h{}^k$ die Werth
giebt, so werden die Determinanten S und $\Delta(x, x$
auf einen von x unabhängigen Factor einander g

Die Determinante $\Delta(x, x_\omega)$ kann aber nicht identisc
sein, so lange man die $2n$ Constanten a und α willkürlich
weil sich diese $2n$ Constanten ausdrücken lassen müssen
die y und y_ω, um ein vollständiges System von Integral
Gleichungen (6) zu bilden. Nach dem, was wir in § 5

haben, kann sie daher auch dann nicht identisch verschwin-, wenn wir für diese Constanten die aus den Grenzbedingungen den Werthe setzen. Man sieht also, dass bei passender von x_ω die Werthe (57) allen an die c_h^k gestellten For-gen genügen.

§ 11.

ie vorhergehenden Resultate würden zur Ableitung der en des Maximums und Minimums vollständig ausreichen, jene Werthe der c_h^k für jeden Werth von x_ω den Gültig-dingungen der Reductionsformel (52) genügten. Allein da e besondere Werthe von x_ω [namentlich die Wurzeln der ung $Y_\omega = 0$, indem für diese die Ausdrücke $\left[\frac{\partial(\alpha_k)}{\partial a_h}\right]_\omega$ un- werden] eine Ausnahme zu machen scheinen, so würde ifelhaft bleiben, ob diese Kriterien nicht bei gewissen be-en Werthen der unteren Grenze unrichtig werden könnten. ese Zweifel zu beseitigen, scheint es nöthig zu sein, von n Vorhergehenden noch nirgends benutzten Hamilton-schen Integrationsmethode Gebrauch zu machen und zu sprünglichen Reduction der Function $2\Omega_2$ von § 6 zu-gehen.

rstehen wir von jetzt an unter $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ die zu $a_1, a_2 \ldots a_n$ en kanonischen Constanten, so haben wir nach § 2:

$$(\alpha_k) = \frac{\partial V}{\partial a_k}$$

:

$$\ldots\ldots \frac{\partial(\alpha_k)}{\partial a_h} = \frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial a_h} = \frac{\partial(\alpha_h)}{\partial a_k}.$$

nnen daher bei Zugrundelegung kanonischer Constanten ntität (55) auch so schreiben:

$$\cdot - \frac{\partial[y_i]}{\partial a_h} = \left[\frac{\partial(\alpha_h)}{\partial a_1}\right]\frac{\partial[y_i]}{\partial \alpha_1} + \cdots \left[\frac{\partial(\alpha_h)}{\partial a_n}\right]\frac{\partial[y_i]}{\partial \alpha_n}.$$

prüngliche Reductionsformel (39) galt für alle beliebigen der $2n^2$ Constanten $\gamma_\sigma{}^i$, welche den Bedingungsgleichungen ügen und für welche die Determinante U nicht identisch

Null ist. Nach § 9 sind diese Constanten mit den n^2 Con
c_k^h der letzten Reduction verbunden durch die Gleichunge

(47) . . . . . $\gamma_{n+h}^i = c_1^h \gamma_1^i + c_2^h \gamma_2^i + \ldots c_n^h \gamma_n^i$.

Führt man in diese Gleichungen die aus (57) fol
Werthe der c_k^h ein, so werden dieselben:

$$\gamma_{n+h}^i = \left[\frac{\partial(\alpha_h)}{\partial a_1}\right]_\omega \gamma_1^i + \left[\frac{\partial(\alpha_h)}{\partial a_2}\right]_\omega \gamma_2^i + \ldots \left[\frac{\partial(\alpha_h)}{\partial a_n}\right]_\omega \gamma$$

Vergleicht man aber diese Formeln mit den Identitäten
so sieht man, dass sie identisch erfüllt werden durch d
nahmen:

(63) . . . . . $\gamma_{n+h}^i = -\frac{\partial[y_i]_\omega}{\partial a_h}, \quad \gamma_h^i = \frac{\partial[y_i]_\omega}{\partial \alpha_h}$.

Nach § 9, (51) ist ferner:

$$U = S \,.\, \Sigma \pm \gamma_1^1 \gamma_2^2 \ldots \gamma_n^n.$$

Geben wir daher den γ_σ^i die Werthe (63) und folglich d
die Werthe (57), so wird nach (61):

(64) . . . . . $U = Y_\omega \,.\, S(x, x_\omega) = \Delta(x, x_\omega)$.

Mit Rücksicht auf den vorigen § sehen wir also, da
Anwendung kanonischer Constanten den Bedingungsgleich
(35) genügt wird durch die Werthe (63) der γ_σ^i und da
diese Werthe geradezu $U = \Delta(x, x_\omega)$ wird. Die Sätze vor
werden sonach viel einfacher und eleganter, wenn man
sprüngliche Reductionsformel und kanonische Constant
Grunde legt.

Es bleibt aber immer noch zweifelhaft, ob nicht
Werthe von x_ω eine Ausnahme machen. Daher wird es
dieselben Resultate noch auf einem anderen Wege abzu
Wir brauchen eigentlich nur zu zeigen, dass die Werth
der γ den Bedingungsgleichungen (35) genügen für jed
Da aber der in (64) enthaltene Satz auf einem sehr ind
Wege gefunden worden ist, so erscheint es nicht uninter
auch diesen Satz noch direct zu beweisen.

§ 12.

Setzt man in der Summe:

$$\sum_1^n{}_h \left\{\frac{\partial[y_i]}{\partial a_h}\,\frac{\partial[y_k]}{\partial \alpha_h} - \frac{\partial[y_i]}{\partial \alpha_h}\,\frac{\partial[y_k]}{\partial a_h}\right\}$$

$\frac{[y_i]}{\partial a_h}$ und $\frac{\partial [y_k]}{\partial a_h}$ ihre Werthe, wie sie aus den identischen
ungen (55) folgen, so geht dieselbe über in:

$$\sum_1^n{}_h \sum_\sigma \left[\frac{\partial(\alpha_\sigma)}{\partial a_h}\right] \left\{\frac{\partial [y_i]}{\partial \alpha_h} \frac{\partial [y_k]}{\partial \alpha_\sigma} - \frac{\partial [y_i]}{\partial \alpha_\sigma} \frac{\partial [y_k]}{\partial \alpha_h}\right\}.$$

s Doppelsumme lässt sich aber auch so schreiben:

$$\sum_1^n{}_i \sum_\sigma \left[\frac{\partial(\alpha_h)}{\partial a_\sigma}\right] \left\{\frac{\partial [y_i]}{\partial \alpha_\sigma} \frac{\partial [y_k]}{\partial \alpha_h} - \frac{\partial [y_i]}{\partial \alpha_h} \frac{\partial [y_k]}{\partial \alpha_\sigma}\right\}.$$

at daher identisch:

$$2 \sum_1^n{}_h \left\{\frac{\partial [y_i]}{\partial a_h} \frac{\partial [y_k]}{\partial \alpha_h} - \frac{\partial [y_i]}{\partial \alpha_h} \frac{\partial [y_k]}{\partial a_h}\right\}$$

$$\sum_1^n{}_h \sum_\sigma \left\{\frac{\partial [y_i]}{\partial a_h} \frac{\partial [y_k]}{\partial \alpha_\sigma} - \frac{\partial [y_i]}{\partial \alpha_\sigma} \frac{\partial [y_k]}{\partial \alpha_h}\right\} \left\{\left[\frac{\partial(\alpha_\sigma)}{\partial a_h}\right] - \left[\frac{\partial(\alpha_h)}{\partial a_\sigma}\right]\right\}.$$

s folgt nach (62), dass, wenn $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ die zu $a_1, a_2 \ldots a_n$
gen kanonischen Constanten sind, identisch die Gleichung gilt:

$$\ldots \sum_1^n{}_h \left\{\frac{\partial [y_i]}{\partial a_h} \frac{\partial [y_k]}{\partial \alpha_h} - \frac{\partial [y_i]}{\partial \alpha_h} \frac{\partial [y_k]}{\partial a_h}\right\} = 0.$$

ach dem Satze von der Multiplication der Determinanten
:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial [y_1]}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial [y_1]}{\partial a_n} & \frac{\partial [y_1]}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial [y_1]}{\partial \alpha_n} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial [y_n]}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial [y_n]}{\partial a_n} & \frac{\partial [y_n]}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial [y_n]}{\partial \alpha_n} \\ -1 \cdots -\gamma_{2n}^1 \quad \gamma_1{}^1 \cdots \gamma_n{}^1 & \\ \cdots\cdots\cdots & \\ -1 \cdots -\gamma_{2n}^n \quad \gamma_1{}^n \cdots \gamma_n{}^n & \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1{}^1 \cdots x_n{}^1 & x_{n+1}^1 \cdots x_{2n}^1 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ x_1{}^n \cdots x_n{}^n & x_{n+1}^n \cdots x_{2n}^n \\ x_1^{n+1} \cdots x_n^{n+1} & x_{n+1}^{n+1} \cdots x_{2n}^{n+1} \\ \cdots\cdots\cdots & \\ x_1^{2n} \cdots x_n^{2n} & x_{n+1}^{2n} \cdots x_{2n}^{2n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} X_1{}^1 \cdots X_n{}^1 & X_{n+1}^1 \cdots X_{2n}^1 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ X_1{}^n \cdots X_n{}^n & X_{n+1}^n \cdots X_{2n}^n \\ X_1^{n+1} \cdots X_n^{n+1} & X_{n+1}^{n+1} \cdots X_{2n}^{n+1} \\ \cdots\cdots\cdots & \\ X_1^{2n} \cdots X_n^{2n} & X_{n+1}^{2n} \cdots X_{2n}^{2n} \end{vmatrix},$$

worin für $i \leqq n$:

$$X_k^{\,i} = \sum_1^n{}_h \left(x_k^{\,h} \frac{\partial [y_i]}{\partial a_h} + x_{n+h}^{k} \frac{\partial [y_i]}{\partial \alpha_h} \right)$$

$$X_k^{\,n+i} = \sum_1^n{}_h \left(- x_h^{\,k} \gamma_{n+h}^{i} + x_{n+h}^{k} \gamma_h^{\,i} \right).$$

Aus dieser identischen Gleichung folgt, wenn wir für k und
setzen:

$$x_h^{\,k} = \frac{\partial [y_k]}{\partial \alpha_h}, \quad x_{n+h}^{k} = - \frac{\partial [y_k]}{\partial a_h},$$

$$x_h^{\,n+k} = 0, \quad x_{n+h}^{n+k} = 0, \quad x_{n+k}^{n+k} = 1,$$

wodurch:

$$X_k^{\,i} = \sum_1^n{}_h \left(\frac{\partial [y_i]}{\partial a_h} \frac{\partial [y_k]}{\partial \alpha_h} - \frac{\partial [y_i]}{\partial \alpha_h} \frac{\partial [y_k]}{\partial a_h} \right)$$

$$X_k^{\,n+i} = - \sum_1^n{}_h \left\{ \gamma_h^{\,i} \frac{\partial [y_k]}{\partial a_h} + \gamma_{n+h}^{i} \frac{\partial [y_k]}{\partial \alpha_h} \right\} = - u_k^{\,i}, \; [\S$$

$$X_{n+k}^{i} = \frac{\partial [y_i]}{\partial \alpha_k}, \quad X_{n+k}^{n+i} = \gamma_k^{\,i}$$

wird:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial [y_1]}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial [y_1]}{\partial a_n} & \frac{\partial [y_1]}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial [y_1]}{\partial \alpha_n} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial [y_n]}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial [y_n]}{\partial a_n} & \frac{\partial [y_n]}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial [y_n]}{\partial \alpha_n} \\ - \gamma_{n+1}^{1} \cdots - \gamma_{2n}^{1} & \gamma_1^{\,1} \cdots \gamma_n^{\,1} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ - \gamma_{n+1}^{n} \cdots - \gamma_{2n}^{n} & \gamma_1^{\,n} \cdots \gamma_n^{\,n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial [y_1]}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial [y_1]}{\partial \alpha_n} \\ \cdots\cdots \\ \frac{\partial [y_n]}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial [y_n]}{\partial \alpha_n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} X_1^{\,1} \cdots X_n^{\,1} & \frac{\partial [y_1]}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial [y_1]}{\partial \alpha_n} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ X_1^{\,n} \cdots X_n^{\,n} & \frac{\partial [y_n]}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial [y_n]}{\partial \alpha_n} \\ - u_1^{\,1} \cdots - u^1{}_n & \gamma_1^{\,1} \cdots \gamma_n^{\,1} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ - u_1^{\,n} \cdots - u_n^{\,n} & \gamma_1^{\,n} \cdots \gamma_n^{\,n} \end{vmatrix}.$$

Sind nun die a und α kanonische Constanten, so versch

65) die sämmtlichen n^2 Grössen X_k^i und es wird folglich
zte Determinante:

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} -u_1^1 & \dots & -u_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ -u_1^n & \dots & -u_n^n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial[y_1]}{\partial\alpha_1} & \dots & \frac{\partial[y_1]}{\partial\alpha_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial[y_n]}{\partial\alpha_1} & \dots & \frac{\partial[y_n]}{\partial\alpha_n} \end{vmatrix}.$$

ann die Determinante der n^2 Grössen $\frac{\partial[y_i]}{\partial\alpha_k}$ nicht identisch
ein, weil sich sonst die Grössen α nicht durch die y und
ausdrücken liessen (§ 10). Wir erhalten daher den Satz:
Wenn $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ die zu $a_1, a_2 \dots a_n$ gehörigen
nischen Constanten der Lösungen $[y]$ sind, so
t identisch die Gleichung statt:

$$\dots U = \begin{vmatrix} \frac{\partial[y_1]}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial[y_1]}{\partial a_n} & \frac{\partial[y_1]}{\partial\alpha_1} & \dots & \frac{\partial[y_1]}{\partial\alpha_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial[y_n]}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial[y_n]}{\partial a_n} & \frac{\partial[y_n]}{\partial\alpha_1} & \dots & \frac{\partial[y_n]}{\partial\alpha_n} \\ -\gamma_{n+1}^1 & \dots & -\gamma_{2n}^1 & \gamma_1{}^1 & \dots & \gamma_n{}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\gamma_{n+1}^n & \dots & -\gamma_{2n}^n & \gamma_1{}^n & \dots & \gamma_n{}^n \end{vmatrix},$$

lcher:

$$U = \Sigma \pm u_1{}^1 u_2{}^2 \dots u_n{}^n$$

$$u_k{}^i = \sum_1^n{}^h \left\{ \gamma_h{}^i \frac{\partial[y_k]}{\partial a_h} + \gamma_{n+h}^i \frac{\partial[y_k]}{\partial\alpha_h} \right\}$$

ese Gleichung enthält, wie man sieht, den durch die For-
53) und (64) ausgedrückten Satz als speciellen Fall.
n nun ferner direct zu zeigen, dass bei Zugrundelegung
cher Integrationsconstanten die Werthe (63) der $\gamma_\sigma{}^i$ den
) Bedingungsgleichungen:

$$\dots \sum_1^n{}^h \left(u_h{}^\tau \frac{\partial \Omega_2{}^\varrho}{\partial \frac{du_h{}^\varrho}{dx}} - u_h{}^\varrho \frac{\partial \Omega_2{}^\tau}{\partial \frac{du_h{}^\tau}{dx}} \right) = 0$$

h genügen, folgen wir dem Wege, den Clebsch im 55. Bd.
lle'schen Journales p. 343 eingeschlagen hat.

Nach § 6 (31) und (41) haben wir, wenn wir nun von der ursprünglichen Bezeichnung $\alpha_h = a_{n+h}$ G machen:

$$u_h^\tau = \sum_1^{2n} \gamma_i^\tau \frac{\partial [y_h]}{\partial a_i}, \quad \frac{\partial \Omega_2^\tau}{\partial \frac{du_h^\tau}{dx}} = \sum_1^{2n} \gamma_i^\tau \frac{\partial}{\partial a_i} \left[\frac{\partial \Omega}{\partial y_h'}\right].$$

Die letztere Formel schreiben wir nach § 2, (8) also:

$$\frac{\partial \Omega_2^\tau}{\partial \frac{du_h^\tau}{dx}} = \sum_1^{2n} \gamma_i^\tau \frac{\partial}{\partial a_i} \left[\frac{\partial V}{\partial y_h}\right].$$

Indem wir diese Werthe in die Gleichung (35) einsetz sodann jedes Glied der Summe (35) nach dem Produktens Determinanten entwickeln, erhalten wir die Gleichung:

$$0 = \sum_1^{2n} \sum_k (\gamma_i^\tau \gamma_k^\varrho - \gamma_i^\varrho \gamma_k^\tau) \sum_1^n h \left\{ \frac{\partial [y_h]}{\partial a_i} \frac{\partial}{\partial a_k} \left[\frac{\partial V}{\partial y_h}\right] - \frac{\partial [y_h]}{\partial a_k} \frac{\partial}{\partial a_i} \right.$$

in der jedes Glied der Summe doppelt genommen ist.

Die nach h genommene Summe ist nun offenbar

$$= \frac{\partial}{\partial a_k} \sum_1^n h \frac{\partial [y_h]}{\partial a_i} \left[\frac{\partial V}{\partial y_h}\right] - \frac{\partial}{\partial a_i} \sum_1^n h \frac{\partial [y_h]}{\partial a_k} \left[\frac{\partial V}{\partial y_h}\right],$$

oder, da:

$$\frac{\partial [V]}{\partial a_\mu} = \left[\frac{\partial V}{\partial a_\mu}\right] + \sum_1^n h \left[\frac{\partial V}{\partial y_h}\right] \frac{\partial [y_h]}{\partial a_\mu}$$

ist:

$$= \frac{\partial}{\partial a_i} \left[\frac{\partial V}{\partial a_k}\right] - \frac{\partial}{\partial a_k} \left[\frac{\partial V}{\partial a_i}\right].$$

Durch Einsetzung dieses Werthes verwandelt sich die obi dingungsgleichung in:

$$0 = \sum_1^{2n} \sum_k (\gamma_i^\tau \gamma_k^\varrho - \gamma_i^\varrho \gamma_k^\tau) \left\{ \frac{\partial}{\partial a_i} \left[\frac{\partial V}{\partial a_k}\right] - \frac{\partial}{\partial a_k} \left[\frac{\partial V}{\partial a_i}\right] \right.$$

Sind nun $a_{n+1}\ a_{n+2} \ldots a_{2n}$ die zu $a_1\ a_2 \ldots a_n$ gehörigen nischen Constanten, so enthält V, die vollständige Lösu Hamilton'schen partiellen Differentialgleichung, nur die Con

$\ldots a_n$, während $a_{n+1} \ldots a_{2n}$ darin nicht vorkommen, und letzte Gleichung kann daher auch so geschrieben werden:

$$0 = \sum_1^{2n} \sum_1^{n} (\gamma_i^{\tau}\, \gamma_k^{\varrho} - \gamma_i^{\varrho}\, \gamma_k^{\tau}) \frac{\partial}{\partial a_i} \left[\frac{\partial V}{\partial a_k}\right]$$

$$- \sum_1^{n} \sum_1^{2n} (\gamma_i^{\tau}\, \gamma_k^{\varrho} - \gamma_i^{\varrho}\, \gamma_k^{\tau}) \frac{\partial}{\partial a_k} \left[\frac{\partial V}{\partial a_i}\right].$$

ir ist nach § 2, (9) alsdann identisch:

$$\left[\frac{\partial V}{\partial a_i}\right] = \alpha_i = a_{n+i}$$

olglich:

$$\frac{\partial}{\partial a_k} \left[\frac{\partial V}{\partial a_i}\right] = \begin{cases} 1, & \text{wenn } k = n + i \\ 0, & \text{„ } k \gtrless n + i \end{cases}$$

o dass sich die Gleichung (35) schliesslich also darstellt:

$$0 = \sum_1^{n} (\gamma_{n+k}^{\tau}\, \gamma_k^{\varrho} - \gamma_{n+k}^{\varrho}\, \gamma_k^{\tau}) - \sum_1^{n} (\gamma_i^{\tau}\, \gamma_{n+i}^{\varrho} - \gamma_i^{\varrho}\, \gamma_{n+i}^{\tau})$$

noch einfacher:

$$0 = \sum_1^{n} (\gamma_{n+h}^{\tau}\, \gamma_h^{\varrho} - \gamma_{n+h}^{\varrho}\, \gamma_h^{\tau}).$$

iese elegante Weise zeigt Clebsch unter Voraussetzung kaher Constanten direct, dass die Gleichungen (35) unabsind von x.

us dieser Form der Bedingungsgleichungen (35) folgt nun durch Vergleich mit den Identitäten (65) sofort, dass diese ungsgleichungen identisch erfüllt werden durch die Werthe

$$\gamma_{n+h}^{\varrho} = -\frac{\partial [y_\varrho]_\omega}{\partial a_h},\ \gamma_h^{\varrho} = \frac{\partial [y_\varrho]_\omega}{\partial \alpha_h},$$

s auch der Werth x_ω von x sein mag. Wir erhalten demnit Rücksicht auf (66) den Satz:

. . Wenn $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ die zu $a_1\, a_2 \ldots a_n$ gehörigen kanonischen Constanten der Lösungen $[y]$ sind und x_ω irgend einen beliebig gewählten Werth von x bedeutet, so wird den Bedingungsgleichungen (35) identisch genügt durch die Werthe:

$$\gamma_h^{\,i} = \left[\frac{\partial[y_i]}{\partial \alpha_h}\right]_{x=x_\omega},\quad \gamma_{n+h}^{\,i} = -\left[\frac{\partial[y_i]}{\partial a_h}\right]_{x=x_\omega}$$

der $2n^2$ Constanten γ und es wird für Werthe identisch:

$$U = \Delta(x, x_\omega).$$

Auf Grund dieses Satzes werde ich in den folgenden meinen Untersuchungen über die Kriterien des Maximum Minimums stets nur die ursprüngliche Reductionsformel vo unter der Voraussetzung kanonischer Constanten benutzen eben dadurch die bei der zweiten Reduction und bei nic nonischen Constanten auftretenden zweifelhaften Fälle gi vermieden werden. Daher wäre es für diese Untersuchung nicht nöthig gewesen, die Betrachtungen der §§ 7—11 v zuschicken. Es schien aber nicht uninteressant, die Untersu soweit als möglich ohne Hülfe der Hamilton-Jacobi'schen M zu führen; überdies wird weiter unten in dem Beispie Reduction von § 9 angewendet werden, um die Kriterie Minimums noch auf einem anderen Wege abzuleiten. Daheh ich es nicht für überflüssig, jene Betrachtungen vorangeh lassen, zumal da sie in dieser Weise bisher noch nicht ang worden sind.

In jenem Beispiele wird auch noch der folgende schön von Clebsch benutzt werden:

(69) . . . Wenn $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ die zu $a_1 a_2 \ldots a_n$ gehö kanonischen Constanten bedeuten, so den $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungsgleichungen (35) g durch die Werthe:

$$\gamma_{n+k}^{\sigma} = \gamma_1^{\sigma} c_1^{k} + \gamma_2^{\sigma} c_2^{k} \ldots \gamma_n^{\sigma} c_n^{k}$$

der $2n^2$ Constanten γ, sobald man nur a mein

$$c_h^{k} = c_k^{h}$$

annimmt, woraus folgt, dass man bei grundelegung kanonischer Constanten in Formeln der 2ten Reduction (§ 9) die $\frac{n}{2}$ vollkommen willkürlichen Constanten c_h^{k} erhält.

)er Beweis dieses Satzes ergiebt sich einfach durch Ein-
ıg der Werthe der Constanten γ^{σ}_{n+k} aus den Gleichungen
ı die Gleichungen (67), wodurch diese übergehen in:

$$0 = \sum_{1}^{n}\sum_{k} (\gamma_k{}^{\tau}\,\gamma_h{}^{\varrho} - \gamma_k{}^{\varrho}\,\gamma_h{}^{\tau})\,(c_h{}^{k} - c_k{}^{h}).$$

§ 13.

evor wir diesen ersten Theil der Untersuchung verlassen,
noch einige, aus den vorhergehenden Formeln sich fast
lbst ergebende Umformungen angemerkt werden, die für
rkliche Berechnung, namentlich wenn man die Differential-
ıngen der ersten Variation mittelst der Hamilton-Jacobi'schen
lle integrirt hat, von Nutzen sein können.
etzen wir den aus der Identität (55) folgenden Werth von

$$\frac{[y_i]}{\delta a_h} = -\frac{\partial[y_i]}{\partial\alpha_1}\left[\frac{\partial(\alpha_1)}{\partial a_h}\right] - \frac{\partial[y_i]}{\partial\alpha_2}\left[\frac{\partial(\alpha_2)}{\partial a_h}\right] - \ldots - \frac{\partial[y_i]}{\partial\alpha_n}\left[\frac{\partial(\alpha_n)}{\partial a_h}\right]$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial a_h} = \frac{\partial[y_i]}{\partial a_h} + \left[\frac{\partial(\alpha_1)}{\partial a_h}\right]_{\omega}\frac{\partial[y_i]}{\partial\alpha_1} + \left[\frac{\partial(\alpha_2)}{\partial a_h}\right]_{\omega}\frac{\partial[y_i]}{\partial\alpha_2} + \ldots \left[\frac{\partial(\alpha_n)}{\partial a_h}\right]_{\omega}\frac{\partial[y_i]}{\partial\alpha_n}$$

$$\ldots\; v_i{}^{h} = \frac{\partial[y_i]}{\partial a_h} + c_h{}^{1}\frac{\partial[y_i]}{\partial\alpha_1} + c_h{}^{2}\frac{\partial[y_i]}{\partial\alpha_2} + \ldots\, c_h{}^{n}\,\frac{\partial[y_i]}{\partial\alpha_n}$$

gehen diese Ausdrücke über in:

$$\left\{\begin{aligned} \omega_i{}^{h} &= W_1{}^{h}\,\frac{\partial[y_i]}{\partial\alpha_1} + W_2{}^{h}\,\frac{\partial[y_i]}{\partial\alpha_2} + \ldots\, W_n{}^{h}\,\frac{\partial[y_i]}{\partial\alpha_n} \\ v_i{}^{h} &= V_1{}^{h}\,\frac{\partial[y_i]}{\partial\alpha_1} + V_2{}^{h}\,\frac{\partial[y_i]}{\partial\alpha_2} + \ldots\, V_n{}^{h}\,\frac{\partial[y_i]}{\partial\alpha_n}, \end{aligned}\right.$$

$$\ldots\ldots \left\{\begin{aligned} W_k{}^{h} &= \left[\frac{\partial(\alpha_k)}{\partial a_h}\right]_{\omega} - \left[\frac{\partial(\alpha_k)}{\partial a_h}\right] \\ V_k{}^{h} &= c_h{}^{k} - \left[\frac{\partial(\alpha_k)}{\partial a_h}\right]. \end{aligned}\right.$$

Substitution dieser Werthe in die Determinanten S, $S(x, x_\omega)$
(x, x_ω) ergeben sich mit Rücksicht auf (61) die folgenden
rmationen:

$$(72)\quad \begin{cases} S = Y\Sigma \pm V_1^1 V_2^2 \ldots V_n^n \\ S(x, x_\omega) = Y.\Sigma \pm W_1^1 W_2^2 \ldots W_n^n = Y.\Pi(x, x \\ \Delta(x, x_\omega) = Y_\omega Y.\Sigma \pm W_1^1 W_2^2 \ldots W_n^n = Y_\omega Y.\Pi \end{cases}$$

Ganz ähnliche Umformungen treten auf bei der letzten formation, welche Clebsch*) mit der 2ten Variation vorgen hat. Diese Reduction, die man erhält, wenn man an Ste Variationen δy oder z die Variationen der Functionen (α) ei ist der Form nach entschieden die vollendetste. Allein s hält den grossen Nachtheil, dass man eben in Folge jene führung die Voraussetzung der Endlichkeit der Variation ihr aufgeben muss, eine Voraussetzung, die für die Ableitu Kriterien des Maximums und Minimums von grosser Wich ist. Aus diesem Grunde wird dieselbe hier nicht zur Anw kommen.

*) Crelle J. 55 pp. 348—355.

II.

Kriterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale.

§ 14.

ach diesen ziemlich umständlichen Vorbereitungen gehen
in endlich zu unserem eigentlichen Zwecke, d. i. zur Auf-
g der Kriterien des Maximums und Minimums der einfachen
ale über.
s kommt darauf an, die Bedingungen zu finden, unter
n die zweite Variation:

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \delta^2 I = \int_{x_0}^{x_1} \Omega_2 \, dx$$

positiv oder stets negativ ist für alle innerhalb der Grenzen
ien und stetigen Functionen z, welche den m Bedingungs-
ngen:

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\partial \Omega_2}{\partial \mu_k} = 0$$

n und in den beiden Grenzen verschwinden.
ach § 6 ist nun identisch:

$$2\Omega_2 = \sum_1^n \sum_1^n \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h' \, \partial y_i'}\right] \frac{U_h U_i}{U^2} - \frac{d}{dx} \sum_1^n \frac{z_i \Delta_i}{U}$$

$$+ 2 \sum_1^m \frac{R_k}{U} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \mu_k}.$$

Hieraus ergiebt sich mit Rücksicht auf die Bedingungen, e
die Variationen z zu genügen haben, durch Integration zv
den Grenzen x_0 und x_1:

$$(73) \quad \ldots \quad \delta^2 I = \tfrac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} dx \sum_{1}^{n} \sum_{1}^{n} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h' \, \partial y_i'} \right] \frac{U_h U_i}{U^2}.$$

Allein während die Formel (39) für jeden Werth von x u
alle beliebigen Werthe der $2n^2$ Constanten γ_i^σ gilt, voraus
nur, dass dieselben den $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungsgleichungen (3
nügen und dass für sie die Determinante U nicht identisc
ist, hat die Formel (73) keine so unbeschränkte Geltung

Indem wir nämlich bei der Ableitung der Formel (7
der Formel (39) für das bestimmte Integral:

$$-\tfrac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} dx \, \frac{d}{dx} \sum_{1}^{n} \frac{z_i \Delta_i}{U}$$

die Differenz der Grenzwerthe des unbestimmten:

$$(74) \quad \ldots \quad B = -\tfrac{1}{2} \sum_{1}^{n} \frac{z_i \Delta_i}{U}$$

gesetzt haben, welche verschwinden, da die Variationen z
Grenzen verschwinden sollen, so stellt die Formel (73)
lange die zweite Variation dar, als die Function B innerha
Grenzen nicht unendlich wird.

Es sind nun, wie die Formel (74) in Verbindung m
Werthen (37) der Δ_i zeigt, in Bezug auf das Unendlichv
der Function B drei verschiedene Fälle denkbar.

Einmal nämlich kann diese Function dadurch unendlic
den, dass einer oder mehrere der Coefficienten der Functi

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial \frac{dz_h}{dx}}$$

unendlich werden. Dieser Fall erfordert keine nähere Be
tung; er ist selbstverständlich stets auszuschliessen. Den
müssen immer annehmen, dass die sämmtlichen Coefficient
Function Ω_2 innerhalb der Grenzen des Integrals endlich bl
weil sonst die ganze Entwickelung der Function Ω nac
Taylor'schen Satze nicht mehr zulässig sein würde.

Die Endlichkeit der Function B könnte zweitens durch das
llichwerden einer oder mehrerer der Functionen

$$\frac{\partial[y_i]}{\partial a_h} \text{ und } \frac{\partial[\lambda_k]}{\partial a_h}$$

oben werden, aus denen die u_i^σ und r_k^σ auf lineare Weise
mengesetzt sind. Damit soll aber durchaus nicht gesagt
dass ein Unendlichwerden dieser Functionen nothwendig
immer ein Unendlichwerden der Function B nach sich zöge.
gentheil hat es sogar allen Anschein, als ob dieser Fall
ls eintreten könne. Wenigstens kann man aus der Stellung
$\frac{\partial[\lambda_k]}{\partial a_h}$ in der Formel (39), sowie daraus, dass die u^σ und r^σ
gen der Differentialgleichungen (24) sind, folglich von den
icken:

$$\frac{\partial \Omega_2^{\sigma}}{\partial u_h^{\sigma}} \text{ und } \frac{\partial \Omega_2^{\sigma}}{\partial \frac{du_h^{\sigma}}{dx}},$$

ide lineare Functionen der u^σ, $\frac{du^\sigma}{dx}$ und r_k^σ sind, der letzte
gemeinen nur in einer um eins niedrigeren Ordnung un-
n werden kann als der erste, gewisse Schlüsse ziehen,
diese Vermuthung äusserst wahrscheinlich machen und
im Besonderen zeigen, dass die Function B stets endlich
wenn nicht jene Functionen selbst, sondern nur ihre
ntialquotienten unendlich werden, ohne dass eine andere
e des Unendlichwerdens hinzutritt. Wie dem aber auch
: können wir doch jedenfalls diese Fälle als Ausnahmefälle
ten, die in jedem speciellen Falle einer besonderen Unter-
g zu unterwerfen sind, und in der That werden wir die-
e später noch in anderer Hinsicht als Ausnahmefälle auf-
sehen. Ich werde daher im Folgenden durchweg annehmen,
ne Functionen innerhalb der Grenzen des Integrals überall
bleiben, was durch passende Verengerung der Grenzen
erreicht werden kann.

e Function B wird aber drittens jedenfalls unendlich, wenn
nner $U = 0$ wird. Das Verschwinden von U hängt ab
n Werthen der $2n^2$ willkürlichen Constanten γ_i^σ und wir
daher mit Uebergehung der ausgeschlossenen Fälle und
wir selbstverständlich stets nur solche Werthe dieser Con-

stanten betrachten, welche den Bedingungsgleichungen (3
nügen, den folgenden Satz aussprechen:

(75) . . . So lange man die willkürlichen Const
γ_i^σ so bestimmen kann, dass die Determi
U innerhalb der Grenzen x_0 und x_1 nirg
Null wird, gilt für alle in Betracht kom
den Variationen z identisch die Formel:

$$(73) \ldots \delta^2 I = \tfrac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} dx \sum_1^n{}_h \sum_1^n{}_i \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h' \partial y_i'}\right] \frac{U_h U_i}{U^2},$$

in der diese Constanten eben so zu bestir
sind, dass innerhalb der Grenzen x_0 u
die Determinante U nirgends verschwin

Sobald man aber die obere Grenze x_1 weiter ausdehn
die Bedingung erlaubt, dass U nicht verschwinden darf –
wir werden sehen, dass sich aus dieser Bedingung im Allgeni
immer eine äusserste Grenze ergiebt, die nicht überschritt
nicht einmal erreicht werden darf — so wird die Forme
falsch und wir müssen dann entweder zu der ursprüng
Formel (10) oder zu der Formel von § 4

$$(13) \ldots \delta^2 I = \tfrac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} dx \sum_1^n{}_h \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial z_h} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_h'}\right) z_h$$

zurückgehen, in denen die Grenzen keinerlei Beschränk
unterworfen sind.

Die Grössen U_h in der Formel (73) können wir, insofe
nach (36) lineare Functionen der z und ihrer Differentialquot
sind, als willkürliche Variable betrachten, welche jedoch
(12) und (40) den m linearen Bedingungsgleichungen:

$$(76) \ldots \ldots \ldots \sum_1^n{}_h \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_h'}\right] U_h = 0$$

zu genügen haben.

§ 15.

Um nun die Kriterien des Maximums und Minimums b
leiten, werde ich zum Theil die Formel (73), zum The

(13) benutzen und die aus der einen Formel gezogenen
ngen mit denen vergleichen, die sich aus der andern
n.

ll die zweite Variation ein sicheres Kriterium des Maxi-
oder Minimums liefern, so muss sie weder ihr Zeichen
noch auch selbst verschwinden können, es sei denn, dass
nmtlichen Variationen z identisch Null würden. Denn
ie zweite Variation verschwindet, so wird die Aenderung
grals von der dritten Ordnung und kann daher im All-
n sowohl positiv als auch negativ werden.

s vorausgeschickt ziehen wir zunächst aus (75) den fol-
Schluss:

. Wenn man die willkürlichen Constanten γ_i^σ so bestimmen kann, dass die Determinante U innerhalb der Grenzen x_0 und x_1 nicht verschwindet, und wenn überdies die homogene Function zweiter Ordnung:

$$\ldots\ldots 2A_1 = \sum_1^n{}_h \sum_i \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h' \partial y_i'}\right] U_h U_i,$$

zwischen deren n willkürlichen Argumenten U_h die m linearen Bedingungsgleichungen (76) bestehen, innerhalb dieser Grenzen ihr Zeichen nicht ändert, so kann die zweite Variation $\delta^2 I$ weder ihr Zeichen ändern, noch selbst verschwinden und es findet also dann für diejenigen Functionen y, welche $\delta I = 0$ machen, sicher ein Maximum oder ein Minimum statt.

erste Theil dieses Satzes ist sehr leicht zu beweisen.
der Definition des bestimmten Integrals als Summe folgt
dass das Integral $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$ einer Function $f(x)$, die
der Grenzen x_0 und x_1 endlich bleibt, oder höchstens
nendlich wird, dass ihr Integral noch einen bestimmten
Sinn behält, und die überdies zwischen diesen Grenzen
iv oder nie positiv werden kann, stets einen positiven
rativen Werth besitzt und nur dann verschwinden kann,

wenn die Function $f(x)$ innerhalb der Grenzen identisc
wird.

Eine Function dieser Art ist aber nach den Voraussetz
unseres Satzes die Function $\frac{2A_1}{U^2}$. Wir sehen also, dass
diese Voraussetzungen erfüllt sind, das Integral (73) stets d
Zeichen haben muss, welches die Function $2A_1$ innerhal
Grenzen x_0 und x_1 besitzt, und dass es nur dann versch
kann, wenn die Function $2A_1$ innerhalb der Grenzen i
Null wird.

Um daher die Frage zu entscheiden, ob durch die
gungen des obigen Satzes das Verschwinden des Integra
schon ausgeschlossen ist, oder nicht, müssen wir die F
$2A_1$ in Bezug auf ihr Verschwinden näher untersuchen.

Aus der Algebra ist bekannt, dass sich jede homoge
ction zweiter Ordnung von n Argumenten, zwischen d
lineare homogene Bedingungsgleichungen bestehen, in ein A
von $n - m$ Quadraten umformen lässt.

Setzt man:

$$(79) \quad \ldots \quad U_h = p_h^1 V_1 + p_h^2 V_2 + \ldots p_h^{n-m} V_{n-m},$$

so kann man die $n(n - m)$ Coefficienten p_h^i so bestimme
diese Werthe der U_h den m Bedingungsgleichungen (76) g
und überdies die beiden Gleichungen zu identischen mach

$$2A_1 = \varrho_1 V_1^2 + \varrho_2 V_2^2 + \ldots \varrho_{n-m} V_{n-m}^2$$

$$\sum_1^n {}_h U_h^2 = \quad V_1^2 + \quad V_2^2 + \ldots \quad V_{n-m}^2.$$

Die Grössen ϱ sind dann die Wurzeln der Gleichung:

$$\begin{vmatrix}
\left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_1' \partial y_1'}\right] - \varrho, & \ldots \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_n' \partial y_1'}\right], & \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1'}\right], & \ldots \left[\frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1'}\right] \\
\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
\left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_1' \partial y_n'}\right], & \ldots \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_n' \partial y_n'}\right] - \varrho, & \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n'}\right], & \ldots \left[\frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n'}\right] \\
\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1'}\right], & \ldots \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n'}\right], & 0, & \ldots 0 \\
\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
\left[\frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1'}\right], & \ldots \left[\frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n'}\right], & 0, & \ldots 0
\end{vmatrix}$$

oefficient der 0ten Potenz von ϱ in dieser Gleichung ist nun
die Determinante $[R]$, die nach unserer Grundvoraussetzung
identisch Null ist.

Daraus folgt, dass keine Wurzel ϱ der obigen Gleichung
sich Null sein kann. Die Function $2A_1$ lässt sich daher bei
immt bleibendem x nicht auf ein Aggregat von weniger als
n Quadraten transformiren. Soll dieselbe überdies, wie es
atz verlangt, innerhalb der Grenzen x_0 und x_1 ihr Zeichen
ändern, so müssen die $n - m$ Coefficienten ϱ zwischen
Grenzen stets positiv oder stets negativ bleiben. Es kann
ch alsdann innerhalb der Grenzen x_0 und x_1 die Function
ur dadurch für jeden Werth von x verschwinden, dass die
lichen $n - m$ Grössen V identisch Null werden, und dies
tin Folge der Substitutionen (79) das Verschwinden der n
n U_h nach sich.

ies Resultat, verbunden mit dem Vorhergehenden, zeigt,
wenn die Bedingungen des Satzes (77) erfüllt sind, das
l (73) nur verschwinden kann für solche Functionen z,
Lösungen der n simultanen Differentialgleichungen erster
ng

$$\ldots\ldots U_1 = 0,\ U_2 = 0, \ldots U_n = 0$$

Da aber nur solche Functionen z in Rechnung zu bringen
welche in den beiden Grenzen verschwinden, so müssen
ch hinzufügen, dass diese Lösungen in den beiden Grenzen
gl. die beiden folgenden §§) überhaupt für irgend zwei
edene Werthe von x innerhalb der Grenzen verschwinden

innert man sich aber der Werthe (36) der U_h, so sieht
lass die allgemeinen Lösungen der n simultanen Differen-
chungen erster Ordnung (80) folgende sind:

$$\ldots\ldots z_h = c_1 u_h^{\,1} + c_2 u_h^{\,2} + \ldots c_n u_h^{\,n},$$

die Grössen c willkürliche Constanten bezeichnen. Wenn
liese n Lösungen, ohne identisch Null zu werden, für
einen Werth von x gleichzeitig verschwinden sollen, so
ie Determinante:

$$U = \Sigma \pm u_1^{\,1}\, u_2^{\,2} \ldots u_n^{\,n}$$

en Werth von x verschwinden. Nun waren aber in dem
e (73) die willkürlichen Constanten der $u_h^{\,\sigma}$ gerade so zu

bestimmen, dass innerhalb der Grenzen x_0 und x_1 diese
minante nirgends verschwinden konnte. Es können dah
n Ausdrücke (81) innerhalb dieser Grenzen niemals gleic
für einen, geschweige denn für zwei Werthe von x verschw
Damit ist nach (75) auch der zweite Theil unseres Satz
wiesen: wir sehen, dass die zweite Variation weder ihr Z
ändern, noch selbst verschwinden kann, sobald die Bedin
des Satzes (77) erfüllt sind. —

Der Umstand, dass die zweite Variation nicht versch
kann, wenn die beiden Voraussetzungen des Satzes (77)
sind, ist von der höchsten Wichtigkeit. Es ist dies, wenn
will, keine neue Bemerkung. Denn indem in den meiste
handlungen geradezu gesagt wird, dass ein Maximum od
Minimum stattfindet, sobald jene Voraussetzungen erfüllt si
scheint es als selbstverständlich angenommen zu werden,
dieselben die Möglichkeit des Verschwindens der zweiten Va
schon ausschliessen. Es findet sich aber, soviel ich weiss,
Punct nirgends ausdrücklich hervorgehoben*). Ich bin au
selben zuerst aufmerksam gemacht worden durch Herrn
Richelot, in den Vorlesungen, die derselbe im Winter 18
über Variationsrechnung hielt.

Um mich kürzer fassen zu können, werde ich im Folg
immer voraussetzen, dass die homogene Function (78) die
schaft besitzt, welche der Satz (77) verlangt, dass sie al
Rücksicht auf die durch die Gleichungen (76) beschränkte
kürlichkeit ihrer Argumente innerhalb der in Betracht kom
den Grenzen ihr Zeichen nie ändern kann.

Dies festgesetzt können wir den Richelot'schen
also aussprechen:

(82) . . . So lange man die willkürlichen Const
γ_i^{σ} so bestimmen kann, dass die Determi
U innerhalb der Grenzen x_0 und x_1 nirg

*) Lipschitz am Schlusse seiner Abhandlung (Crelle, J. 65
zeigt nur, dass unter den gemachten Voraussetzungen die zwe
riation nicht anders verschwinden kann, als indem sämmtliche n C
U_h identisch verschwinden, untersucht aber nicht, ob ein solch
schwinden mit diesen Voraussetzungen und den Grenzbedingung
träglich ist oder nicht.

Null wird, kann auch die zweite Variation selbst nie verschwinden.

§ 16.

aus diesem Satze folgt nun zunächst leicht, dass es im All-nen immer eine äusserste Grenze x^1 giebt, welche die obere e x_1 nicht überschreiten, ja nicht einmal erreichen darf, es möglich sein soll, die Constanten $\gamma_\sigma{}^i$ der ausgesprochenen rung gemäss zu bestimmen.

ie Formel:

$$\ldots \quad \delta^2 I = \tfrac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} dx \sum_1^n{}_h \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial z_h} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_h'} \right) z_h$$

nämlich, dass die zweite Variation für Werthe von z, welche Bedingungsgleichungen (12) genügen und in den beiden n Null werden, immer dann verschwinden kann, wenn x^1 geworden ist, wo x^1 die zunächst an x_0 gelegene Wur-Gleichung bezeichnet:

$$\Delta(x, x_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial [y_1]}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial [y_1]}{\partial a_n} & \frac{\partial [y_1]}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial [y_1]}{\partial \alpha_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial [y_n]}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial [y_n]}{\partial a_n} & \frac{\partial [y_n]}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial [y_n]}{\partial \alpha_n} \\ \frac{\partial [y_1]_0}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial [y_1]_0}{\partial a_n} & \frac{\partial [y_1]_0}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial [y_1]_0}{\partial \alpha_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial [y_n]_0}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial [y_n]_0}{\partial a_n} & \frac{\partial [y_n]_0}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial [y_n]_0}{\partial \alpha_n} \end{vmatrix} = 0,$$

nach unserer früheren Bezeichnung $\frac{\partial [y_h]_0}{\partial u}$ den Werth von ir $x = x_0$ bedeutet.

der That sind nach § 6 die allgemeinen Lösungen der tialgleichungen

$$\ldots \quad \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_h} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_h'} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_2}{\partial \mu_k} = 0$$

enden:

$$(84) \ldots z_h = c_1 \frac{\partial[y_h]}{\partial a_1} + \ldots c_n \frac{\partial[y_h]}{\partial a_n} + \gamma_1 \frac{\partial[y_h]}{\partial \alpha_1} + \ldots \gamma_\nu$$

$$(85) \ldots \mu_k = c_1 \frac{\partial[\lambda_k]}{\partial a_1} + \ldots c_n \frac{\partial[\lambda_k]}{\partial a_n} + \gamma_1 \frac{\partial[\lambda_k]}{\partial \alpha_1} + \ldots \gamma_\nu$$

Da nun nach Voraussetzung die Determinante $\Delta(x, x_0)$ für $x =$ verschwinden soll, so kann man die $2n$ willkürlichen Con c und γ immer so bestimmen, dass die n Ausdrücke (δ $x = x_0$ und $x = x^1$ sämmtlich $= 0$ werden. Ist daher $x_1 =$ so braucht man nur den μ die Werthe (85) und den Werthe (84) zu geben, von denen die letzteren in den Grenzen x_0 und x^1 verschwinden, um die zweite Variation verschwinden zu machen. Der Fall $x^1 < x_1$ wird sofort a vorigen zurückgeführt, wenn man innerhalb der Grenzen x^1 die Variationen z sämmtlich $= 0$ setzt, indem dann

$$\delta^2 I = \tfrac{1}{2} \int_{x_0}^{x^1} dx \sum_1^n{}_h \left[\frac{\partial \Omega_2}{\partial z_h} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_h'} \right] z_h$$

wird.

Da nun für diejenigen Grenzen x_0 und x_1, innerhalb die Voraussetzung des Satzes (82) erfüllt ist, die zweite Va niemals verschwinden kann, so muss nothwendig die äu Grenze x_1, für welche der Satz (82) noch gilt, zwischen x^1 liegen. Sobald sie dagegen $\geq x^1$ geworden ist, so ka jener Bedingung sicher nicht mehr genügen.

Aus dem Umstande, dass die zweite Variation imm schwinden kann, sobald man die obere Grenze x_1 über auch nur bis zu x^1 ausdehnt, erhellt zugleich, dass ein Ma oder Minimum jedenfalls nur so lange stattfinden kann, s obere Grenze zwischen x_0 und x^1 bleibt.

§ 17.

Es fragt sich nun aber, ob umgekehrt, wenn die Grenze zwischen x_0 und x^1 liegt, die willkürlichen Co γ_i^σ sich auch wirklich immer so bestimmen lassen, dass halb der Grenzen x_0 und x_1 die Determinante U nirgen wird.

m diese Frage zu entscheiden, will ich zunächst die Schluss-
des vorigen § noch etwas weiter verfolgen.
:h behaupte, dass die zweite Variation immer verschwinden
sobald die Determinante

$$\Delta(x_q,\ x_p)$$

gend zwei verschiedene Werthe x_p und x_q innerhalb der
n x_0 und x_1 verschwindet.
ı der That nehmen wir die n Variationen z ausserhalb des
ılles x_p bis x_q constant $= 0$ an, so wird:

$$\delta^2 I = \tfrac{1}{2}\int_{x_p}^{x_q} dx \sum_1^n{}_h \left[\frac{\partial \Omega_2}{\partial z_h} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega_2}{\partial z_h'}\right] z_h.$$

nun $\Delta(x_q,\ x_p) = 0$ ist, so können wir die $2n$ Constanten
γ so bestimmen, dass die n Ausdrücke (84) sowohl für
$_p$ wie für $x = x_q$ verschwinden, und indem wir dann den
ı z und μ die Werthe (84) und (85) geben, wird $\delta^2 I = 0$.
t demnach die Bedingung des Satzes (82) erfüllt, so kann
) erminante $\Delta(x_q,\ x_p)$ niemals Null werden, so lange x_p und
erhalb der Grenzen x_0 und x_1 liegen und nicht zusam-
en. Wir haben demnach im Besonderen den Satz:

. . Sobald es möglich ist, die willkürlichen Constanten γ_i^σ so zu bestimmen, dass die Determinante U innerhalb der Grenzen x_0 und x_1 nie $= 0$ wird, kann auch die Determinante:

$$\Delta\ (x,\ x_1)$$

für keinen Werth von x verschwinden, der kleiner als x_1 und grösser oder gleich x_0 ist.

hmen wir nun an, dass $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n$ die zu $a_1\ a_2 \ldots a_n$
en kanonischen Constanten der Lösungen $[y]$ seien. Dann
wir nach dem Satze (68) die $2n^2$ Constanten γ_i^σ so be-
ı, dass den Bedingungsgleichungen (35) genügt und
h:

$$U = \Delta\ (x,\ x_\omega)$$

vo x_ω irgend einen beliebigen constanten Werth von x
t.
s vorausgeschickt sei:

$$x_0 < x^0 < x_1 < x^1.$$

Dann kann die Determinante $\Delta(x, x_0)$ innerhalb der G
x^0 und x_1 nie verschwinden, weil eben x^0 und x_1 zwisch
auf einander folgenden Wurzeln der Gleichung $\Delta(x, x$
liegen sollen. Nach dem eben angeführten Satze können
Constanten γ_i^σ so bestimmen, dass identisch

$$U = \Delta(x, x_0)$$

wird, also die Determinante U innerhalb der Grenzen x^0
nirgends verschwindet. Daraus folgt nach (86), dass au
Determinante $\Delta(x, x_1)$ niemals verschwinden kann, s
$x^0 \leqq x < x_1$ ist. Aber diese Determinante wird auch für
nicht Null. Denn nach (83) ist:

$$\Delta(x_0, x) = (-1)^n \Delta(x, x_0).$$

Es hindert uns überdies nichts, x^0 so nahe als wir wolle
rücken zu lassen. Daher kann $\Delta(x, x_1)$ auch zwischen x_0
nicht verschwinden.

Lassen wir $x_1 + \varepsilon$ an die Stelle von x_1 treten, so
wir das gefundene Resultat also aussprechen:

Die Determinante

$$\Delta(x, x_1 + \varepsilon)$$

kann innerhalb der Grenzen x_0 und x_1 niemals Null
so lange

$$x_0 < x_1 < x_1 + \varepsilon < x^1$$

ist.

Da wir nun $x_1 + \varepsilon$ beliebig nahe an x^1 und ε belieb
annehmen können, da wir ferner aus dem Satze (68) wisse
für die, den Bedingungsgleichungen (35) genügenden We

$$\gamma_h^i = \left[\frac{\partial[y_i]}{\partial \alpha_h}\right]_{x=x_1+\varepsilon}, \quad \gamma_{n+h}^i = -\left[\frac{\partial[y_i]}{\partial a_h}\right]_{x=x_1+\varepsilon}$$

der $2n^2$ Constanten γ_σ^i identisch:

$$U = \Delta(x, x_1 + \varepsilon)$$

wird, so sehen wir nicht nur, dass, so lange x_1 zwischen
x^1 bleibt, jene Constanten immer so bestimmt werden k
dass die Determinante U innerhalb der Grenzen x_0 und
gends verschwindet, sondern lernen sogar eine Lösung
Aufgabe kennen.

Hierbei ist jedoch nicht zu vergessen, dass alle dies
nur gelten unter der Voraussetzung, dass die homogene F

zwischen den betreffenden Grenzen ihr Zeichen nicht ändern
re.

§ 18.

Die vorhergehenden Resultate verbunden mit dem Satze (77)
n uns nun schliesslich das folgende Kriterium des Maximums
Minimums:

. . . So lange die obere Grenze x_1 zwischen x_0 und der zunächst an x_0 gelegenen Wurzel x^1 der Grenzgleichung

$$\Delta(x, x_0) = 0$$

bleibt, wird das vorgelegte Integral für diejenigen Functionen y, welche die erste Variation verschwinden machen, stets ein Maximum oder Minimum, vorausgesetzt, dass die homogene Function

$$2A_1 = \sum_1^n{}_h \sum_1^n{}_i \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h' \partial y_i'}\right] U_h U_i,$$

deren n willkürliche Argumente U_h den m Bedingungsgleichungen:

$$\sum_1^n{}_h \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_h'}\right] U_h = 0$$

unterworfen sind, innerhalb dieser Grenzen ihr Zeichen nicht ändern kann; dagegen findet weder ein Maximum noch ein Minimum statt, sobald $x_1 \geq x^1$ geworden ist.

Vobei jedoch aus § 14 in Erinnerung zu bringen ist, dass
es die Coefficienten der ursprünglichen Function Ω inner-
ler Grenzen x_0 und x_1 endlich bleiben müssen und dass
en Fällen ganz abgesehen worden ist, in denen ein Unend-
rden irgend welcher der Functionen $\frac{\partial[y]}{\partial a}$ und $\frac{\partial[\lambda]}{\partial a}$ inner-
er Grenzen eintritt. Auf diese letzteren Fälle werde ich
noch zurückkommen.

er Satz (87) ist zunächst nur bewiesen unter der Voraus-
g, dass $\alpha_1 \ldots \alpha_n \; \alpha_1 \ldots \alpha_n$ kanonische Constanten seien

Da aber, wenn man statt dieser Grössen irgend $2n$ von ei
unabhängige Functionen derselben als neue Constanten ei
die Functionaldeterminante der $2n$ Functionen $[y_h]$ und $[$
Bezug auf diese neuen Constanten sich von der Determ
$\Delta(x, x_0)$ nur durch einen constanten Factor unterschei
erhellt, dass der Satz auch gilt, wenn $a_1 \ldots a_n \alpha_1 \ldots$
überhaupt ein vollständiges System Integrationsconstante
Differentialgleichungen (6) bilden.

Man sieht aber mit Rücksicht auf die Sätze von § 1
man denselben auch ohne Hülfe kanonischer Constanten
beweisen können; nur wäre es dann eben zweifelhaft geb
ob nicht für gewisse besondere Werthe der unteren Gre
(namentlich für die Wurzeln der Gleichung $Y_0 = 0$) Ausn
stattfinden könnten.

§ 19.

Die Hauptrolle spielt, wie man sieht, in den Kriteri
Maximums und Minimums die Grenzgleichung:

$$\Delta(x, x_0) = 0.$$

Es ist daher jedenfalls nicht uninteressant, die Bedeutun
selben etwas näher zu untersuchen.

Die $2n$ Integrationsconstanten a und α der Lösunge
waren aus den $2n$ Gleichungen:

(88) . . . . . $y_{h0} = [y_h]_0, \; y_{h1} = [y_h]_1$

zu bestimmen, in denen links die gegebenen Grenzwerthe,
die Werthe der Lösungen für $x = x_0$ resp. $x = x_1$
Die Einsetzung der daraus folgenden Werthe dieser Constan
die Functionaldeterminante der $2n$ Functionen $[y_h]$ und
nach den a und α ergab die Determinante, die wir mit Δ
bezeichnet haben.

Sind die Lösungen $[y_h]$ linear in Bezug auf ihre
tegrationsconstanten, so ist die Determinante $\Delta(x, x_0)$ unab
von diesen Constanten. Wenn daher x_1 eine Wurzel der Gle
$\Delta(x, x_0) = 0$ ist, so kann man den $2n$ Grenzbedingungen
mehr genügen bei beliebiger Annahme der Grenzwert
und y_{h1}.

ehmen wir nun aber an, die Gleichungen (88) seien nicht
a in Bezug auf die $2n$ Integrationsconstanten. Dann werden
us diesen Gleichungen im Allgemeinen mehrere verschiedene
r systeme der Constanten ergeben, welche denselben Grenz-
(:n der y entsprechen. Es wird sich aber ereignen können,
s ür einen gewissen Werth von x_1 zwei dieser Werthsysteme
a menfallen. Untersuchen wir, wann dies stattfindet. Der
t neren Darstellung halber mögen dabei die $2n$ Integrations-
s nten wieder mit $a_1\ a_2 \ldots a_{2n}$ bezeichnet werden.

us den $2n-1$ Gleichungen:

$$\ldots \begin{cases} y_{21} = [y_2]_1, \ldots . y_{n1} = [y_n]_1 \\ y_{10} = [y_1]_0,\ y_{20} = [y_2]_0, \ldots . y_{n0} = [y_n]_0 \end{cases}$$

n wir uns die $2n-1$ Constanten:

$$a_2\ a_3 \ldots a_{2n}$$

rückt denken durch:

$$a_1\ y_{21} \ldots y_{n1}\ y_{10}\ y_{20} \ldots y_{n0}.$$

ubstituiren wir diese Werthe in die Gleichungen (A) und
Gleichung:

$$\ldots \ldots \ldots [y_1]_1 - y_{11} = 0,$$

den die ersteren identisch erfüllt, während uns die letzte
erth der übriggebliebenen Constanten a_1 liefert. Differentiiren
ber die $2n$ Gleichungen (B) und (A) nach a_1 und denken
r die $a_2\ a_3 \ldots a_{2n}$ überall jene Werthe gesetzt, so erhalten
e $2n$ identischen Gleichungen:

$$\frac{d[y_1]_1}{da_1} = \frac{\partial[y_1]_1}{\partial a_1} + \frac{\partial[y_1]_1}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial a_1} + \ldots \frac{\partial[y_1]_1}{\partial a_{2n}}\frac{\partial a_{2n}}{\partial a_1}$$

$$0 = \frac{\partial[y_2]_1}{\partial a_1} + \frac{\partial[y_2]_1}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial a_1} + \ldots \frac{\partial[y_2]_1}{\partial a_{2n}}\frac{\partial a_{2n}}{\partial a_1}$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$0 = \frac{\partial[y_n]_1}{\partial a_1} + \frac{\partial[y_n]_1}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial a_1} + \ldots \frac{\partial[y_n]_1}{\partial a_{2n}}\frac{\partial a_{2n}}{\partial a_1}$$

$$0 = \frac{\partial[y_1]_0}{\partial a_1} + \frac{\partial[y_1]_0}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial a_1} + \ldots \frac{\partial[y_1]_0}{\partial a_{2n}}\frac{\partial a_{2n}}{\partial a_1}$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$0 = \frac{\partial[y_n]_0}{\partial a_1} + \frac{\partial[y_n]_0}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial a_1} + \ldots \frac{\partial[y_n]_0}{\partial a_{2n}}\frac{\partial a_{2n}}{\partial a_1},$$

aus denen durch Elimination der $2n-1$ Grössen $\frac{\partial a_h}{\partial a_1}$ folg

$$\frac{d[y_1]_1}{da_1}\left|\begin{array}{ccc}\frac{\partial[y_2]_1}{\partial a_2} & \frac{\partial[y_2]_1}{\partial a_3} & \cdots \frac{\partial[y_2]_1}{\partial a_{2n}}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial[y_n]_1}{\partial a_2} & \frac{\partial[y_n]_1}{\partial a_3} & \cdots \frac{\partial[y_n]_1}{\partial a_{2n}}\\ \frac{\partial[y_1]_0}{\partial a_2} & \frac{\partial[y_1]_0}{\partial a_3} & \cdots \frac{\partial[y_1]_0}{\partial a_{2n}}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial[y_n]_0}{\partial a_2} & \frac{\partial[y_n]_0}{\partial a_3} & \cdots \frac{\partial[y_n]_0}{\partial a_{2n}}\end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc}\frac{\partial[y_1]_1}{\partial a_1} & \frac{\partial[y_1]_1}{\partial a_2} & \cdots \frac{\partial[y_1]_1}{\partial a_2}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial[y_n]_1}{\partial a_1} & \frac{\partial[y_n]_1}{\partial a_2} & \cdots \frac{\partial[y_n]_1}{\partial a_2}\\ \frac{\partial[y_1]_0}{\partial a_1} & \frac{\partial[y_1]_0}{\partial a_2} & \cdots \frac{\partial[y_1]_0}{\partial a_2}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial[y_n]_0}{\partial a_1} & \frac{\partial[y_n]_0}{\partial a_2} & \cdots \frac{\partial[y_n]_0}{\partial a_2}\end{array}\right|$$

Setzt man in dieser identischen Formel für a_1 den Wertl sich aus der Gleichung (B) ergiebt, so wird ihre rechte St

$$= \Delta(x_1, x_0).$$

Wenn daher für diesen Werth von a_1:

$$\frac{d[y_1]_1}{da_1} = 0$$

ist, so ist auch:

$$\Delta(x_1, x_0) = 0,$$

und umgekehrt, wenn $\Delta(x_1, x_0) = 0$ ist (von der Wurl der Grenzgleichung wird selbstverständlich immer abgesehe genügt der aus (B) folgende Werth von a_1 gleichzeitig auc Gleichung:

$$\frac{d[y_1]_1}{da_1} = \frac{d([y_1]_1 - y_{11})}{da_1} = 0,$$

d. h. die Gleichung (B) besitzt in diesem Falle zwei gi Wurzeln a_1 und folglich erhalten dann auch die Consl $a_2\, a_3 \ldots a_{2n}$ je zwei gleiche Werthe.

Wir erkennen hieraus die folgende analytische Bedeu der Grenzgleichung:

(89) . . . Für die Wurzeln x_1 der Grenzgleic $\Delta(x, x_0) = 0$ fallen zwei verschiedene u zelsysteme der $2n$ Gleichungen:

$$y_{h0} = [y_h]_0,\ y_{h1} = [y_h]_1,$$

aus denen sich die Integrationsconstanten der Lösungen durch die Grenzwerthe der Variabeln bestimmen, in eins zusammen.*)

dem von Jacobi behandelten Falle, wo das Maximum inimum des Integrales:

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', \ldots y^{(n)})\, dx$$

wird, reducirt sich**) die homogene Function $2A$ auf die re:

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)} \partial y^{(n)}}\right] \frac{U_n^2}{U^2},$$

$$y_1 = y,\ y_2 = y',\ \ldots\ y_n = y^{(n-1)}$$
$$z_1 = z,\ z_2 = z',\ \ldots\ z_n = z^{(n-1)}$$

en ist.

Mit Rücksicht auf die eben gefundene Bedeutung der Grenzung erhält man daher aus dem Satze von § 18 in diesem erade dasselbe Kriterium, welches Jacobi im 17. Bd. des chen Journales ohne Beweis angegeben hat. ***)

Die obige Deutung der Grenzgleichung kann öfters für eine cische Interpellation der Grenzgleichung sehr nützlich sein, man auch Jacobi aus ihr die geometrischen Kriterien für gral der kleinsten Wirkung in dem Falle der elliptischen ung eines Planeten abgeleitet hat. Nur darf man über jene , welche eigentlich nur dann Sinn hat, wenn die Glei- (88) nicht linear sind in Bezug auf die Integrationsen, nicht vergessen, dass die Grenzgleichung auch dann wenn diese Gleichungen linear sind.

---

ieser Satz ist nur eine specielle Form des Satzes p. 102, 4., obi'schen Vorlesungen über Dynamik.

Vgl. Clebsch, Crelle J. 55, p. 267.

*Bei dem Integrale, welches im Princip der kleinsten Wirkung lt wird, bleibt, wie man leicht erkennt, die homogene Function e positiv. Es ergeben sich daher aus dem Obigen für das Mieses Integrals die nämlichen Kriterien, welche man in den schen Vorlesungen über Dynamik p. 48 ausgesprochen findet.

Es verdient noch angemerkt zu werden, dass man
§ 10 (61) und § 13 (72) die Grenzgleichung in folgende
Formen aufstellen kann:

$$\Delta(x, x_0) = 0$$
$$Y_0 S(x, x_0) = 0$$
$$YY_0 \Pi(x, x_0) = 0,$$

deren Definitionen sich in den angegebenen §§ finden.
diesen drei Formen ist namentlich die letzte sehr bequem,
man die Differentialgleichungen des Urproblems mit Hül
Hamilton'schen partiellen Differentialgleichung integrirt hat.
vierte, nur für kanonische Constanten geltende Form ist
dem Satze (68) die folgende:

$$\Sigma \pm u_1^1 u_2^2 \ldots u_n^n = 0,$$

worin:

$$u_i^\sigma = \sum_1^n{}_h' \left(\frac{\partial [y_\sigma]_0}{\partial \alpha_h} \frac{\partial [y_i]}{\partial \alpha_h} - \frac{\partial [y_\sigma]_0}{\partial a_h} \frac{\partial [y_i]}{\partial \alpha_h} \right).$$

§ 20.

Bevor ich diesen Gegenstand verlasse, muss ich noch
Worte über jene ausgeschlossenen Fälle hinzufügen, in
eine oder mehrere der Functionen:

$$(90) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\partial [y_i]}{\partial a_h} \text{ und } \frac{\partial [\lambda_k]}{\partial a_h}$$

innerhalb der Integrationsgrenzen unendlich werden, und na
lich angeben, in welcher Weise dieselben als Ausnahmefä
scheinen.

Wir haben dieselben bisher nur insofern als zweif
Fälle kennen gelernt, als ihr Eintreffen die Endlichkeit der Fu
B und damit die Gültigkeit des Satzes (75) in Frage stellen k
Ob ein Unendlichwerden jener Functionen unter Umständen
lich diesen Satz ausser Kraft setzen kann, oder ob derselbe
vielmehr gilt, so lange nur kein Coefficient der Function S
endlich wird, bleibe dahingestellt. Ich habe Gründe ange
welche für die letztere Ansicht sprechen, es ist mir aber
gelungen, die Richtigkeit derselben in einer Weise darz
die mir völlig genügte.

llein die in Rede stehenden Fälle zeigen sich wenigstens
nserer Betrachtungsweise auch dann als Ausnahmefälle, wenn
nction B endlich bleibt und daher die Sätze von § 14
5 ihre Geltung behalten. Der Schluss nämlich, dass die
Variation immer verschwinden kann, sobald die obere
gleich oder grösser als die zunächst an x_0 gelegene
l x^1 der Grenzgleichung $\Delta(x, x_0) = 0$ geworden ist, ist
lange streng, als die Functionen (90) innerhalb der Grenzen
bleiben, und daher verlieren die sämmtlichen Schlüsse
16—18 ihre Beweiskraft, wenn jene Functionen nicht
bleiben.

m diese Behauptung zu rechtfertigen, müssen wir uns die
r Schlussweise von § 16 vergegenwärtigen.

Wir gingen aus von der Formel:

$$\ldots\ldots \delta^2 I = \tfrac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} dx \sum_1^n{}_h \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial z_h} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_h'} \right) z_h .$$

wurde durch Integration erhalten aus der identischen Um-
ng von § 4. Die Anwendbarkeit derselben setzt also voraus,
ur solche, den Gleichungen (12) genügende Functionen z
rachten sind, für welche die Function;

$$\mathfrak{B} = \sum_1^n{}_h \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_h'} z_h$$

lb der Grenzen endlich bleibt.

nsere Schlüsse von § 16 und 17 sind daher nur so lange
, als die Functionen:

$$(84)\ z_i = \sum_1^{2n}{}_h \gamma_h \frac{\partial [y_i]}{\partial a_h}, \qquad (85)\ \mu_k = \sum_1^{2n}{}_h \gamma_h \frac{\partial [\lambda_k]}{\partial a_h}$$

Bedingung Genüge leisten, welche endlichen Werthe die
stanten γ auch haben mögen.

enn nun aber die Functionen (90) innerhalb der Grenzen
sämmtlich endlich bleiben, so wird im Allgemeinen die
n $\mathfrak{B}$ eben auch nicht endlich bleiben, wenn man in ihr
riabeln z, μ die obigen Werthe giebt. Es wird daher
für diese Werthe das Integral:

$$\delta^2 I = \int_{x_0}^{x_1} \Omega_2 \, dx$$

gar keinen bestimmten endlichen Werth mehr haben und kann daher nicht mehr sagen, dass dasselbe den Werth Nu nimmt, sobald sich die $2n$ Constanten γ so bestimmen l dass die n Ausdrücke (84) in den beiden Grenzen verschwi sondern dies wird erst dann der Fall sein, wenn man dies stimmung so einrichten kann, dass die Factoren γ_h derje Functionen (90) verschwinden, welche innerhalb der Grenze endlich werden.

Immerhin aber können wir, wenn die Function B in jenigen Punkten endlich bleibt, in welchen ein Unendlichw einer oder mehrerer der Functionen (90) eintritt, aus den S (68) und (77) schliessen, dass ein Maximum oder Minimum j falls so lange stattfindet, als sowohl die obere wie die u Grenze zwischen zwei auf einander folgenden Wurzeln der G gleichung liegen und die homogene Function (78) innerhalb Grenzen ihr Zeichen nicht ändert. Dagegen bleibt es in d Fällen allerdings zweifelhaft, erstens ob die Grenzgleichung lich die äusserste Grenze des Maximums oder Minimums li oder ob sich nicht vielleicht die willkürlichen Constanter Reduction so bestimmen lassen, dass ihr Nenner auch inne eines weiteren Grenzenintervalles nicht verschwindet, und zwe ob der eben gemachte Schluss auch dann noch richtig b wenn die untere Grenze mit der Wurzel x_0 der Grenzgleic zusammenfällt. Dieser letztere Zweifel wird sich nach § jedem Beispiele dadurch entscheiden lassen, dass man unters ob die Determinante

$$\Delta(x, x_1)$$

verschwinden kann, so lange

$$x_0 \leqq x < x_1 < x^1$$

bleibt. Kann sie nicht verschwinden, so hindert uns nichts untere Grenze mit x_0 zusammenfallen zu lassen.

In dem einfachsten Falle, wo das Maximum oder Mini des Integrales:

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$$

gesucht wird, hat Jacobi durch ganz andere Betrachtungen gezeigt, dass, so lange x_1 zwischen x_0 und der zunächst gelegenen Wurzel der Grenzgleichung:

$$\frac{\partial[y]}{\partial a_1}\frac{\partial[y]_0}{\partial a_2} - \frac{\partial[y]}{\partial a_2}\frac{\partial[y]_0}{\partial a_1} = 0$$

die willkürlichen Constanten der Reduction stets so be-
werden können, dass ihr Nenner, der in diesem Falle

$$= \gamma_1 \frac{\partial[y]}{\partial a_1} + \gamma_2 \frac{\partial[y]}{\partial a_2}$$

erhalb der Grenzen x_0 und x_1 nie verschwindet, voraus-
dass die Function:

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'}\right]$$

n diesen Grenzen ihr Zeichen nicht ändert. Auf diesen
'schen Beweis, der*) nichts weiter als die Differential-
gen benutzt, denen $\frac{\partial[y]}{\partial a_1}$ und $\frac{\partial[y]}{\partial a_2}$ genügen müssen, hat die
keit oder Unendlichkeit dieser Functionen gar keinen Einfluss.
n sieht hieraus, dass die vorhergehenden Betrachtungen
cht dasselbe leisten, was in diesem einfachsten Falle ge-
orden ist, und es entsteht eben der besprochenen Aus-
lle halber die an und für sich höchst interessante Auf-
nz ohne Betrachtungen aus der Variationsrechnung, allein
usgehend, dass die $\frac{\partial[y]}{\partial a}$ und $\frac{\partial[\lambda]}{\partial a}$ Lösungen der Differen-
ungen (24) sind und dass die Function $2A_1$ zwischen den
cht kommenden Grenzen stets dasselbe Vorzeichen be-
oll, das weiteste Grenzenintervall zu finden, innerhalb
ei geeigneter Bestimmung der willkürlichen Constanten
ner der Reduction niemals verschwindet.
lem Beispiele, das später behandelt werden wird, tritt
er Ausnahmefall ein und es war dort noch möglich durch
ngen, die denen von Jacobi ganz ähnlich sind, den Satz
direct zu beweisen. Allein obgleich sich im allgemeinen
Benutzung der Hamilton-Jacobi'schen Methode leicht
ableiten lassen, die derjenigen vollkommen zu entsprechen
auf welcher der Jacobi'sche Beweis der Kriterien des
s und Minimums des obigen Integrales beruht (und in
lieselben Grössen auftreten, die in der dritten Reduction
en Variation von Clebsch vorkommen), so hat man doch,
h weiss, noch nicht unternommen, diese Betrachtungen

*) darüber Hesse, Crelle J. 54, pp. 256—260.

auch nur auf die nächst einfachen allgemeineren Fälle
dehnen, und die oben genannte Aufgabe harrt daher no
Lösung.

§ 21.

Wir haben im Vorhergehenden immer nur den Fall be
wo die Grenzen x_0 und x_1, sowie die Grenzwerthe der y
lich gegeben sind. Auf diesen Fall kann man aber nach
alle anderen zurückführen, indem man die Aufgabe in zwe
theilt, von denen der erste der eigentlichen Variationsre
der zweite der Differentialrechnung angehört. Man nimm
die Grenzwerthe der Variabeln sämmtlich als gegeben
sucht unter dieser Voraussetzung das Maximum oder M
des vorgelegten Integrales. Die Kriterien, wann dasselbe b
Annahme ein wirkliches Maximum oder Minimum wird,
dem Vorhergehenden (§ 18) bekannt und wir sahen, d
selben abhängen von den Werthen der Integrationsconstan
Problems, welche wiederum abhängen von den Grenzwer
Variabeln. Hat man nun den Maximal- oder Minimalwe
Integrales gefunden, so kommt es, wenn die Grenzwert
sämmtlich gegeben sind, dann zweitens darauf an, diese
Rücksicht auf die gegebenen Grenzbedingungen so zu bes
dass dieser Werth des Integrales, der nun eine gegebene F
der Grenzwerthe ist, ein Maximum oder Minimum wer
Substitution der also bestimmten Grenzwerthe in die obig
terien liefert die Kriterien des Maximums oder Minim
den vorgelegten Fall.

Diese Art, die Kriterien des Maximums und Minim
nicht gegebenen Grenzwerthen abzuleiten, erfordert, v
sieht, stets die Ausführung einer Quadratur. In alle de
jedoch, in denen die Grenzen x_0 und x_1 nicht variirt
kann man diese Quadratur ersparen auf einem anderen,
schon von Jacobi angedeuteten Wege, der auf dem Lagran
Grundsatze beruht, dass eine Function, deren kleinste
positiv ist, auch selbst positiv sein muss, und ebenso eine
immer negativ bleibt, wenn ihr grösster Werth negativ

Ich will, um diese zweite Methode an dem einfachs
auseinanderzusetzen, annehmen, dass die Grenzen x_0

n, dagegen die Grenzwerthe der Variabeln y vollkommen lich seien und unter dieser Voraussetzung die Kriterien nimums suchen.

e $2n$ Integrationsconstanten der Lösungen (7) sind dann lich so zu bestimmen, dass die n Functionen:

$$\left[\frac{\partial \Omega}{\partial y_k'}\right]$$

$= x_0$ und $x = x_1$ verschwinden. Indem man die hieraus en Werthe der Constanten in die Lösungen (7) einsetzt, nan diejenigen Functionen y und λ, für welche die erste n verschwindet.

se Functionen y machen das gegebene Integral I zu einem en relativen Minimum, so lange die zweite Variation $\delta^2 I$ endlichen und stetigen Functionen z positiv bleibt, welche Bedingungsgleichungen:

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial \mu_k} = 0$$

. Betrachten wir nun zunächst nur solche Variationen z, gegebene Grenzwerthe annehmen, und suchen unter allen, ichungen (12) genügenden Functionen z, welche diese rthe besitzen, diejenigen auf, welche das Integral $\delta^2 I$ zu irklichen Minimum machen. Ist dann dieses Minimum so ist klar, dass auch die zweite Variation selbst für alle n Variationen z, welche die Gleichungen (12) erfüllen e gegebenen Grenzwerthe haben, positiv sein muss. Es mnach das gegebene Integral I selbst ein wirkliches n erreichen, so lange jenes Minimum der Function $\delta^2 I$, eine Function von den Grenzwerthen der z ist, für alle n Werthe dieser Grenzwerthe positiv bleibt.

diesen Gedanken auszuführen, haben wir also zunächst tionen z so zu bestimmen, dass die zweite Variation:

$$\delta^2 I = \int_{x_0}^{x_1} \Omega_2 \, dx$$

aum werde, während diese Functionen den Bedingungs- en (12) genügen und gegebene Grenzwerthe annehmen

Nach § 2 bestimmen sich die gesuchten Functione
den $n + m$ Differentialgleichungen (24), deren allgemein
gen, wie wir gesehen haben, sind:

$$(84) \ldots z_h = c_1 \frac{\partial [y_h]}{\partial a_1} + c_2 \frac{\partial [y_h]}{\partial a_2} + \ldots c_{2n} \frac{\partial [y_h]}{\partial a_{2n}} \equiv [z_h]$$

$$(85) \ldots \mu_k = c_1 \frac{\partial [\lambda_k]}{\partial a_1} + c_2 \frac{\partial [\lambda_k]}{\partial a_2} + \ldots c_{2n} \frac{\partial [\lambda_k]}{\partial a_{2n}} \equiv [\lambda_k]$$

Da nun die Variabeln z in den beiden Grenzen gegebene
annehmen sollen, so erhalten wir die Bedingungen, un
chen das Integral $\delta^2 I$ für die Werthe (84) der z_h, deren
kürliche Constanten durch die gegebenen Grenzwerthe b
sind, ein wirkliches Minimum wird, unmittelbar durch An
des Satzes von § 18.

Berücksichtigen wir ferner die identische Umform
§ 4, so sehen wir, dass der Minimalwerth der zweite
tion wird:

$$(90) \ldots \ldots \ldots Mi\ \delta^2 I = \tfrac{1}{2} \left[\sum_1^n {}_h \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_h'} z_h \right]_{x_0}^{x_1},$$

worin für die z_h und μ_k die Werthe (84) und (85) z
sind. Es tritt mithin zu den aus § 18 folgenden Bedi
noch die hinzu, dass die Function (90) positiv sein muss
beliebigen Werthe der $2n$ Grenzwerthe z_{h0} und z_{h1}, od
in dem vorliegenden Falle auf dasselbe hinauskommt,
beliebigen Werthe der $2n$ Constanten c.

Beachten wir, dass identisch:

$$\frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial z_h' \partial z_i'} \equiv \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h' \partial y_i'} \right], \qquad \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial \mu_k \partial z_i'} \equiv \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'} \right]$$

$$\frac{\partial [z_h]}{\partial c_i} \equiv \frac{\partial [y_h]}{\partial a_i}, \qquad \frac{\partial [\mu_k]}{\partial c_i} \equiv \frac{\partial [\lambda_k]}{\partial a_i}$$

ist, so erhalten wir demnach für den betrachteten Falli
genden Kriterien:

Damit das gegebene Integral I für die Lösungen
Problems $\delta I = 0$ kleiner werde als für alle anderen
barten Functionen y, welche den m Bedingungsgle
$\varphi_k = 0$ genügen, muss 1) x_1 zwischen x_0 und der zun
x_0 gelegenen Wurzel der Grenzgleichung $\Delta(x, x_0) = 0$
darf 2) die homogene Function (78), zwischen deren n

Argumenten U_h die m Bedingungsgleichungen (76) be-
innerhalb der Grenzen x_0 und x_1 nie negativ werden,
ıss endlich 3) die homogene Function zweiter Ordnung
Constanten c, die man erhält, wenn man in:

$$\left[\sum_1^n{}_h \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_h'} z_h\right]_{x_0}^{x_1}$$

z_h, z_h' und μ_k die aus (84) und (85) folgenden Werthe setzt,
sein für alle beliebigen Werthe dieser $2n$ Constanten.
wäre interessant, diese Kriterien, namentlich in Bezug
letzte Bedingung, weiter zu entwickeln. Dies aber liegt
alb des Bereiches dieser Arbeit. —

III.

Beispiel.

Kriterien des Minimums für das Integral ∫ kleinsten Wirkung bei der elliptischen Bewe eines Planeten.

§ 22.

Das Integral, welches in Folge des Principes der kl Wirkung bei der elliptischen Bewegung eines Planeten ei mum wird, ist:

$$\int v\,ds = \int \sqrt{2\left(h + \frac{\mu}{r}\right)}\,\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

oder, wenn man die Polarcoordinaten:

$$(1^0) \quad \begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\psi \\ y = r\sin\varphi\cos\psi \\ z = r\sin\psi \end{cases}$$

einführt:

$$\int \sqrt{2\left(h + \frac{\mu}{r}\right)}\,\sqrt{dr^2 + r^2\,d\psi^2 + r^2\cos^2\psi\,d\varphi^2}.$$

Hierin bedeutet h die Constante der lebendigen Kraft und Anziehung in der Einheit der Entfernung. Die Masse d neten ist $= 1$ gesetzt worden.

Es sind nun zunächst die Differentialgleichungen zu inte auf welche die Aufgabe führt, dieses Integral zu einem Ma oder Minimum zu machen, und sodann die Kriterien f Minimum aufzustellen.

§ 23.

rachtet man ψ als die unabhängige Variable, so ist also
t das Problem zu lösen:

$$= \delta \int_{\psi_0}^{\psi_1} d\psi \sqrt{2\left(h + \frac{\mu}{r}\right)(r^2 + r'r' + r^2\cos^2\psi\varphi'\varphi')} = 0,$$

$' = \frac{dr}{d\psi}$ und $\varphi' = \frac{d\varphi}{d\psi}$ ist. Die Grenzen ψ_0 und ψ_1, so-
Grenzwerthe von r und φ werden als gegeben voraus-

zt man:

$$F = \sqrt{2\left(h + \frac{\mu}{r}\right)(r^2 + r'r' + r^2\cos^2\psi\ \varphi'\varphi')},$$

$$\frac{\partial F}{\partial r'} = \frac{\partial V}{\partial r}, \quad \frac{\partial F}{\partial \varphi'} = \frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

stituirt die aus den beiden letzten Gleichungen folgenden
von r' und φ' in die Gleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial \psi} = F - r'\frac{\partial V}{\partial r} - \varphi'\frac{\partial V}{\partial \varphi},$$

lt man die Hamilton'sche partielle Differentialgleichung des
ns (2^0):

$$\frac{\partial V}{\partial \psi} = r\sqrt{2\left(h + \frac{\mu}{r}\right) - \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2\cos^2\psi}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2}.$$

nn diese Differentialgleichung leicht durch die Methode
aration integriren und findet dann *)

$$V = C + c_2\varphi + \int \frac{dr}{r}\sqrt{2hr^2 + 2\mu r - c_1^2} + \int d\psi \frac{\sqrt{c_1^2\cos^2\psi - c_2^2}}{\cos\psi}$$

ständige Lösung derselben.
s dieser vollständigen Lösung ergeben sich die folgenden
hen Integralgleichungen:

$$\frac{V}{c_1} = -\int \frac{c_1\,dr}{r\sqrt{2hr^2 + 2\mu r - c_1^2}} + \int \frac{c_1\,d\psi\cos\psi}{\sqrt{c_1^2\cos^2\psi - c_2^2}} = \gamma_1$$

$$\frac{V}{c_2} = \varphi - \int \frac{c_2\,d\psi}{\cos\psi\sqrt{c_1^2\cos^2\psi - c_2^2}} = \gamma_2,$$

gl. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik p. 184.

oder nach Ausführung der Quadraturen:

$$\arccos \frac{\mu r - c_1^2}{r\sqrt{\mu^2 + 2h\,c_1^2}} + \arcsin \frac{c_1 \sin \psi}{\sqrt{c_1^2 - c_2^2}} = \gamma_1$$

$$\varphi - \arcsin \frac{c_2 \operatorname{tg} \psi}{\sqrt{c_1^2 - c_2^2}} = \gamma_2.$$

Die letzte Gleichung liefert:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\sqrt{c_1^2 - c_2^2}}{c_2} \sin (\varphi - \gamma_2),$$

woraus folgt, dass die Bahncurve eine ebene ist und dass man mit i die Neigung der Bahnebene gegen die xy Ebe mit ϑ den Winkel bezeichnet, den die Schnittlinie beider mit der x Achse bildet:

$$\frac{\sqrt{c_1^2 - c_2^2}}{c_2} = \operatorname{tg} i, \quad \gamma_2 = \vartheta,$$

also:

$$(4^0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{c_2}{c_1} = \cos i$$

ist. Führt man diesen Werth von c_2 in die erste Gleichu und setzt:

$$(5^0) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\sin \psi}{\sin i} = \sin \chi, \quad \frac{\sqrt{\sin^2 i - \sin^2 \psi}}{\sin i} = \cos \chi,$$

so erhält man:

$$\arccos \frac{\mu r - c_1^2}{r\sqrt{\mu^2 + 2hc_1^2}} + \chi = \gamma_1,$$

und hieraus, wenn man noch:

$$(6^0) \quad \ldots\ldots \quad \mu = -2ha, \qquad c_1^2 = -2ha^2(1 - e^2)$$

setzt, schliesslich:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\chi - \gamma_1)}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Bahncurve ein Kegelschn Nehmen wir, um den Fall der elliptischen Bewegung zu er $a > 0$ und $0 < e < 1$ an, so wird $\chi - \gamma_1$ die wahre An und $\gamma_1 = l$ die Länge des Perihels.

Wir haben somit die folgenden Lösungen der Differ gleichungen des Problems (2^0) gefunden:

$$(7^0) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} \varphi - \vartheta = \arcsin (\operatorname{ctg} i \operatorname{tg} \psi) \\ r = \dfrac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos (\chi - l)}, \end{cases}$$

der Winkel χ definirt ist durch die Gleichungen (5^0). Diese gen enthalten die 4 nicht kanonischen Constanten:

$$e,\ l,\ i,\ \theta,$$

nd die grosse Achse $2a$ nach (6^0) gegeben ist.

§ 24.

evor wir nun an die wirkliche Aufstellung der Kriterien nimums gehen, müssen wir bemerken, dass nach (5^0) und e Grössen χ, φ und r sämmtlich imaginär werden, sobald $> \sin^2 i$ geworden ist. Wir dürfen daher, solange $\sin^2 i < 1$ e Grenzen des Integrals nicht weiter ausdehnen als von $-i$ bis $\psi = +i$. Diese lästige Beschränkung kann jedoch beseitigt werden. Da nämlich die Lage des Coordinaten- xyz bis auf den Anfangspunct vollkommen willkürlich hindert uns nichts, es nachträglich so zu legen, dass die der Bahn senkrecht gegen die xy Ebene zu stehen kommt. wird

$$i = \frac{\pi}{2},\ \chi = \psi,\ \varphi = \theta$$

r können nun ψ oder χ beliebig wachsen lassen, ohne e Lösungen (7^0) imaginär werden.

ir werden daher im Folgenden immer diese Lage des natensystems voraussetzen. Weil jedoch zur Bildung der leichung die partiellen Differentialquotienten der Lösungen en Integrationsconstanten gebraucht werden, so wollen wir chstaben i und χ beibehalten und uns erinnern, dass und $\chi = \psi$ ist.

es vorausgeschickt, wenden wir nun das allgemeine Kri- von § 18 auf unsern speciellen Fall an. Wir haben nach en zunächst die zweiten partiellen Differentialquotienten nction F nach r' und φ' zu bilden und sodann die Grenz- ng aufzustellen.

e ersteren sind:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r'\,\partial r'} = \frac{(r^2 + r^2\cos^2\psi\,\varphi'\varphi')\sqrt{2\left(h+\frac{\mu}{r}\right)}}{[r^2 + r'r' + r^2\cos^2\psi\,\varphi'\varphi']^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r'\,\partial\varphi'} = -\frac{r^2\cos^2\psi\,\varphi' r'\sqrt{2\left(h+\frac{\mu}{r}\right)}}{[r^2 + r'r' + r^2\cos^2\psi\,\varphi'\varphi']^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi'\,\partial\varphi'} = \frac{r^2\cos^2\psi(r^2 + r'r')\sqrt{2\left(h+\frac{\mu}{r}\right)}}{[r^2 + r'r' + r^2\cos^2\psi\,\varphi'\varphi']^{\frac{3}{2}}}.$$

Da nun nach (7^0) stets $0 < r < 2a = -\frac{\mu}{h}$ ist und die Lösu
r und φ immer reell bleiben, so erhellt, dass stets:

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial r'\,\partial r'}\right] > 0$$

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial r'\,\partial r'}\right]\left[\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi'\,\partial\varphi'}\right] - \left[\frac{\partial^2 F}{\partial r'\,\partial\varphi'}\right]^2 = \left[\frac{2\left(h+\frac{\mu}{r}\right) r^4\cos^2\psi}{[r^2 + r'r' + r^2\cos^2\psi\,\varphi'\varphi']^2}\right]$$

ist; folglich bleibt die homogene Function zweiter Ordnung

$$2A_1 = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial r'\,\partial r'}\right] U_1^2 + 2\left[\frac{\partial^2 F}{\partial r'\,\partial\varphi'}\right] U_1 U_2 + \left[\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi'\,\partial\varphi'}\right] U_2$$

für alle beliebigen Werthe ihrer Argumente U_1, U_2 positiv
weit auch das Intervall der Grenzen ausgedehnt werden
und es kann, wie überhaupt bei allen den Integralen, welch
Princip der kleinsten Wirkung liefert, nie ein Maximum, sol
nur ein Minimum oder keins von beiden eintreten.

Durch Differentiation der Lösungen (7^0) nach den Cons
e, l, i, θ erhalten wir mit Rücksicht auf (5^0):

$$(8^0)\quad \begin{cases} \frac{\partial r}{\partial e} = -\frac{2ae + r\cos(\chi - l)}{1 + e\cos(\chi - l)}, & \frac{\partial r}{\partial l} = -\frac{er\sin(\chi - l)}{1 + e\cos(\chi - l)} \\ \frac{\partial r}{\partial i} = -\frac{er\sin(\chi - l)\,\mathrm{tg}\,\chi\,\mathrm{ctg}\,i}{1 + e\cos(\chi - l)}, & \frac{\partial r}{\partial\theta} = 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial e} = 0, & \frac{\partial\varphi}{\partial l} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial i} = -\frac{\mathrm{tg}\,\chi}{\sin i}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 1. \end{cases}$$

Die Grenzgleichung:

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial e} & \frac{\partial r}{\partial l} & \frac{\partial r}{\partial i} & \frac{\partial r}{\partial\theta} \\ \frac{\partial r_0}{\partial e} & \frac{\partial r_0}{\partial l} & \frac{\partial r_0}{\partial i} & \frac{\partial r_0}{\partial\theta} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial e} & \frac{\partial\varphi}{\partial l} & \frac{\partial\varphi}{\partial i} & \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \\ \frac{\partial\varphi_0}{\partial e} & \frac{\partial\varphi_0}{\partial l} & \frac{\partial\varphi_0}{\partial i} & \frac{\partial\varphi_0}{\partial\theta} \end{vmatrix}$$

iernach;

$$0 = -\frac{e}{\sin i\,[1 + e\cos(\chi - l)]\,[1 + e\cos(\chi_0 - l)]}$$

$$(\operatorname{tg}\chi - \operatorname{tg}\chi_0)\begin{vmatrix} 2ae + r\cos(\chi - l), & r\sin(\chi - l) \\ 2ae + r_0\cos(\chi_0 - l), & r_0\sin(\chi_0 - l)\end{vmatrix}.$$

ste Factor kann weggelassen werden, weil er nie ver-det. Nennen wir dann $\xi\ \eta$ die Coordinaten des Planeten ıg auf ein rechtwinkliges Achsensystem in der Bahnebene, ξ Achse die grosse Achse und dessen Anfangspunct die ist, so erhalten wir nach § 8 den Satz:

› lange die obere Grenze ψ_1 zwischen ψ_0 und der zu-an ψ_0 gelegenen Wurzel ψ^1 der Gleichung:

$$\ldots\ldots (\operatorname{tg}\chi - \operatorname{tg}\chi_0)\begin{vmatrix} 2ae - \xi, & \eta \\ 2ae - \xi_0, & \eta_0\end{vmatrix} = 0$$

erreicht das Integral

$$= \int_{\psi_0}^{\psi_1} d\psi \sqrt{2\left(h + \frac{\mu}{r}\right)(r^2 + r'r' + r^2\cos^2\psi\ \varphi'\varphi')}$$

Werthe (7^0) von r und φ ein wirkliches Minimum.

eses Kriterium lässt nun eine sehr einfache geometrische etation zu. Die Gleichung (9^0) nämlich zerfällt in die

$$\operatorname{tg}\chi = \operatorname{tg}\chi_0$$

$$(2ae - \xi)\,\eta_0 - (2ae - \xi_0)\,\eta = 0.$$

te Gleichung ist die Gleichung einer Geraden, welche durch er unteren Grenze ψ_0 entsprechenden Punct $\xi_0\ \eta_0 = p_0$ hnellipse und die Sonne geht. Die zweite Gleichung da-stellt eine Gerade dar, welche durch p_0 und denjenigen unct der Ellipse geht, in welchem die Sonne nicht steht. man p' und p'' die Schnittpuncte dieser beiden Geraden r Ellipse, so zeigt die geometrische Anschauung sofort, o lange der Punct p_0 zwischen Aphel und Perihel liegt, net von p_0 aus eher nach p' kommen wird als nach p'', sich dagegen gerade umgekehrt verhält, wenn p_0 zwischen zwischen" natürlich immer im Sinne der Bewegung des n gerechnet] Perihel und Aphel liegt.

r obige Satz giebt uns daher die folgenden Kriterien cobi:

Geht der Planet von einem Puncte p_0 zwi
Aphel und Perihel aus, so wird bei der ellipti
Bewegung desselben das Integral $\int vds$ ein wirk
Minimum, so lange der Planet den Punct p' noch
erreicht hat, in welchem eine durch p_0 und die
gelegte Gerade die Bahnellipse schneidet. Lie
gegen der Ausgangspunct p_0 des Planeten zwi
Perihel und Aphel, so erreicht das Integral $\int v$
der Bewegung des Planeten ein wirkliches Mini
so lange derselbe zwischen p^0 und demjenigen P
p'' bleibt, in welchem die Bahnellipse von eine
raden geschnitten wird, die durch p_0 und den
mit der Sonne zusammenfallenden Brennpunct g

§ 25.

Diese Kriterien sind aber bis jetzt nur einfach dur
wendung des allgemeinen Satzes von § 18 auf unser
erhalten worden und wir haben gar nicht untersucht,
Voraussetzungen dieses Satzes hier auch alle erfüllt sind.
wird also jetzt noch nachzuholen sein.

Man sieht nun zunächst leicht, dass keiner der Coeffi
der zweiten Variation der Function:

$$F = \sqrt{2\left(h + \frac{\mu}{r}\right)}\,(r^2 + r'r' + r^2\cos^2\psi\,\varphi'\varphi')$$

bei der Bewegung des Planeten unendlich wird. Hingeger
nach (8^0) die Function $\frac{\partial\varphi}{\partial i}$ unendlich für $\chi = \psi = (2m +$
$\left(\frac{\partial r}{\partial i}\right.$ ist $= 0$, weil $i = \frac{\pi}{2}\left.\right)$. Es findet also hier ein Ausn

*) Man kann, wie es Jacobi (Crelle J. 17, p. 74) gethan ha
Kriterien weit einfacher dadurch erhalten, dass man die in §
wonnene Bedeutung der Grenzgleichung benutzt. Allein diese M
wird nur in seltenen Fällen anwendbar sein und es kam eb
nicht darauf an, die Kriterien des betrachteten speciellen Integr
einem möglichst kurzen Wege zu finden, sondern es sollte v
an einem einfachen Beispiele klar gemacht werden, wie man in
Falle, wo die Differentialgleichungen der ersten Variation i
worden sind, zu den analytischen Kriterien des Maximums oder Mi
gelangen kann.

att und zwar, wie man leicht sieht, ein Ausnahmefall von
n § 20 betrachteten Art. Denn es wird mit $\frac{\partial\varphi}{\partial i}$ nur $\frac{U_2}{U}$
6, (36)] unendlich und zwar so wie $\frac{d}{d\psi}\frac{\partial\varphi}{\partial i}$ oder $\frac{1}{\cos^2\psi}$, wäh-
$\frac{U_1}{U}$ endlich bleibt. Da aber für $i = \frac{\pi}{2}$:

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial r'\,\partial\varphi'}\right] = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi'\,\partial\varphi'}\right] = \sqrt{\frac{\mu}{a}}\,\frac{r\cos^2\psi}{\sqrt{1+e\cos(\chi-l)}}$$

so erkennt man sofort, dass die Function, die in der redu-
Form der zweiten Variation unter dem Integralzeichen
auch für $\psi = (2m+1)\frac{\pi}{2}$ endlich bleibt. Daher muss
die Function:

$$2B = -\frac{\Delta_1\delta r + \Delta_2\delta\varphi}{U}\ \text{[vgl. § 6, (37)]}$$

h bleiben, weil sonst die rechte Seite der aus § 6, (39)
den identischen Formel:

$$2\delta^2 F = \frac{2A_1}{U^2} + 2\frac{dB}{dx}$$

lich würde, während die linke endlich bleibt.

lit Rücksicht auf das in § 20 Gesagte erhellt nun aber
dass trotz dieses Ausnahmefalles ein Minimum immer statt-
wenn die obere Grenze ψ_1 die Lage besitzt, wie sie die
ien des vorigen § vorschreiben. Denn aus den geometri-
Betrachtungen des vorigen § geht deutlich hervor, dass
usdruck:

$$(\mathrm{tg}\,\chi - \mathrm{tg}\,\chi_1)\begin{vmatrix} 2ae-\xi, & \eta \\ 2ae-\xi_1, & \eta_1 \end{vmatrix}$$

rschwinden kann, so lange

$$\chi_0 \leq \chi < \chi_1 < \chi'$$

o χ' die zunächst an χ_0 gelegene Wurzel der Grenzglei-
(9⁰) bezeichnet. Indessen bleibt nach § 20 doch noch
ein gewisser Zweifel darüber übrig, ob es nicht möglich
e willkürlichen Constanten der Reduction so zu bestimmen,
hr Nenner auch innerhalb eines weitern Grenzenintervalles
Null wird, in welchem Falle die Grenzen, welche die Kri-
des vorigen § angeben, nicht die weitesten wären, inner-
leren ein wirkliches Minimum stattfindet. Ueberdies ist es

au und für sich interessant, diese Kriterien noch auf eine anderen, directen Wege abzuleiten.

Daher will ich jetzt, ganz abgesehen von allen Bezie zur Variationsrechnung, direct die weitesten Grenzen zu e suchen, die sich aus der Bedingung ergeben, dass innerha selben der Nenner der Reduction nicht verschwinden dar

Um hierbei den Satz (69) von Clebsch benutzen zu k wird es nöthig, statt der bisherigen, nicht kanonischen Con e, i, l, θ, kanonische Constanten einzuführen. Behalten Constanten e und i bei, so ergeben sich die zu ihnen ge kanonischen Constanten ε und j aus den Substitutionen:

$$\frac{\partial V}{\partial e} = \varepsilon, \quad \frac{\partial V}{\partial i} = j.$$

Nun ist nach (3^0):

$$\frac{\partial V}{\partial e} = \frac{\partial V}{\partial c_1}\frac{\partial c_1}{\partial e} + \frac{\partial V}{\partial c_2}\frac{\partial c_2}{\partial e} = l\frac{\partial c_1}{\partial e} + \theta\frac{\partial c_2}{\partial e}$$

$$\frac{\partial V}{\partial i} = \frac{\partial V}{\partial c_1}\frac{\partial c_1}{\partial i} + \frac{\partial V}{\partial c_2}\frac{\partial c_2}{\partial i} = l\frac{\partial c_1}{\partial i} + \theta\frac{\partial c_2}{\partial i};$$

ferner nach (4^0) und (6^0):

$$c_2 = c_1 \cos i, \quad c_1 = \sqrt{\mu a(1-e^2)}.$$

Demnach wird:

$$\varepsilon = -\frac{e\sqrt{\mu a}}{\sqrt{1-e^2}}(l + \theta\cos i)$$

$$j = -\sqrt{\mu a(1-e^2)}\sin i \,.\, \theta,$$

also:

$$\theta = -\frac{j}{\sin i\sqrt{\mu a(1-e^2)}}$$

$$l = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{a\mu}}\varepsilon + \frac{j\operatorname{ctg} i}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}.$$

Mit Hülfe dieser Formeln erhält man aus (8^0):

$$\frac{\partial r}{\partial \varepsilon} = \sqrt{\frac{1-e^2}{\mu a}}\,\frac{r\sin(\chi-l)}{1+e\cos(\chi-l)}, \quad \frac{\partial r}{\partial j} = -\frac{e}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}\cdot\frac{r\sin(\chi$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial j} = -\frac{1}{\sin i\sqrt{\mu a(1-e^2)}}.$$

Bilden wir nun, indem wir dieser Untersuchung die zwei duction von § 9 zu Grunde legen, mit diesen und den W (8^0) die Determinante:

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial e} + c_1{}^1 \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} + c_1{}^2 \frac{\partial r}{\partial j}, & \frac{\partial r}{\partial i} + c_2{}^1 \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} + c_2{}^2 \frac{\partial r}{\partial j} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial e} + c_1{}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} + c_1{}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial j}, & \frac{\partial \varphi}{\partial i} + c_2{}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} + c_2{}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial j} \end{vmatrix},$$

giebt sich:

$$S = \frac{r \sin(\chi - l)}{\sin i \sqrt{\mu a(1-e^2)}\,[1 + e\cos(\chi - l)]} \left[c_1{}^2 c_2{}^1 \sqrt{\frac{1-e^2}{\mu a}} + \sqrt{\mu a(1-e^2)}\,\operatorname{tg}\chi \right] \left(\frac{2ae + r\cos(\chi - l)}{r\sin(\chi - l)} - c_1{}^1 \sqrt{\frac{1-e^2}{\mu a}} \right) \Big].$$

en sind nach dem Satze von Clebsch $c_1{}^1$, $c_2{}^2$ und $c_1{}^2 = c_2{}^1$ vollkommen willkürliche Constanten.

Es handelt sich darum, bei einer beliebigen unteren Grenze ein Grenzenintervall zu finden, innerhalb dessen die Determinante S immer wenigstens einmal durch Null hindurchgehen muss, welche Werthe auch die willkürlichen Constanten $c_1{}^1$, $c_1{}^2$, haben mögen.

Man bemerkt nun zunächst, dass, wenn man:

$$\ldots\ldots\ldots\ c_2{}^2 = -\sqrt{\mu a(1-e^2)}\,\operatorname{tg} l$$

der Ausdruck (10^0) verschwindet für $\sin(\chi - l) = 0$. Bei dem speciellen Werthe von $c_2{}^2$ kann man also geradezu die Werthe von χ angeben, für welche S verschwindet. Die Frage nach den Grenzen, zwischen denen immer wenigstens eine Wurzel der Gleichung $S = 0$ liegt, erledigt sich daher hier von selbst und wir können bei der allgemeinen Untersuchung von dem Werthe (11^0) von $c_2{}^2$ ganz absehen.

Schliesst man aber diesen speciellen Werth von $c_2{}^2$ aus, so sieht man sofort, dass man auf den ersten von den beiden Factoren des Ausdruckes (10^0) gar keine Rücksicht zu nehmen braucht, indem derselbe alsdann nicht verschwinden kann, ohne dass das erste Glied des zweiten Factors unendlich wird. Wir haben uns daher nur mit dem zweiten Factor zu beschäftigen, der, wenn man für r seinen Werth einsetzt, sich also darstellt:

$$\left(\frac{(1+e^2)\cos(\chi - l)}{-e^2)\sin(\chi - l)} - c_1{}^1 \sqrt{\frac{1-e^2}{\mu a}} \right) (c_2{}^2 + \sqrt{\mu a(1-e^2)}\,\operatorname{tg}\chi) + c_1{}^2 c_2{}^1 \sqrt{\frac{1-e^2}{\mu a}}.$$

Setzt man diesen Ausdruck $= 0$, so erhält man die Gleichung:

$$(12^0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad M \,.\, N = N \,.\, P,$$

worin:

$$(13^0) \ldots \begin{cases} M = \dfrac{2e + (1 + e^2)\cos(\chi - l)}{(1 - e^2)\sin(\chi - l)} \\ N = {c_2}^2 + \sqrt{\mu a (1 - e^2)}\ \mathrm{tg}\ \chi \\ P = \sqrt{\dfrac{1 - e^2}{\mu a}} \left[{c_1}^1 - \dfrac{{c_1}^2 {c_2}^1}{{c_2}^2 + \sqrt{\mu a (1 - e^2)}\ \mathrm{tg}\ \chi} \right] \end{cases}$$

ist. Diese Gleichung tritt also jetzt an die Stelle der Gl $S = 0$ und ist in Bezug auf die Lage ihrer Wurzeln zu suchen.

Man erkennt nun ohne Weiteres, dass, so lange Null verschieden ist, der Gleichung (12^0) nur genügt kann durch

$$M = P;$$

setzt man aber ${c_1}^2 = 0$, so wird die Gleichung (12^0) sowohl wenn

$$M = P,$$

als auch, wenn

$$N = 0$$

ist.

Aus den Gleichungen (13^0) erhält man ferner durch D tiation:

$$\frac{dM}{d\chi} = -\frac{1 + 2e\cos(\chi - l) + e^2}{(1 - e^2)\sin^2(\chi - l)}$$

$$\frac{dN}{d\chi} = \frac{\sqrt{\mu a (1 - e^2)}}{\cos^2\chi}$$

$$\frac{dP}{d\chi} = \frac{(1 - e^2)\,{c_1}^2 {c_2}^1}{\cos^2\chi\,[{c_2}^2 + \sqrt{\mu a (1 - e^2)}\ \mathrm{tg}\ \chi]^2}.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass $\frac{dM}{d\chi}$ stets < 0, dagegen $\frac{dP}{d\chi}$ stets > 0 sind. Daraus folgt, dass mit wachsendem Functionen N und P stets zunehmen, M dagegen stets ab Die Function M nimmt demnach zwischen χ_0 und der zu an χ_0 gelegenen Wurzel χ' der Gleichung:

$$M = M_0,$$

die Functionen N und P zwischen χ_0 und der zunächst gelegenen Wurzel χ'' der Gleichung:

$$\mathrm{tg}\ \chi = \mathrm{tg}\ \chi_0,$$

auf welche sich nach (13^0) die Gleichungen

$$N = N_0, \; P = P_0$$

n, alle möglichen Werthe an und jeden Werth nur ein-
ährend aber P wächst, nimmt M ab. Endlich können
usschliessung des Werthes (11^0) von $c_2{}^2$ die Functionen
P nicht gleichzeitig unendlich werden.

kt man sich also die Werthe der Functionen M und P
naten zweier Curven in einem rechtwinkligen Coordina-
tae verzeichnet, so werden sich, wenn

$$\chi_0 < \chi' < \chi''$$

Curven M und P zwischen oder in den Grenzen χ_0 und
tens einmal und zwar im Endlichen schneiden, welches
Werthe der Constanten $c_1{}^1$, $c_1{}^2$, $c_2{}^2$ sein mögen. Ist:

$$\chi_0 < \chi'' < \chi',$$

asselbe für die Grenzen χ_0 und χ'', vorausgesetzt, dass
$= 0$ angenommen wird. Setzt man $c_1{}^2 = 0$, wodurch
ist. wird, so brauchen sich die Curven M und P zwar
oder in den Grenzen χ_0 und χ'' noch nicht zu schneiden,
erst innerhalb der Grenzen χ_0 und χ'; aber es nimmt
oder in den Grenzen χ_0 und χ'' die Function N sicher
en Werth Null an.

aus folgt, dass, wenn man χ_0 zur unteren Grenze
lie obere Grenze χ_1 jedenfalls zwischen χ_0 und der zu-
χ_0 liegenden Wurzel der Gleichung:

$$(M - M_0) \; (\operatorname{tg} \chi - \operatorname{tg} \chi_0) = 0$$

uss und nicht mit dieser Wurzel zusammenfallen darf,
Constanten $c_1{}^1$, $c_1{}^2$, $c_2{}^2$ sich so bestimmen lassen sollen,
eterminante S innerhalb dieser Grenzen nirgends ver-
Es ist aber:

$$M = \frac{2ae + r \cos(\chi - l)}{r \sin(\chi - l)} = \frac{2ae - \xi}{\eta}.$$

daher, dass die weitesten Grenzen, innerhalb deren
ie Constantenbestimmung überhaupt nur möglich sein
ade diejenigen sind, welche die Kriterien des vorigen

ist der Zweifel, der noch übrig geblieben war, ge-
m aber auf diesem directen Wege jene Kriterien voll-
beweisen, ist es noch nöthig, unabhängig von dem
zu zeigen, dass man die drei willkürlichen Constanten

auch wirklich immer so bestimmen kann, dass die Dete
S innerhalb dieser Grenzen nie Null wird. Dies lässt
aber sehr einfach auf folgende Weise bewerkstelligen.

Setzt man $c_1^2 = 0$, so wird:

$$P = c_1^1 \sqrt{\frac{1-e^2}{\mu a}} = \text{const.}$$

Versteht man ferner unter χ_1' und χ_1'' zwei zwischen χ_0
resp. χ_0 und χ'', möglichst nahe an χ', resp. χ'' liegen
nicht damit zusammenfallende Werthe von χ, so wird, w
überdies c_1^1 und c_2^2 aus den Gleichungen bestimmt:

$$c_1^1 \sqrt{\frac{1-e^2}{\mu a}} = [M]_{\chi=\chi_1'}$$

und

$$c_2^2 + \sqrt{\mu a(1-e^2)}\ \text{tg}\ \chi_1'' \equiv [N]_{\chi=\chi_1''} = 0,$$

die Gleichung:

$$M = P$$

innerhalb der Grenzen χ_0 und χ_1' nur erfüllt für $\chi =$
innerhalb der Grenzen χ_0 und χ_1'' die Function N nur
$\chi = \chi_1''$.

Bei dieser Bestimmung der Constanten wird daher,

$$\chi_0 < \chi' < \chi''$$

ist, innerhalb der Grenzen χ_0 und χ_1' der Gleichung
genügt für $\chi = \chi_1'$, und wenn:

$$\chi_0 < \chi'' < \chi'$$

ist, so wird ihr innerhalb der Grenzen χ_0 und χ_1'' nu
für $\chi = \chi_1''$.

Dasselbe wird aber auch erreicht, wenn man imm
der Annahme $c_1^2 = 0$ im ersteren Falle:

$$c_1^1 \sqrt{\frac{1-e^2}{\mu a}} = [M]_{\chi=\chi_1'}$$

und

$$c_2^2 + \sqrt{\mu a(1-e^2)}\ \text{tg}\ \chi_1' = 0,$$

im zweiten:

$$c_1^1 \sqrt{\frac{1-e^2}{\mu a}} = [M]_{\chi=\chi_1''}$$

und

$$c_2^2 + \sqrt{\mu a(1-e^2)}\ \text{tg}\ \chi_1'' = 0$$

setzt, welches diejenige Constantenbestimmung ist, di
§ 17 kennen gelernt haben.

ir sehen somit auf doppelte Weise, dass man im ersten
ie obere Grenze χ_1 bis zu einem beliebig nahe an χ', im
Falle bis zu einem beliebig nahe an χ'' gelegenen Werth
usdehnen kann, ohne dass bei passender Bestimmung der
illkürlichen Constanten c_1^1, c_1^2, c_2^2 der Nenner S der
on innerhalb der Grenzen χ_0 und χ_1 je gleich Null werde.
ermit ist ein zweiter, directer Beweis der Kriterien des
§ gegeben. Man sieht aber, wieviel complicirter diese
Betrachtungen sind als die indirecten des allgemeinen

§ 26.

habe im Vorhergehenden nur den Fall der elliptischen
ng betrachtet und daher $e < 1$ angenommen. Um die
ng in einer Hyperbel zu erhalten, braucht man nur $e^2 > 1$
nen. Die Formeln bleiben ganz dieselben. Man hat also
eselbe Grenzgleichung (9⁰), und indem man diese für die
l deutet, gelangt man zu dem folgenden Kriterium:

i der hyperbolischen Bewegung eines freien
s, der von einem festen Centrum im umgekehr-
rhältniss des Quadrates der Entfernung ange-
oder abgestossen wird, erreicht das Integral
n wirkliches Minimum, so lange das Mobil zwi-
seinem Ausgangspuncte p_0 und demjenigen Puncte
ibt, in welchem die Bahncurve von einer Ge-
geschnitten wird, die durch p_0 und den Brenn-
desjenigen Hyperbelastes geht, auf welchem
wegung stattfindet.

Formeln der parabolischen Bewegung endlich entstehen
Formeln von § 24 dadurch, dass man $h = 0$ setzt, und
ält für diesen Fall leicht folgende Grenzgleichung:

$$(\operatorname{tg}\chi - \operatorname{tg}\chi_0)\left(\operatorname{ctg}\frac{\chi - l}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\chi_0 - l}{2}\right) = 0,$$

in Worte übersetzt, das folgende Kriterium liefert:

i der parabolischen Bewegung eines freien
s, der von einem festen Centrum nach dem
n'schen Gesetze angezogen wird, erreicht das
al $\int v ds$ ein wirkliches Minimum, so lange der

bewegte Punct zwischen seinem Ausgangspu
und demjenigen Puncte p' bleibt, in welche
durch p_0 und den Brennpunct gelegte Gerade
rabel schneidet. —

Ich habe allen diesen Kriterien einen mechanischen
gegeben, weil sie sich auf diese Weise am bequems
sprechen lassen. Es ist aber nicht zu übersehen, dass si
lich rein geometrischer Natur sind. Ihre wahre Bedeutu
lich ist diese:

So lange der Punct p_1 zwischen dem Puncte p_0 u
durch die Kriterien bestimmten Puncte p' resp. p'' blei
das von p_0 bis p_1 genommene Integral $\int \sqrt{2\left(h+\frac{\mu}{r}\right)}\,d$
betreffenden Kegelschnitt kleiner als für jede andere ben
Curve einfacher oder doppelter Krümmung, welche durch
p_1 geht.

Vergleicht man den Werth, den das Integral $\int \sqrt{2\left(h\right.}$
für die zu Grunde gelegte Minimumscurve hat, nur mit de
Werthen, die dasselbe für alle übrigen, in derselben El
genden Curven mit denselben beiden Endpuncten hat, d
trachtet man das ebene Integral:

$$\int v\,ds = \int_{\chi_0}^{\chi_1} \sqrt{2\left(h+\frac{\mu}{r}\right)}\,\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\chi}\right)^2}\,d\chi,$$

so fällt der Factor $\operatorname{tg}\chi - \operatorname{tg}\chi_0$ der Grenzgleichung ganz
man kann daher, damit ein wirkliches Minimum stattfin
der parabolischen Bewegung, sowie bei der hyperbolisch
wegung in Folge von Anziehung ($\mu > 0$) die Grenzen d
grals so weit ausdehnen, als das Mobil im Endlichen
während bei der elliptischen Bewegung der Endpunct des
stets, d. h. welche Lage auch der Ausgangspunct p_0 habe
zwischen p_0 und dem Schnittpuncte p'' der Ellipse mi
Geraden bleiben muss, die durch p_0 und denjenigen Bre
geht, in welchem sich die Sonne nicht befindet, wie di
Jacobi schon bemerkt hat*). Im Falle der hyperbolisch

*) Vgl. Crelle J. 17, p. 74 und Jacobi, Vorles. über Dynam
An letzterem Orte betrachtet Jacobi nur das ebene Integral.

g bei Abstossung ($\mu < 0$) endlich, wo das Mobil den Zweig
perbel durchläuft, dessen Brennpunct nicht der Sitz der
st, gilt für dies ebene Integral dasselbe Kriterium wie für
umliche.

er Factor $\operatorname{tg}\chi - \operatorname{tg}\chi_0$ der Grenzgleichung rührt sonach
her von der Vergleichung (in Bezug auf den Werth des
ls) der betrachteten Minimumscurve mit den räumlichen
, die dieselben beiden Endpuncte haben. Dies gilt für
Princip der kleinsten Wirkung auftretende Integral nicht
ei den betrachteten Bewegungen, sondern überhaupt bei
Centralbewegung, d. h. bei jeder Bewegung eines freien
s, der unter dem Einflusse einer Kraft steht, die von einem
Puncte ausgehend eine Function ist allein von der Ent-
g beider Puncte. Indem man nämlich die Grenzgleichung
umlichen Integrals $\int v ds$ für irgend eine solche Bewegung
t (am geeignetsten ist hierzu die Form $\Pi(x, x_0) = 0$ von
sieht man, dass dieselbe in zwei Factoren zerfällt, von
der eine

$$\operatorname{tg}\chi - \operatorname{tg}\chi_0$$

hrend die Nullsetzung des anderen Factors geradezu die
Grenzgleichung giebt, welche man erhält, wenn man das
ntegral von vornherein als ein ebenes betrachtet. Dies
dass bei einer solchen Bewegung jedenfalls nur so lange
kliches Minimum des räumlichen Integrals $\int v ds$ stattfinden
als das Mobil zwischen seinem Ausgangspuncte und dem
Puncte bleibt, welcher im Sinne der Bewegung der
Schnittpunct einer durch den Ausgangspunct und das
trum gelegten Geraden mit der Bahncurve ist. Ob inner-
eser Grenzen wirklich ein Minimum stattfindet, oder nur
n engeren Grenzen, hängt ab von dem anderen Factor
nzgleichung.

rselbe Satz gilt auch noch für das Hamilton'sche Integral

$$\int_{t_0}^{t} (T + U)\, dt,$$

die halbe lebendige Kraft und U die Kräftefunction be-

dem Falle z. B. wo $U = -\frac{k^2}{2} r^2$, also bei der Bewegung

eines freien Punctes, der von einem festen Centrum im
Verhältniss der Entfernung angezogen wird, erreicht dies
gral stets ein wirkliches Minimum, wenn die obige Be
erfüllt ist, indem in diesem Falle auch der andere Fa
Grenzgleichung nur verschwinden kann, wenn $\operatorname{tg}\chi = \operatorname{tg}$

Hiermit ist für jede Centralbewegung die Untersuch
Kriterien des Minimums sowohl für das Integral der k
Wirkung, wie für das Hamilton'sche Integral aus dem
zurückgeführt auf die Ebene. —

Thesen.

Bei rein analytischen Problemen sind geometrische Ableitungen weise unzulässig.

Die sogenannte Geometrie des Unendlichkleinen darf nur als ein betrachtet werden, neue Sätze zu entdecken, nicht aber dieselben eisen.

Das Unendliche in der Mathematik ist nur zulässig, insofern man Grenzbetrachtungen zurückführen kann.

Bei den Problemen der relativen Maxima und Minima in der tialrechnung führt nur die Lagrange'sche Multiplicatorenmethode um Ziele.

Dieselbe Methode in der Variationsrechnung entbehrt noch einer wissenschaftlichen Begründung.

Die Cauchy'sche Erklärung der Dispersion des Lichtes ist un-

Bei dem jetzigen Standpunkte der Optik muss man den Aether mpressibel annehmen.

Das Gesetz der Trägheit ist ein reiner Erfahrungssatz.

aus den Berichten der mathematisch-physischen Klasse der
igl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig.

Sitzung vom 4. Mai 1903.

den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz Theorie des Maximums und Minimums der einfachen Integrale.

Von

A. Mayer.

aus den Berichten der mathematisch-physischen Klasse der
igl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig.

Sitzung vom 4. Mai 1903.

ber den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz er Theorie des Maximums und Minimums der einfachen Integrale.

Von

A. Mayer.

seinen hochinteressanten *„Mathematischen Problemen"* hat r u. a. auch eine vielversprechende neue Methode zur Ab- der Kriterien des Maximums und Minimums der ein- und hen Integrale angedeutet.[1]) Grundlegend für diese neue e ist ein Satz, der im einfachsten Problem der Variations- g, wo es sich um den größten oder kleinsten Wert eines en Integrales:

$$J \equiv \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\, dx, \qquad \left(y' \equiv \frac{dy}{dx}\right),$$

n Grenzwerten von x und y handelt, also lautet:
t man von der Differentialgleichung zweiter Ordnung des s diejenige einfach unendliche Schar von Lösungen:

$$y = Y(x, a)$$

, welche für $x = x_0$ den vorgeschriebenen festen Wert y_0 , so braucht man nur noch die Differentialgleichung rdnung:

$$y' = p(x, y)$$

ı, deren vollständige Lösung durch jene Schar dargestellt n in der Funktion $p = p(x, y)$ zugleich eine solche gewonnen zu haben, die den Ausdruck:

$$f(x, y, p) + (y' - p)\frac{\partial f(x, y, p)}{\partial p}$$

ttinger Nachrichten 1900, p. 291—296.

zu einem vollständigen Differentialquotienten, und damit, in der vorgeschriebenen Grenzwerte, das Integral:

$$J^* \equiv \int_{x_0}^{x_1} \left\{ f(x, y, p) + (y' - p) \frac{\partial f(x, y, p)}{\partial p} \right\} dx$$

(solange die Funktion unter dem Integralzeichen stetig b unabhängig macht von der Wahl der Funktion y von x.

Im folgenden handelt es sich darum, diesen HILBERT Unabhängigkeitssatz auszudehnen auf das allgemeinere Pro

Unter allen Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ von x, die $r < n$ gege in Bezug auf die Differentialquotienten $y_1', \ldots, y_n'$ voneinander unabhängigen Bedingungsgleichungen

$$f_\varrho(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = 0 \qquad \varrho = 1$$

genügen, in den beiden gegebenen Grenzen x_0 und $x_1 > x_0$ feste besitzen, und zwischen diesen Grenzen mit ihren ersten Differ quotienten stetig bleiben, diejenigen zu finden, welche dem geg Integrale:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')\, dx$$

einen größten oder kleinsten Wert verschaffen.

Und zwar soll gezeigt werden, daß der betreffende Sa ganz von selbst darbietet, wenn man nach der Method CLEBSCH[1]) die Differentialgleichungen des Problems mittelst HAMILTON-JACOBIschen partiellen Differentialgleichung int hat, mit der überhaupt der Satz in allerengstem Zusamme steht. Ich hatte ursprünglich die Absicht, diese Integrat als bekannt vorauszusetzen, wodurch dann der Beweis des in ein paar Zeilen erledigt werden kann. In den mir bek Begründungen der CLEBSCHschen Integrationsmethode trit gerade ein Punkt, auf den es hier wesentlich ankommt deutlich genug zu Tage. Der Klarheit wegen habe ich es schließlich doch vorgezogen, dem Beweise des verallgeme Unabhängigkeitssatzes die Ableitung der kanonischen Integ methode der Differentialgleichungen der Variationsrechnung vorauszuschicken.[2])

1) Crelle J. 55, p. 337—340.

2) Für den Fall $n = 2$ ist allerdings der Satz bereits rich gegeben, aber nur ein gänzlich verfehlter Beweis dafür geliefert

§ 1. **Integration der Differentialgleichungen des Problems rch vollständige Lösung ihrer Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung.**

Setzt man:

$$\Omega \equiv f(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') + \sum_1^r \varrho \lambda_\varrho f_\varrho(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n'),$$

hrt das vorgelegte Problem auf die n Lagrangeschen Diffe-lgleichungen zweiter Ordnung zwischen $y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ v:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} = \frac{\partial \Omega}{\partial y_i}.$$

lasselbe daher bei festen Grenzwerten von $x, y_1, \ldots, y_n$ über-möglich und bestimmt sein, so müssen zu allernächst die Gleichungen (2) und:

$$f_\varrho(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = 0$$

ystem Differentialgleichungen von der Ordnung $2n$ bilden, hre vollständige Integration muß $2n$ willkürliche Konstanten ich bringen, und das wieder ist identisch damit, daß die Gleichungen:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} = \frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad f_\varrho = 0$$

bar sein müssen nach den $n + r$ Unbekannten

$$y_1', \ldots, y_n', \lambda_1, \ldots, \lambda_r.^{1})$$

)ie Substitution ihrer Auflösungen:

$$y_i' = \Psi_i\left(x, y_1, \ldots, y_n, \frac{\partial V}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial y_n}\right),$$

$$\lambda_\varrho = \Pi_\varrho\left(x, y_1, \ldots, y_n, \frac{\partial V}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial y_n}\right)$$

lann die Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \Omega - \sum_1^n y_h' \frac{\partial \Omega}{\partial y_h'} = f - \sum_1^n \frac{\partial V}{\partial y_h} y_h'$$

---

h man in diesem speziellen Falle die partielle Differential-ng des Problems gar nicht heranzuziehen braucht und auch eselbe unschwer zeigen kann, daß die Integrabilitätsbedingungen ind.

Vgl. diese Berichte 1895, p. 138.

über in eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial V}{\partial x} = H\left(x, y_1, \ldots, y_n, \frac{\partial V}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial y_n}\right) \tag{4}$$

zwischen der unbekannten Funktion V und den $n+1$ hängigen Variabeln $x, y_1, \ldots, y_n$.

Ist daher $V = W$ irgend eine Lösung dieser Ha Jacobischen partiellen Differentialgleichung des Problems, nügen die Werte:

$$\begin{cases} y_i' = \Psi_i\left(x, y_1, \ldots, y_n, \frac{\partial W}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial y_n}\right), \\ \lambda_\varrho = \Pi_\varrho\left(x, y_1, \ldots, y_n, \frac{\partial W}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial y_n}\right) \end{cases} \tag{5}$$

mit den $n + r$ Gleichungen:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} = \frac{\partial W}{\partial y_i}, \quad f_\varrho = 0, \tag{6}$$

von denen sie die Auflösungen sind, zugleich auch der Gle

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \Omega - \sum_1^n{}_h y_h' \frac{\partial \Omega}{\partial y_h'} \tag{7}$$

identisch für alle Werte sowohl der Variabeln $x, y_1, \ldots$ auch der etwaigen willkürlichen Konstanten der Lösung

Es sei a irgend eine solche, in W nicht bloß addi kommende Konstante.

Denkt man sich dann für die y_i' und λ_ϱ die Werte setzt und differenziiert hierauf die Relation (7) partiell und nach a, so erhält man, indem sich die partiellen Diff quotienten der y_h' von selbst wegheben, die Formeln:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y_i} = \frac{\partial \Omega}{\partial y_i} + \sum_1^r{}_\varrho f_\varrho \frac{\partial \lambda_\varrho}{\partial y_i} - \sum_1^n{}_h y_h' \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial \Omega}{\partial y_h'},$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial a} = \sum_1^r{}_\varrho f_\varrho \frac{\partial \lambda_\varrho}{\partial a} - \sum_1^n{}_h y_h' \frac{\partial}{\partial a} \frac{\partial \Omega}{\partial y_h'}.$$

Mit den Gleichungen (6) genügen daher ihre Auflösun zugleich auch für alle Werte von $x, y_1, \ldots, y_n, a$ ident Gleichungen:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 W}{\partial y_i \partial x} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial y_i} - \sum_1^n{}_h \dfrac{\partial^2 W}{\partial y_h \partial y_i} y'_h, \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial a \partial x} = \quad - \sum_1^n{}_h \dfrac{\partial^2 W}{\partial y_h \partial a} y'_h. \end{cases}$$

un im besonderen:

$$V = W(x, y_1, \ldots, y_n, a_1, \ldots, a_n) + \text{const.}$$

l eine vollständige Lösung der partiellen Differentialung (4). Dann ist die Determinante:

$$\sum \pm \frac{\partial^2 W}{\partial y_1 \partial a_1} \frac{\partial^2 W}{\partial y_2 \partial a_2} \cdots \frac{\partial^2 W}{\partial y_n \partial a_n}$$

identisch Null. Daher bestimmen die n Gleichungen:

$$\frac{\partial W}{\partial a_i} = \alpha_i,$$

ıen auch $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ willkürliche Konstanten bedeuten sollen, lie n Unbekannten $y_1, \ldots, y_n$, und wenn die Substitution Auflösungen:

$$y_i = \varphi_i(x, a_1, \ldots, a_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \equiv [y_i]$$

eichungen (5) überführt in:

$$\begin{cases} y'_i = \psi_i(x, a_1, \ldots, a_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \equiv [y'_i], \\ \lambda_\varrho = \pi_\varrho(x, a_1, \ldots, a_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \equiv [\lambda_\varrho], \end{cases}$$

ıügen diese Werte (12) und (13) den Gleichungen (11), 7) und (8) identisch für jedes $x, a_1, \ldots, a_n, \alpha_1, \ldots \alpha_n$. man die Substitution der Werte (12) und (13) durch [ ] hat man also einerseits:

$$\left[\frac{\partial \Omega}{\partial y'_i}\right] \equiv \left[\frac{\partial W}{\partial y_i}\right], \quad \alpha_i \equiv \left[\frac{\partial W}{\partial a_i}\right],$$

raus durch partielle Differentiation nach x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \Omega}{\partial y'_i}\right] \equiv \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y_i \partial x}\right] + \sum_1^n{}_h \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y_i \partial y_h}\right] \frac{\partial [y_h]}{\partial x},$$

$$0 \equiv \left[\frac{\partial^2 W}{\partial a_i \partial x}\right] + \sum_1^n{}_h \left[\frac{\partial^2 W}{\partial a_i \partial y_h}\right] \frac{\partial [y_h]}{\partial x}.$$

Andrerseits ist aber nach (8):

$$\left[\frac{\partial^2 W}{\partial y_i \partial x}\right] \equiv \left[\frac{\partial \Omega}{\partial y_i}\right] - \sum_1^n{}_h \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y_h \partial y_i}\right][y_h'],$$

$$\left[\frac{\partial^2 W}{\partial a_i \partial x}\right] \equiv \qquad - \sum_1^n{}_h \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y_h \partial a_i}\right][y_h'],$$

und wenn man diese Identitäten zu den vorhergehenden a
ergibt sich:

$$(14) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}\right] \equiv \left[\frac{\partial \Omega}{\partial y_i}\right] + \sum_1^n{}_h \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y_i \partial y_h}\right]\left(\frac{\partial [y_h]}{\partial x} - [y_h']\right),$$

$$(15) \qquad 0 \equiv \qquad \sum_1^n{}_h \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y_h \partial a_i}\right]\left(\frac{\partial [y_h]}{\partial x} - [y_h']\right).$$

Nun kann die Determinante (10), da sie an sich nicht
und ganz frei von den unbestimmten Größen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ist,
nicht in Folge der Gleichungen (11) identisch verschwinde
ist daher auch die Determinante der n linearen homo
Relationen (15) nicht identisch Null und diese Relatione
langen folglich, daß einzeln jedes:

$$\frac{\partial [y_h]}{\partial x} - [y_h'] \equiv 0$$

sei, wodurch sich die Relationen (14) auf:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}\right] \equiv \left[\frac{\partial \Omega}{\partial y_i}\right]$$

reduzieren, d. h. aber, da auch jedes $[f_\varrho] \equiv 0$ ist:

Die Differentialgleichungen (2) und (3) werden volls
integriert durch die Auflösungen (12) und (13) der Gleichunge
und (6), Auflösungen, welche zugleich für alle beliebigen
von $a_1, \ldots, a_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Gleichung (7) identisch er
und in denen endlich allgemein ist:

$$(16) \qquad [y_h'] \equiv \frac{\partial [y_h]}{\partial x}.$$

Damit haben wir die kanonische Integrationsmethode der
entialgleichungen unsres Problems gewonnen und können
mehr zur Ableitung des Hilbertschen Unabhängigkeit
übergehen.

Zusammenhang zwischen der Hamilton-Jacobischen partiellen ferentialgleichung und dem Hilbertschen Unabhängigkeitssatze.

Das vorgelegte Problem schreibt den Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ en beiden festen Grenzen x_0 und x_1 fest gegebene Werte vor. t man also $y_{10}, \ldots, y_{n0}$ die gegebenen Anfangswerte der müssen, damit die Aufgabe lösbar sei, weiter nun noch die ichungen (12) zusammen mit den n Gleichungen:

$$y_{i0} = \varphi_i(x_0, a_1, \ldots, a_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

ıbar sein nach ihren $2n$ willkürlichen Konstanten a und α, nur anders ausgedrückt, es müssen die n letzten Gleichungen ıbar sein nach n von diesen Konstanten, und nach Sub- on der Auflösungen müssen die n Gleichungen (12) die n n Konstanten bestimmen.

Bei der Festsetzung:

$$W_0 \equiv W(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}, a_1, \ldots, a_n)$$

n sich aber aus den Gleichungen (11) sofort die n Gleichungen:

$$\frac{\partial(W - W_0)}{\partial a_k} = 0,$$

, die Anfangswerte $x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}$ als fest gegeben betrachtet, ıbekannten $y_1, \ldots, y_n$ als bloße Funktionen von x und von willkürlichen Konstanten $a_1, \ldots, a_n$ bestimmen.

st also, was natürlich hier immer vorausgesetzt wird, die ɔe überhaupt möglich und bestimmt, so müssen die n ungen (19) auflösbar sein auch nach den n Unbekannten , a_n.

ls seien:

$$y_i = Y_i(x, a_1, \ldots, a_n)$$

gen Auflösungen der Gleichungen (19) nach den n Un- ten y_i, die für $x = x_0$ die Werte $y_i = y_{i0}$ annehmen.

ie Gleichungen (19) besitzen dann gleichzeitig immer auch Auflösungen:

$$a_k = A_k(x, y_1, \ldots, y_n) \equiv \{a_k\}$$

en n Unbekannten a_k, welche die Gleichungen (20) identisch , also auch von diesen Gleichungen wieder Auflösungen nd indem man die Werte (20) in die Gleichungen (5) , erhält man nach (16) ein Wertsystem der y_i' und λ_ϱ:

$$(22)\qquad \begin{cases} y_i' = Y_i'(x, a_1, \ldots, a_n) \equiv \dfrac{\partial Y_i}{\partial x}, \\ \lambda_\varrho = L_\varrho(x, a_1, \ldots, a_n), \end{cases}$$

welches zusammen mit den Werten (20) der y_i den Gleichungen (1) und (7) identisch genügt für jedes $a_1, \ldots, a_n$, wobei zu die Werthe der y_i und λ_ϱ ein System partikulärer Lösung Differentialgleichungen (2) und (3) mit nur noch n willkü Konstanten $a_1, \ldots, a_n$ bilden.

Die Einsetzung der Werte (21) der a_k, die durch { vorgehoben werden möge, erfüllt nun die Gleichungen (20) i tisch und verwandelt die Werte (22) der y_i' und λ_ϱ in Funktionen von $x, y_1, \ldots, y_n$. Bezeichnen wir diese Funk durch p_i und μ_ϱ, definieren wir also:

$$(23)\qquad p_i \equiv \left\{\frac{\partial Y_i}{\partial x}\right\}, \quad \mu_\varrho \equiv \{L_\varrho\},$$

so führt die Substitution { } die Gleichungen (20) und (22 in die Identitäten und Gleichungen:

$$(24)\qquad y_i \equiv y_i \text{ und } y_i' = p_i, \ \lambda_\varrho = \mu_\varrho,$$

von denen die n Gleichungen:

$$y_i' = p_i$$

ein System Differentialgleichungen erster Ordnung bilde durch die Gleichungen (20) vollständig integriert wird.

[Für $x = x_0$ reduzieren sich die Gleichungen (20) auf $=$ und bestimmen also gar nicht mehr die Unbekannten a_k. nehmen notwendig ihre Auflösungen (21), und mit diese die Funktionen p_i und μ_ϱ an der Stelle $x = x_0$, wo den gegebenen Anfangswerthe y_{i0} vorgeschrieben sind, die unbes Form $\frac{0}{0}$ an, d. h. die Anfangswerte der Funktionen $\{$ und μ_ϱ sind durch die Anfangswerte der Funktionen y noch nicht bestimmt, sondern hängen auch noch ab v Anfangswerten der Differentialquotienten dieser Funktion besondern lehrt die Definition der p_i und die Entstehu Gleichungen (21) aus den Gleichungen (20), daß fü Funktionensystem $y_1, \ldots, y_n$, welches die gegebenen Af werte besitzt, der Anfangswert von p_i nichts anderes ist Anfangswert des Differentialquotienten y_i'.]

Es mögen endlich $\overline{f}$, $\overline{f_\varrho}$ und $\overline{\Omega}$ diejenigen Funktionen be-
en, die aus f, f_ϱ und Ω durch die Substitutionen (24) ent-
, wenn man die p_i und μ_ϱ zunächst als beliebige Variable
t.

Die Werte (20) und (22) genügen den Gleichungen (6)
7) identisch für alle Werte von $a_1 \ldots, a_n$. Diese Identi-
können daher nicht aufgehoben werden durch Substitution
erte (21) der a_k. Nach (24) und nach den eben gegebenen
tionen gehen sie aber hierdurch über in:

$$\frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial p_i} \equiv \left\{\frac{\partial W}{\partial y_i}\right\}, \quad \overline{f_\varrho} \equiv 0, \quad \overline{\Omega} - \sum_1^n{}_i p_i \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial p_i} \equiv \left\{\frac{\partial W}{\partial x}\right\},$$

m natürlich unter den p_i und μ_ϱ die bestimmten, durch
lefinierten Funktionen von x, $y_1, \ldots, y_n$ zu verstehen sind.
Identitäten lehren, daß für alle beliebigen Funktionen
., y_n von x die Relation besteht:

$$\bar{f} + \sum_1^n{}_i (y_i' - p_i) \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial p_i} \equiv \left\{\frac{\partial W}{\partial x}\right\} + \sum_1^n{}_i \left\{\frac{\partial W}{\partial y_i}\right\} y_i'.$$

seits hat man, wenn man durch die Substitution $\{\,\}$
die Funktion $W - W_0$ überführt in eine Funktion von
$\ldots, y_n$ allein:

$$\frac{\{W - W_0\}}{x} \equiv \left\{\frac{\partial W}{\partial x}\right\} + \sum_1^n{}_i \left\{\frac{\partial W}{\partial y_i}\right\} y_i' + \sum_1^n{}_k \left\{\frac{\partial (W - W_0)}{\partial a_k}\right\} \frac{d\{a_k\}}{dx},$$

Werte (21) der a_k sind Auflösungen auch der Gleichungen (19),
t jedes:

$$\left\{\frac{\partial (W - W_0)}{\partial a_k}\right\} \equiv 0.$$

en beiden vorhergehenden Identitäten fließt daher sofort
rmel:

$$\bar{f} + \sum_1^n{}_i (y_i' - p_i) \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial p_i} \equiv \frac{d\{W - W_0\}}{dx},$$

nichts anderes ist als die kanonische Form des Hilbert-
Unabhängigkeitssatzes, und aus der, für alle Funktionen
y_n, welche an der Stelle $x = x_0$ die festen Anfangswerte

$y_{10}, \ldots, y_{n0}$ besitzen, und zwischen den Grenzen x_0 und x die Funktion $\{W - W_0\}$ stetig erhalten, folgt:

$$(27) \qquad \int_{x_0}^{x} \left(\bar{f} + \sum_1^n (y_i' - p_i) \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial p_i} \right) dx \equiv \{W - W_0\}. -$$

Obgleich diese Resultate bereits vollständig ausreichen, um die gewünschte Ausdehnung des Unabhängigkeitssatzes in vollster Allgemeinheit darstellen zu können, schalte ich hier doch noch die folgenden, für diese Ausdehnung selbst überflüssigen Betrachtungen ein, weil dieselben die allgemeinen Beziehungen zwischen der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung (4), und der Aufgabe, den Ausdruck

$$(28) \qquad \bar{\Omega} + \sum_1^n (y_i' - p_i) \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial p_i}$$

zu einem vollständigen Differentialquotienten zu machen, und dabei neben auch noch den r endlichen Gleichungen:

$$(29) \qquad \bar{f}_\varrho = 0$$

zu genügen, einerseits, und andrerseits zwischen dieser letzten Aufgabe und der Integration der Differentialgleichungen (2) und (3) in ein helleres Licht setzen.

Zunächst sieht man sofort, daß die mittlere Aufgabe und die letzte Aufgabe, von der Gleichung (4) eine Lösung zu finden, nur verschiedene Formen einer und derselben Aufgabe sind.

Jedem System Funktionen $p_1, \ldots, p_n, \mu_1, \ldots, \mu_r$ von $x, y_1, \ldots, y_n$, für die der Ausdruck (28) ein vollständiger Differentialquotient wird, und die zugleich den Gleichungen (29) identisch genügen, kann man nämlich vermöge einer bloßen Quadratur eine solche Funktion V derselben Variabeln hinzufügen, daß die betrachteten Funktionen identisch auch der Gleichung genügen:

$$(30) \qquad \bar{\Omega} + \sum_1^n (y_i' - p_i) \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial p_i} = \frac{dV}{dx}.$$

Dann aber erfüllen diese Funktionen identisch die Gleichung

$$\bar{\Omega} - \sum_1^n p_i \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial y_i} = \frac{\partial V}{\partial x}$$

und:

$$(31) \qquad \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial p_i} = \frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad \bar{f}_\varrho = 0,$$

daher ist die Funktion V eine Lösung derjenigen partiellen
entialgleichung erster Ordnung, welche entsteht, wenn man
lst der $n + r$ letzten Gleichungen die $n + r$ Größen p_i und
ıs der vorhergehenden Gleichung eliminiert, d. h. sie ist eben
Lösung der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialglei-
ı; (4) (daher denn, was übrigens auch unmittelbar einleuchtet,
unsere Funktion $\{W - W_0\}$ eine solche ist). Und umge-
erhält man aus jeder Lösung V dieser Gleichung ein Funk-
ıssystem $p_1, \ldots, p_n, \mu_1, \ldots, \mu_r$, das die Gleichungen (29)
30) identisch erfüllt, indem man die $n + r$ Gleichungen (31)
diesen $n + r$ Unbekannten auflöst.

Damit aber die p und μ solche Funktionen von $x, y_1, \ldots, y_n$
welche den Ausdruck:

$$\overline{\Omega} + \sum_1^n{}_h (y_h' - p_h) \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial p_h} \equiv B + \sum_1^n{}_h B_h y_h'$$

ıem vollständigen Differentialquotienten machen, müssen die-
den $n + \frac{n(n-1)}{2}$ Integrabilitätsbedingungen identisch ge-
:

$$\frac{\partial B_i}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y_i} = 0, \quad \frac{\partial B_i}{\partial y_h} - \frac{\partial B_h}{\partial y_i} = 0.$$

liesen kann man in Folge der letzten die n ersten ersetzen
die:

$$\frac{\partial B_i}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y_i} + \sum_1^n{}_h p_h \left(\frac{\partial B_i}{\partial y_h} - \frac{\partial B_h}{\partial y_i} \right) = 0.$$

ies ist, weil die partiellen Differentialquotienten p_h sich von
wegheben:

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\overline{\Omega} - \sum_1^n{}_h p_h \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial p_h} \right) \equiv \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial y_i} + \sum_1^r{}_\varrho \frac{\partial \mu_\varrho}{\partial y_i} \bar{f}_\varrho - \sum_1^n{}_h p_h \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial p_h};$$

:

$$B_h \equiv \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial p_h}$$

sich daher die Integrabilitätsbedingungen so schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial p_i} + \sum_1^n{}_h p_h \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial p_i} - \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial y_i} = \sum_1^r{}_\varrho \bar{f}_\varrho \frac{\partial \mu_\varrho}{\partial y_i},$$

$$\frac{\partial}{\partial y_h}\frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial y_i}\frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial p_h} = 0, \tag{33}$$

wo erst bei den zweiten partiellen Differentiationen di
hängigkeit der p und μ von $x, y_1, \ldots, y_n$ zu berücksichtig

Nach dem eben Bemerkten liefert also jede Lösung
Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung (
solches System von Lösungen $p_1, \ldots, p_n, \mu_1, \ldots, \mu_r$
$n + \frac{n(n-1)}{2}$ partiellen Differentialgleichungen erster Or
welches gleichzeitig den r endlichen Gleichungen (29)
und das allgemeinste System Lösungen dieser Art wird
die Gleichungen (31) definiert, wenn man in diesen unter
allgemeine Lösung der Gleichung (4) versteht.

Sind endlich die p_i und μ_ϱ solche Funktionen von $x, y_1,$
welche die Gleichungen (29) und (32) identisch erfüller
bildet man mit diesen Funktionen die n Differentialgleich
erster Ordnung und die r endlichen Gleichungen:

$$y_i' = p_i(x, y_1, \ldots, y_n), \quad \lambda_\varrho = \mu_\varrho(x, y_1, \ldots, y_n), \tag{34}$$

so erkennt man aus der Form der Gleichungen (32) sofor
die vollständigen Lösungen der Gleichungen (34) gleic
auch Lösungen der Differentialgleichungen (2) und (3)
Nach dem Vorhergehenden gibt es daher neben unseren fi
Gleichungen (24) noch unendlich viele andere System
Gleichungen (34), welche die doppelte Eigenschaft besitze
ihre vollständige Integration Lösungen auch der Diffe
gleichungen (2) und (3) liefert, und daß für ihre rechten
zugleich der Ausdruck (28) ein vollständiger Differentialq
wird, was unmittelbar den bekannten Satz enthält, daß
Lösung ihrer Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgl
Lösungen der Differentialgleichungen (2) und (3) mit n
willkürlichen Konstanten zugehören.

Dagegen sind die Integrabilitätsbedingungen (33)
bloßen Folgen der Bedingungen (32) und der Gleichunge
Daher gilt nicht mehr, wie im Falle $n = 1$, der Satz, daß
in jedem System Gleichungen (34), dessen vollständige Lö
zugleich den Differentialgleichungen (2) und (3) genüge,
rechten Seiten solche Funktionen wären, welche den A
(28) zu einem vollständigen Differentialquotienten machen

Allgemeiner Ausdruck des Hilbertschen Unabhängigkeitssatzes.

fit dem in (26) enthaltenen Resultate, daß der Ausdruck:

$$\bar{f} + \sum_1^n (y_i' - p_i) \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial p_i}$$

ie durch (23) definierten Funktionen p_i und μ_ϱ ein voll-
ger Differentialquotient wird, ist die Ausdehnung des
rrschen Unabhängigkeitssatzes auf das vorgelegte Problem
nen und bewiesen, zunächst freilich nur unter der Voraus-
g, daß man in den vollständigen Lösungen:

$$y_i = \varphi_i(\alpha, a_1, \ldots, a_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$
$$\lambda_i = \pi_\varrho(\alpha, a_1, \ldots, a_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

ifferentialgleichungen des Problems kanonische Konstanten
., a_n, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ eingeführt habe. Da aber unsere
onen:

$$Y_i, \quad \frac{\partial Y_i}{\partial x} \quad \text{und} \quad L_\varrho$$

ive aus den Funktionen:

$$\varphi_i, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \quad \text{und} \quad \pi_\varrho$$

gehen müssen, wenn man darin die Auflösungen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$
Gleichungen (17) einsetzt, so kann man kurz sagen: Man
die in (23) definierten Funktionen p_i und λ_ϱ, indem man
lfe der $2n$ Gleichungen:

$$\varphi_i(x_0, a_1, \ldots, a_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = y_{i0},$$
$$\varphi_i(x, a_1, \ldots, a_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = y_i$$

kanonischen Konstanten $a_1, \ldots, a_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ aus den
ngen eliminiert:

$$p_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}, \quad \mu_\varrho = \pi_\varrho.$$

nun die Gleichungen:

$$y_i = \theta_i(x, c_1, \ldots, c_{2n}), \quad \lambda_\varrho = X_\varrho(x, c_1, \ldots, c_{2n})$$

ein System vollständiger Lösungen der Differentialgleichungen
l (3) dar, so muß es notwendig $2n$, von x freie Sub-
nen von der Form:

$$c_h = C_h(a_1, \ldots, a_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

geben, welche

$$\theta_i \equiv \varphi_i, \quad X_\varrho \equiv \pi_\varrho$$

und damit auch

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial x} \equiv \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}$$

machen, und man kann dann also unsere Funktionen p_i dadurch erhalten, daß man mittelst der $4n$ Gleichungen

$$(37) \quad \theta_i(x_0, c_1, \ldots, c_{2n}) = y_{i0}, \quad \theta_i(x, c_1, \ldots, c_{2n}) = y$$

die $4n$ Konstanten

$$c_1, \ldots, c_{2n}, \quad a_1, \ldots, a_n, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n$$

aus den Formeln:

$$(38) \qquad p_i = \frac{\partial \theta_i}{\partial x}, \quad \mu_\varrho = X_\varrho$$

eliminiert. Die Konstanten a und α eliminieren sich a durch von selber, daß man einfach die Transformations (36) ganz wegläßt, und man braucht somit nur die 2 grationskonstanten c vermöge der $2n$ Gleichungen (37) a zu eliminieren. Führen wir diese Elimination nicht auf sondern wieder in zwei Absätzen aus, so können wir h unser Resultat allgemein so aussprechen:

Hat man von den, mit der Funktion:

$$\Omega \equiv f(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') + \sum_1^r{}_\varrho \lambda_\varrho f_\varrho(x, y_1, \ldots, y_n, y_1'$$

gebildeten $n + r$ Differentialgleichungen:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} = \frac{\partial \Omega}{\partial y_i}, \quad f_\varrho = 0$$

irgend ein System vollständiger Lösungen:

$$y_i = \theta_i(x, c_1, \ldots, c_{2n}), \quad \lambda_\varrho = X_\varrho(x, c_1, \ldots, c_{2n})$$

gefunden, so bestimme man aus den n Gleichungen:

$$\theta_i(x_0, c_1, \ldots, c_{2n}) = y_{i0}$$

n von den $2n$ Integrationskonstanten $c_1, \ldots, c_{2n}$ durch übrigen. Gehen durch Einsetzung der Auflösungen d ständigen Lösungen über in die (bei fest gegebenem $x_0, y_{10}, \ldots$ partikulären Lösungen mit nur noch n willkürlichen Ko $c_1, \ldots, c_n$:

$$y_i = Y_i(x, c_1, \ldots, c_n), \quad \lambda_\varrho = L_\varrho(x, c_1, \ldots, c_n),$$

ucht man nur mit Hilfe der n ersten dieser letzten Gleichungen s Konstanten aus den n + r Gleichungen:

$$y_i' = \frac{\partial Y_i}{\partial x}, \quad \lambda_\varrho = L_\varrho$$

minieren, um in den rechten Seiten der so entstehenden ungen:

$$y_i' = p_i, \quad \lambda_\varrho = \mu_\varrho$$

Funktionen von $x, y_1, \ldots, y_n$ gewonnen zu haben, welche usdruck:

$$\overline{f} + \sum_1^n{}_h (y_h' - p_h) \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial p_h}$$

em vollständigen Differentialquotienten machen und überdies Gleichungen:

$$\overline{f}_\varrho = 0$$

ch genügen.

Dabei bedeuten $\overline{\Omega}, \overline{f}, \overline{f}_\varrho$ diejenigen Funktionen von $x, y_1, \ldots, y_n$, $\ldots, p_n, \mu_1, \ldots, \mu_r$, die durch die $n + r$ Substitutionen (α) f, f_ϱ entstehen, und von diesen Substitutionen bilden die ten ein System von n Differentialgleichungen erster Ord- das durch die n Gleichungen $y_i = Y_i$ vollständig integriert —

Will man diesen Satz unabhängig von der Hamilton-schen partiellen Differentialgleichung beweisen, so muß zeigen, daß die auf die angegebene Weise erhaltenen ionen $p_1, \ldots, p_n, \mu_1, \ldots, \mu_r$ den $n + \frac{n(n-1)}{2}$ partiellen ntialgleichungen erster Ordnung (32) und (33) genügen. uchtet nun zwar für die Gleichungen (32) sofort ein und ich im Falle $n = 2$ auch noch ohne allzugroße Rechnung ie eine Gleichung nachweisen, auf welche sich dann das a (33) reduziert; im allgemeinen Falle aber einen solchen n Beweis für die Gleichungen (33) zu erbringen, scheint iche Schwierigkeiten darzubieten.

---

rtig erklärt 31. V. 1903.

NOVA

ODUS DIFFERENTIANDI,

DEMONSTRATA

AB

LOYSIO MAYR.

STUTTGARDTIAE.
TIBUS J. G. COTTAE.
MDCCCXXX.

malem, summa defendatur sagacitate nec semper esse vocem inanem.

Theoria vero functionum, demonstrata Grange mihi ita placuit, ut nil nisi ...es. culi, quem Leibnitius demonstraverat, etiu obstiterit, quominus me totum ei dede.m. culus enim Leibnitii brevissimus est, atqu cilis adhibitu, plurimaque alia praestat omn

Igitur tum spe, rejectis quantitatibus, dicuntur infinitesimales, mathesin unam tota reddendi, tum rei ipsius gravitate incitaba viam ingrederer novam, methodumque quae mathesi dignam. Quod quum assequtus mihi viderer, methodum, qua res mii su serit, omnibus patefaciendam censui ut perirer, quid judicent viri, mathesi mpli spectati, quorum equidem neque assensum dissensum parvi habebo.

Dabam Monachii Nonis Majis 18...

is ifferentialis, quem *Leibnitius* primus omnium
cn universam mathesin, tum eas hujus disci-
pa es, quae adtinent ad theoriam linearum cur-
rifice amplificavit.

ho is, qua usus erat *Leibnitius*, non ita placuit
at is, qui eum secuti sunt, quin eam vario
or zendam atque sensui vulgari appropinquandam
nt Haud ignota est methodus quantitatum eva-
iu cujus auctor *Eulerus* est, nec ignota metho-
it n, quam adhibuerat *Newtonus*, valde quam
at ab *D'Alembert*. Veritates analyticae hisce
is mnisi usu quantitatum infinite parvarum eruun-
ua quantitates, quum omnem conceptum, omnem-
ns i eludant atque subterfugiant, *La Grange*,
nil s mathematicis palmam eripuit coaevis, relicta
ia igressi erant Leibnitius, Eulerus, ceterique,
qu eorum methodis, plane novum mirabilemque
it alculum, qui ab eo dictus est *theoria functio-*
ua quidem theoria demonstravit multas veritates,
sq dum nonnisi auxilio quantitatum infinite par-
er bantur.

ds omnia, quae ad calculum differentialem refe-
h theoriae functionum ita cederent, ut haud
pe detegerentur construerenturque, illa theoria,
ri alis digna foret, quam omnes omnium ter-
at matici laeti gratique acciperent.

Verum quod *Carnot* in istam methodum o..erva
esse nimium difficilem, minusque aptam ad ..um,
ita se habet. Dubitandum quoque censeo, ..ve
quas eruit methodus differentialis, unquam dem
tura fuerit illa theoria functionum, cum eru..rum
vix comprobet.

Minime vero concedendum est, ut opus h..us il
simi mathematici incassum sit atque perd..m
vanda ex ista theoria servatu digna, reliqu dim

Veritates theoriae functionum, quas s..vand
tinendasque censeo, hae sunt:

1) Si supponimus quantitati x, quae ..t va
alicujus functionis, quantitatem (x + i) i de
quantitatem quandam indeterminatam, funct fu
talis in seriem permutabitur formae sequen..s:

$$f(x+i) = fx + pi + qi^2 + ri^3 \cdots$$

Quantitates hujus seriei p, q, r,.. quae sut coë
tes potestatum quantitatis i, novae functiors qu
x erunt, eaeque derivatae a functione primitiva
independentes ab indeterminata i.

2) Si designamus per f'x primam fun..ione
vatam ab fx; per f''x primam functionem deriv
f'x; per f'''x primam functionem derivata a f
demonstratur, functionem f (x + i) esse aequalem

$$f(x+i) = fx + f'x\,i + \frac{f''x}{2}\,i^2 \cdots \frac{f'''}{2.3}$$

$$+ \frac{f''''x}{2.3.4}\,i^4 + \cdots$$

3) Servandas censeo formulas logarithmicas,
dumque, qua ipsas demonstravit mira cum eleg

4) Servandas formulas trigonometricas, quas
debemus; quae ab *La Grange* eruebantu sine
quantitatum infinite parvarum:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \cdots$$

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \ldots$$

antitas: $\dfrac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, e denotante ba-

hmorum naturalium, eandem continet seriem,
x format. Est nempe:

$$\frac{e^{-x\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}} = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \ldots$$

$$= \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

modo demonstratur:

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2.}$$

atu receptuque dignas censeo disquisitiones
et minimis. Cetera illius theoriae functio-
cipue quae adtinent ad quadraturam atque
linearum curvarum, quaeque extenduntur ad
, dimitto, quippe quae sint minus apta, mi-
eralia, nimisque difficilia. Methodus, quae
spondeat, omnibusque placeat aeque facilis
atque generalis, ac methodus differentialis

ethodum proponimus.

---

elementis geometriae, lineam rectam mul-
er aliam lineam esse planitiem; unde con-
eam curvam non ortam esse multiplicatione
ctarum, sed multiplicatione lineae cujusdam
numerum quendam sive rationalem, sive

itur habemus partem z curvae alicujus, de-

finimus dz eam lineam, quae multiplicata p nu cujuscunque generis efficit partem z hujus cu ae.

Hanc lineam dz nominamus lineam fund ent

Linea recta igitur dz non laborat ea liffi qua ceterae oppressae sunt methodi, diffi ltate titatum infinite parvarum, quae semper ma a e negligendae sunt.

Quantacunque sit dz nihil ad rem; am augetur, minuitur quantitas numeri sui coëicien minuitur, hic numerus augetur.

Cum sit dz linea recta, aeque bene tr tari ac ceterae lineae rectae, adhibeturque ex gr. mandum triangulum.

Nulla autem invenitur curva sine quantatib formantibus atque constituentibus, quae su abs et ordinata y — quantitas utraque variabili

Unicuique parti lineae curvae responde igit tes quantitatum ordinatae atque abscissae.

Sint autem dx et dy quantitates, qua resp quantitati dz.

Primum omnium patet, dx et dy esse neas complerique per coëfficientem in lineam retam sae atque ordinatae.

Quantitas autem linearum dx et dy cons quantitate dz; quae cum sit omnino varia lis, quantitates dx et dy fore variabiles.

Deinde patet, quantitates dx et dy ess parte cunque linearum x et y; quum enim quantates dy sint lineae rectae aeque ac quantitates et stat inter illas esse relationem numerica, un cluditur, unam lineam dx aut partem esse it mu lineae alterius x.

Quantitas dz non est pars aliqua ipsi line vae z, cum ipsa sit linea recta, sed ea et par rectificatae, si qua existit.

Igitur omnis quaestio in hoc versatur, qua

ist quantitates dz, dx, dy derivari possint a quantitatibus z, x et y.

Facilis quidem derivatio quantitatum dx et dy, si per se solas considerentur; quamcunque enim sumseris partem ordinatae vel abscissae, habebis eas quantitates derivatas.

Difficilior autem exoritur labor, si x atque y considerantur quantitati z, quae nullam habet partem rectilinearem.

Patet ex aequationibus curvarum, quas notas fecit *Caesius*, curvam quamcunque regularem definitam esse per lineas rectas, quae sunt constans, abscissa et ordinata; quibus ex aequationibus cognoscimus, omnem differentiam curvarum atque rectarum linearum vel planitierum curvilinearium et rectilinearium in hoc positam esse, ut lineae curvae constituantur potentiis quantitatum, dum lineae rectae constituuntur meris quantitatibus.

Omnis igitur labor hic frustrabitur, nisi habeamus methodum reducendi potentias in meras quantitates; quae solae habent algorithmum linearum rectarum.

Reducimus autem potentias in meras quantitates per logarithmos atque inprimis per logarithmos naturales.

Ex. gr. $\log. (y^x) = x \log y$,

quae omnibus notum est.

Quaestio igitur nostra ad hoc redacta est, num valeamus per logarithmos invenire quantitates dz, dx, dy etc. ex quantitatibus x, y, z.

Restat igitur, ut algorithmum derivationis harum quantitatum dx, dy pro logarithmis constituamus, cum satis luciat demonstrasse hunc calculum Logarithmicum; omnes enim quantitates redigi possunt in logarithmos.

Numeri, eorumque logarithmi correspondentes formam duas lineas rectas, ut jam constat ex prima de-

monstratione *Neperi*. Ex. gr. si numerus 1000 stematis logarithmorum, quorum basis est 10, ficit lineam 1000 partium, logarithmus 3, qui huic respondet, efficit lineam trium partium. Sic numerus 10000 habet lineam 10,000 partium, atque logarithmus qui huic numero respondet, lineam quatuor partium.

Inaequaliter igitur crescunt istae lineae. Quodsi designemus lineam numerorum y, atque lineam logarithmorum x, constat y et x esse quantitates variabiles, quae unacum crescunt atque decrescunt inaequaliter.

Quum vero quantitates y et x sint lineae totae, quantitates dy et dx erunt partes linearum istarum, earumque habebunt algorithmum.

Si invenerimus igitur dy, constat, quantitatem dx, quae ei respondet, conjunctam esse cum coëfficiente, si aequari velit dy.

Cum enim x et y crescant inaequaliter, atque in systemate logarithmorum naturalium y major sit, quam x, differentiaque inter y et x semper major fiat, quantitas x multiplicetur semper oportet per aliam quantitatem, quae ipsa crescit cum y vel cum x.

Eodem modo quantitates fundamentales dy, dx cum sint partes linearum x et y, conjunctas esse oportet cum coëfficiente variabili; unde concludimus, quantitatem dx conjunctam esse cum coëfficiente (qui dependet ab x vel ab y), ut sit aequalis quantitati dy, quae est sine coëfficiente.

Poterimus igitur ex quantitate dy sejungere quantitatem dx, si in expressione dy, substituamus $(x-x)$ *pro x.*

Habemus autem:

$$y = e^x,$$

$$y + dy = e^{x+dx},$$

$$dy = e^{x+dx} - y,$$

$$= e^{x+dx} - e^x.$$

)uodsi igitur in expressione dy substituerimus (x—x) pr x, habebimus

$$dx = e^{(x-x)+\delta x} - e^{x-x}$$

$$dx = e^{\delta x} - 1;$$

$$dy = e^{x}\left(e^{\delta x} - 1\right); \text{ unde}$$

$$dx : dy = \left(e^{\delta x} - 1\right) : e^{x}\left(e^{\delta x} - 1\right), \text{ unde}$$

$$dy = e^{x}\, dx, \text{ sive}$$

$$dy = y\, d \log. y.$$

)uales igitur sint dx et dy natura ipsa logarithmo- ur docuit.

n igitur habetis fundamentum calculi differentialis; ju fundamentum rejicit quantitates istas, infinite par- as nonnisi imaginarias.

alculus, quem habemus, perficitur sine ulla neglec- io , ne infinite quidem parvarum quantitatum, quod na mi est momenti.

)bservandum est, y esse expressionem linearem; x xpressionem numericam; dy esse expressionem li- ne em, δx expressionem numericam (quam diverso ch acteristico δx designavimus). dx est expressio in ris, derivata ab expressione numerica.

)uod resultat:

$dy = e^{x}\, dx$ respondet propositioni fundamentali, quod in recta dx multiplicata per numerum e^{x} linea recta ev at, nempe dy.

nde intelligimus, naturam logarithmorum pro nobis er omne suscepisse negotium.

rogrediamur ad solvenda cuncta calculi differentia- is roblemata, hisce praemissis:

) Quum dy resultet ex differentia $e^{x+\delta x} - e^{x}$, at , constantem quantitatem, si qua cum e^{x} conjuncta it non contineri in expressione dy. Tollitur enim er se ipsam.

Ex. gr. $y = e^x + a$

$$dy = e^{x+\delta x} + a - (e^x + a)$$
$$= e^{x+\delta x} - e^x$$

Idem igitur inde resultat, ac si haberemus $y = x$.

Unde regula derivatur *quantitatum constantium* eadem, quae in calculo Leibnitii.

2) Si $y = x + v$, plane patet

$dy = dx + dv$, quia $y = x + v$ est expressio rectilinearis. Sunt igitur x et v partes rectilineres, quae eundem habent algorithmum, quem y habet.

3) Si $x = mx$, erit $dy = mdx$ eadem ex ratione

Expressio enim $y = mx$ est expressio rectilinearis; dy et dx sunt igitur partes quantitatum y et x. Coëfficiens autem quantitatis totius, partis quoque coëfficiens est, quod constat ex primis multiplicationum regulis.

Disquiramus igitur expressiones varias functionum, regulasque pro his constituamus!

1) Formula fundamentalis $y = e^x$

$$dy = y\,d \log. y; \quad \frac{dy}{y} = d \log. y.$$

2) $y = x^m$

$$dy = x^m\ d\ (\log. x^m) = x^m\ d\ (m \log. x)$$

$$dy = x^m . m . d\ (\log. x) = mx^m \frac{dx}{x}$$

$$dy = mx^{m-1} dx.$$

3) $z = xy$

$$dz = xy\ d \log. (xy) = xy\ d\ (\log. x + \log. y)$$

$$dz = xy\ (d \log. x + d \log. y) = xy \left(\frac{dx}{x} + \frac{d}{y}\right)$$
$$= ydx + xdy.$$

4) $z = \frac{x}{y}$

$$dz = \frac{x}{y}\ d \left(\log. \frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y}\ d\ (\log. x - \log.)$$

$$= \frac{x}{y}(d \log. x - d \log. y) = \frac{x}{y}\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right)$$

$$= \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

$z = e^{mx}$

$dz = d(e^{mx}) = e^{mx}\, d(\log. e^{mx})$

$dz = e^{mx}\, d(m \log. e^{x}) = me^{mx}\, d(\log. e^{x})$

Est autem $\log. e^{x} = x$, unde

$d \log. e^{x} = dx$;

Inde sequitur:

$dz = me^{mx}\, dx$.

Patet ex theoria functionum:

$$\sin. x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}};$$

$$\cos. x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2};$$

Inde deducimus

$$\sin. x = \frac{d\left(e^{x\sqrt{-1}}\right) - d\left(e^{-x\sqrt{-1}}\right)}{2\sqrt{-1}}$$

Substituamus in formulam praecedentem $2\sqrt{-1}$ loco $\sin. x$, unde habebimus

$$\sin. x = \frac{(\sqrt{-1})\, e^{(x\sqrt{-1})}\, dx + (\sqrt{-1})\, e^{(-x\sqrt{-1})}\, dx}{2\sqrt{-1}};$$

Multiplicemus per $(\sqrt{-1})$ atque disjungamus dx; erit

$$\sin. x = \frac{\left(e^{x\sqrt{-1}} + e^{(-x\sqrt{-1})}\right) dx}{2}; \text{ unde}$$

$$\sin. x = \cos. x.\, dx.$$

$$\cos. x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

$$d\cos. x = \frac{(\sqrt{-1})\, e^{x\sqrt{-1}}\, dx - (\sqrt{-1})\, e^{-x\sqrt{-1}}\, dx}{2}$$

Si multiplicamus numeratorem atque denominatorem per quantitalem $(\sqrt{-1})$,

$$\text{erit } d\cos. x = \frac{\left(-1\, e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}\right) dx}{2\sqrt{-1}}$$

$$d\cos. x = -\frac{\left(e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}\right) dx}{2\sqrt{-1}}, \text{ unde}$$

$$d\cos. x = -\sin. x\, dx.$$

Ex his formulis omnes qualescunque formulas differentiales derivari posse, satis constat.

Cum satisfecerimus cunctis propositionibus calculi differentialis, convenit pauca adjungere de usu hujus methodi.

Qui quidem usus idem est, quem praebet methodus Leibnitiana.

Ex. gr. cum sint dx et dy partes linearum rectarum abscissae x et ordinatae y; atque dz pars curvae lineae rectificatae, eodem modo triangulum differentiale formatur, quo modo in calculo Leibnitiano.

Integratio hujus trianguli dat planitiem curvineam, quam quaerimus.

Nostra methodus facilior est applicatu, quam ipsa methodus Leibnitii, quippe quae ex ipsa applicationis postulatione processerit.

Haec est una differentia inter nostram et Leibnitii methodum, quod triangulum differentiale, quod nos formamus, non est infinite parvum, sed omnino interminatum, quod haud minimi momenti est, cum quantitates infinite parvae nonnisi tamquam imaginariae cognoscantur.

Solutum igitur est illud problema, quod Leibnitius primus solvere studuit — ab illustrissimis mathematicis varie tentatum — problema, quo continetur calculus

iff entialis solutum est methodo habili, directa atque nal ica.

quis objiciat:

rir m unde certi simus, in formula $dy = e^{x+\delta x} - e^x$ pag 11), substituto (x—x) pro x, restare quantitatem dx; ein e quae sit differentia inter dx et δx, an nulla existat iff entia, respondemus:

Demonstratum est, in formula $e^{x+\delta x} - e^x$, quae est d contineri dx atque functionem quamcunque con- itu m ex quantitate x. Quantitates dx et x ita con- nc e sunt, ut una sublata, quod fit substitutione quan- tat (x—x) pro x, altera aut evanescat, aut remaneat la. Sublata autem quantitate x, habebimus:

$$f(x-x)\,dx = e^{\delta x} - 1.$$

I n igitur evanescit dx, quod remanet $e^{\delta x} - 1$, unde qu ur $dx = e^{\delta x} - 1$.

I n evanuit quidem dx sublata x, licet sublata y, llat r dx. Erit enim $f(y-y)\,dx = o$.

2 Quaerenti, num sit differentia inter δx et dx, re- on emus: in formula $y = e^x$ utraque quantitas x atque n erus est. Ex. gr. in systemate Logarithmorum, si 0 sumta, numerus $1000 = y$, et $3 = x$; y igitur n lum consideratur tanquam quantitas potentialis 10^3, d iam tanquam numerus 1000. Si quantitas funda- ent is investigatur, dx pertinet ad numeralem, δx ad te ialem quantitatem, ex. gr. dx ad 1000; δx ad 10^3. ta r vero numerus 1000, dum in formula 10^3 numerus n neat invariabilis et sola quantitas 3 mutetur. Dif- ur igitur δx et dx nonnisi forma, qua exprimuntur, n ero quantitate; atque dimissa differentia inter 10^3 10 0, δx et dx eaedem sunt quantitates.

C va mutatur in lineam rectam, fundamentalibus ad- iti quantitatibus. Cum vero curva qualiscunque major

sit, quam chorda, ipsi respondens, patet, dx atq dy (x et y significantibus abscissam atque ordinatam) cre ere eadem in ratione, qua curva chordam superet. Crescent igitur dx et dy, si comparentur cum Constante, e gr. cum parametro, quia immutabilis est ratio chordae que constantis.

Calculo igitur differentiali id assequi studemus, ut a rationibus quantitatum dx et dy transeamus ad ratiaem quantitatum x et y.

Quicunque mathematicorum calculo Leibniti ute-bantur, vel quicunque eum clariorem reddere stud ant, in hunc inciderunt errorem, ut considerantes minam partem curvae tanquam lineam rectam, transgredi esci-rent ex ratione atque formula quantitatum differenti ium in rationem quantitatum coordinatarum. Unde fier non potuit, quin quantitatem $dx = e^{dx} - 1$ (sive $dy = dx$) eidem algorithmo, quem x et y possident, subjectam sumerent. Quodsi idem utriusque quantitatis est lgo-rithmus, permutantes illam formulam, invenimus $1 + dx = e^{dx}$; unde $dx = \log.(1 + dx)$; quae formula secudum leges Arithmeticas, nonnisi $dx = 0$ posito, ver est, nempe $0 = \log. 1$; quod quidem ita se habere, satis constat.

Cognoscimus inde, quo casu acciderit, ut calculus differentialis illa quidem perversa adhibita methodveritates omnino deruerit. Omnes enim isti mathematici, necessitate monente, neglexere dx et dy, tanquan= 0, quod sibi permiserunt, non quidem vera et genuinaclaritate, quam in summis laudibus ponit mathesis, quque, omnes ut consentiant efficit, adducti: sed omne se pctum tulisse rati, si compendia invenissent, quibus levior calculus, faciliorque redderetur.

er Theilbarkeitseigenschaften ganzer Functionen höherer Differentialquotienten.

Von

Franz Meyer in Clausthal.

In einer früheren Arbeit habe ich eine einfache Methode zur Auf- ng der algebraischen Gleichungen $f(x) = 0$ gegründet auf die ng der Aufgabe, für das Argument einer ganzen rationalen Func- $f(x)$ eine solche rationale Function y_n desselben zu substituiren, $f(y_n)$ mit der n^{ten} Potenz von $f(x)$ proportional wird. Dabei ergab die Differenz $y_n - x$, abgesehen vom Factor $nf(x)$, als der Quotient $n-1)^{\text{ten}}$ und des n^{ten} Differentialquotienten von der gebrochenen tion $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, deren Zähler eine zu $f(x)$ theilerfremde, im Uebrigen willkürliche ganze rationale Function von x darstellte.

Setzt man den angegebenen Werth von y_n in $f(y_n)$ ein, und ent- lt nach Potenzen von $y_n - x$, so findet die erwähnte Thatsache Ausdruck in dem Satze, dass eine gewisse ganze rationale Func- von $\varphi(x)$ und $f(x)$ nebst ihren Ableitungen (bis zur n^{ten} incl.) $\nu+1)^{\text{te}}$ Potenz von $f(x)$ als Factor zulässt, d. h. durch $f^{n+1}(x)$ ar wird.

Es drängt sich naturgemäss die Frage auf, inwieweit der in Rede nde Satz von dem Charakter der Functionen $\varphi(x)$ und $f(x)$ ab- g ist: erst nach Erledigung dieser Vorfrage kann man dazu über- , die oben citirte Auflösungsmethode auf transcendente Glei- en zu übertragen.

Vermöge einer naheliegenden Verallgemeinerung wird man so zu ufgabe geführt: „Entwickelt man den Quotienten $\frac{\varphi(x+h)}{f(x+h)}$, wo und $f(x)$ beliebige Functionen von x bedeuten, in eine Taylor'sche nach Potenzen von h, und setzt die Differenz $y_n - x$ gleich Quotienten zweier consecutiver Coefficienten u_{n-1}, u_n jener Ent- ung; entwickelt man jetzt die Function $f(y_n)$ wiederum in eine 'sche Reihe nach Potenzen von $f(x)$, durch welche Potenz von

$f(x)$ wird dann die Summe S_ν der ν ersten Glieder der letzteren R
theilbar?"

Die genauere Untersuchung lehrt, dass die gestellte Aufgabe
ein einzelnes Glied einer Kette von eigenthümlichen Erscheinu
bildet, welche sich sämmtlich als Theilbarkeitsbeziehungen zwis
höheren Ableitungen des Quotienten $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ nach x auffassen lasse
dem Sinne, dass sich aus gewissen ganzrationalen, homogenen
zumeist auch isobaren Functionen solcher Ableitungen immer
bestimmte Potenz von $f(x)$ abscheiden lässt, vorausgesetzt, dass
jede Ableitung von $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ durch ihren expliciten, nach Potenzen
$f(x)$ geordneten Werth ersetzt ist, und die auftretenden Nenner he
geschafft sind. Schon die zu Anfang (§ 1) für die fraglichen
leitungen aufgestellte lineare Recursionsformel weist die hervorgeh
Eigenthümlichkeit auf, weit prägnanter jedoch (§§ 2, 3) eine
quadratischer Functionen. Das Ergebniss in dieser Richtung
sich in dem eleganten Satze niederlegen, dass unter einfachen,
angebbaren Bedingungen irgend eine quadratische, homogene
isobare Function der Ableitungen von $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ stets durch eine besti
Potenz von $f(x)$ theilbar wird.

Dabei mag betont sein, dass nur die, für den vorliegenden Z
gewählte Form dieses Resultates einen speciellen Charakter ar
hat: das Letztere führt in der That, wie in einer anschliess
Arbeit gezeigt wird, zu der Gesammtheit der algebraischen Bezieh
zwischen den Coefficienten, welche bei der Entwickelung hi
Differentiale einer willkürlichen Function y von x nach den Differ
quotienten $y^{(x)}$ auftreten, sobald man die übliche Annahme eine
stanten dx fallen lässt. Auf Grund der geschilderten Hülfssätze
sich die Eingangs formulirte Frage vollständig beantworten. I
eine ganze rationale Function vom Grade $\nu - 1$, so ist $S_\nu =$
für jeden Werth von n noch durch die $(n+1)^{\text{te}}$ Potenz vor
theilbar. In jedem anderen Falle jedoch ist die in S_ν d. i. der S
der ν ersten Glieder von $f(y_n)$ aufgehende Potenz von $f(x)$ für $\nu \leq$
die ν^{te}, für $\nu > n+1$ die $(n+1)^{\text{te}}$. (§ 5.)

Es ist zu beachten, dass derartige Eigenschaften rein fo
Natur sind; indem man $\varphi(x)$ und $f(x)$ nebst ihren Derivirten
n^{ten} incl. als ein System von $2n+2$ willkürlichen und unabhä
Veränderlichen ansieht, zeigt es sich, dass aus gewissen ganzen
tionen derselben eine bestimmte Potenz von $f(x)$ als Factor abge
werden kann.

Die angewandten Hülfsmittel erlauben es aber, noch einen
weiter zu thun und die Gültigkeitsgrenzen der gewonnenen Sät

ellen, nämlich solche Functionalgleichungen, beziehungsweise „Con-
enzen“*) anzugeben, denen $\varphi(x)$ und $f(x)$ genügen müssen, damit
Abspaltung von wenigstens einem weiteren Factor $f(x)$ möglich
l. (§ 6.)

Den Schluss (§ 7) bilden einige Bemerkungen über eine An-
dung des Voraufgegangenen auf die Auflösung transcendenter
chungen.

§ 1.

Hülfsformeln für die n^{te} Ableitung von $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ nach x.

Es seien $\varphi(x)$ und $f(x)$ zwei, beliebig oft differenzirbare Func-
n von x. Setzt man zur Abkürzung

$$\begin{cases} \varphi_k = \frac{1}{k!}\frac{d^k\varphi(x)}{dx^k} = \frac{1}{k!}\varphi^{(k)}, \quad f_k = \frac{1}{k!}\frac{d^k f(x)}{dx^k} = \frac{1}{k!}f^{(k)} \\ \qquad\qquad (k = 1, 2, 3, \ldots), \\ \varphi = \varphi(x), \qquad f = f(x); \end{cases}$$

$$\Delta_k = \frac{1}{k!}f^{k+1}\left(\frac{\varphi}{f}\right)^{(k)} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\mathsf{E}_k = \frac{1}{k!}f^{k+1}\left(\frac{1}{f}\right)^{(k)} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

ässt den Quotienten $\frac{\varphi}{f}$ als das Product von φ und $\frac{1}{f}$ auf, so
die bekannte Regel über die wiederholte Differentiation eines
ctes zweier Functionen von x für die n^{te} Ableitung von $\frac{\varphi}{f}$ nach x
ntwickelung:

$$\Delta_n = \varphi\mathsf{E}_n + \varphi_1 f\mathsf{E}_{n-1} + \varphi_2 f^2\mathsf{E}_{n-2} + \cdots + \varphi_{n-1}f^{n-1}\mathsf{E}_1 + \varphi_n f^n.$$

eht man andererseits von der Identität aus:

$$\left(\frac{\varphi}{f}\cdot f\right)^{(n)} = \varphi^{(n)},$$

ollzieht links die n-malige Differentiation des Productes $\frac{\varphi}{f}\cdot f$
er eben angewandten Regel, so gelangt man zu einer Recursions-
**) für die Δ, nämlich:

Wegen der realen Bedeutung, die dem Begriffe der Theilbarkeit bei
denten Functionen überhaupt noch zukommen kann, sei etwa auf die
lung von H. Stickelberger „Ueber einen Satz des Herrn Noether“,
nnalen, Band XXX, verwiesen.

Umgekehrt erlaubt offenbar das succ. für $n = 1, 2, 3, \ldots n$ gebildete
von Gleichungen (6) nur eine einzige Auflösung nach den Unbekannten
$\ldots \Delta_n$, nämlich die durch Formel (2) dargestellte. Aus dieser Be-

$$(6)\quad \Delta_n + f_1\Delta_{n-1} + f_2 f\Delta_{n-2} + f_3 f^2\Delta_{n-3} + \cdots + f_{n-1} f^{n-2}\Delta_1 + f_n f^{n-1}\Delta_0 = \varphi_n f^n,$$

wo unter Δ_0 die Function φ selber zu verstehen ist. Durch Specialisirung $\varphi = 1$ ergiebt sich hieraus die entsprechende Recursionsformel für die E:

$$(7)\quad \mathsf{E}_n + f_1\mathsf{E}_{n-1} + f_2 f\mathsf{E}_{n-2} + f_3 f^2\mathsf{E}_{n-3} + \cdots + f_{n-1} f^{n-2}\mathsf{E}_1 + f_n f^{n-1} = 0.$$

Es lässt sich aber auch rückwärts die Formel (6) aus (7) gewinnen, sobald man die Entwickelung (4) als bekannt ansieht. Denn setzt man die letztere schrittweise für $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots \Delta_n$ auf, addirt die so entstehenden Gleichungen und berücksichtigt dabei immer die entsprechenden Beziehungen (7), so kommt die Formel (6) zum Vorschein.

Aus der Form der Relation (7) lässt sich unmittelbar schliessen, dass E_n ein Aggregat*) von Gliedern des Typus $Cf^{\alpha} f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots f_n^{\alpha_n}$ ist, wo C eine ganze Zahl und die $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ nicht negative, ganzzahlige Exponenten bedeuten, welche den Bedingungen:

$$(8)\quad \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \cdots + n\alpha_n = n$$

unterliegen, sodass der Satz gilt:

„*Die Grössen* E *in* (4) *sind ganze, ganzzahlige, homogene und isobare Functionen der* $f, f_1, f_2, \ldots f_n$."

Ein entsprechender Satz gilt für die Grössen Δ.

---

merkung fliesst sofort die Erledigung der Aufgabe, die Lösung des recurrenten Gleichungssystemes

$$x_n a_0 + x_{n-1} a_1 + x_{n-2} a_2 + \cdots + x_0 a_n = b_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots n)$$

in geschlossener Form darzustellen, wenn die Coefficienten a_i, b_i willkürlich gegebene Werthe haben (von denen nur der erste, a_0, nicht verschwinden darf) und wenn der Index n einen vorgeschriebenen Werth besitzt. Versteht man nämlich unter $f(z)$, $\varphi(z)$ die beiden ganzen Functionen n^{ten} Grades in z:

$$f(z) = a_0 + (z-\lambda)\, a_1 + (z-\lambda)^2 a_2 + \cdots + (z-\lambda)^n a_n,$$
$$\varphi(z) = b_0 + (z-\lambda)\, b_1 + (z-\lambda)^2 b_2 + \cdots + (z-\lambda)^n b_n,$$

wo λ einen Parameter bedeutet, so kommt

$$x_k = \frac{1}{k!} \left\{ \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right\}^{(k)}_{z=\lambda} \qquad (k = 1, 2, \ldots n).$$

Dies gilt auch für ein unendlich werdendes n, vorausgesetzt, dass dann die Entwickelungen für $f(z)$, $\varphi(z)$ convergiren, und dass auch der Grenzwerth der angegebenen k^{ten} Ableitung für $k = \infty$ ein bestimmter ist.

Nachträglich lässt sich auch die Bedingung, dass a_0 nicht verschwinden solle, aufheben, nur muss dann, wenn man zu bestimmten endlichen Lösungen für die x gelangen will, zugleich $b_0 = 0$ sein. Verschwindet dann a_1 nicht, so reduciren sich die obigen $n+1$ Gleichungen in den $x_0, x_1, \ldots x_n$ von selbst auf n Gleichungen derselben Art in den $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ u. s. f.

*) Die wirkliche Aufstellung des Aggregates E_n findet sich in der zweiten Abhandlung, § 1.

§ 2.

Einfachste Theilbarkeitsbeziehungen. Der Satz (A).

Die Recursionsformel (6) für die Δ lässt sich in mannigfaltiger
se als eine Theilbarkeitsbeziehung auffassen, wenn man ausdrückt,
die Summe der ersten k Glieder linker Hand, wo $2 \leqq k \leqq n+1$,
tionale, ganze, ganzzahlige Function der $f, f_1, \ldots, f_n$; $\varphi, \varphi_1, \ldots \varphi_n$,
$k-1)^{\text{te}}$ (im Allgemeinen aber auch keine höhere) Potenz von f
'actor enthält. In Form einer Congruenz schreibt sich dies:

$$\Delta_n + f_1\Delta_{n-1} + f_2 f\Delta_{n-2} + \cdots + f_{k-1}f^{k-2}\Delta_{n-k+1} = 0 \text{ mod. } f^{k-1}.$$

Nimmt man hier $k=2$, und lässt den Index n successive um
abnehmen, so kommt:

$$\Delta_n = -f_1\Delta_{n-1} \text{ mod. } f, \qquad \Delta_{n-1} = -f_1\Delta_{n-2} \text{ mod. } f, \text{ etc.}$$

laher

$$\Delta_n \equiv (-1)^s f_1^s \Delta_{n-s} \text{ mod. } f \quad (s = 1, 2, 3, \ldots n).$$

us wiederum folgt unmittelbar, dass für $s = s_1 + s_2$ stets:

$$\Delta_n\Delta_{n-s} - \Delta_{n-s_1}\Delta_{n-s_2} \equiv 0 \text{ mod. } f$$

sowie allgemeiner, dass irgend zwei Producte aus einer gleichen
l von Factoren Δ, welche überdies eine gleiche Indicessumme
isen, einander mod. f congruent sind.

o z. B. zeigt in dem einfachsten Falle $n=2$, $s=2$, also
$_2 = 1$, die wirkliche Ausrechnung, dass

$$\Delta_2\Delta_0 - \Delta_1^2 = f\{f(\varphi\varphi_2 - \varphi_1^2) - \varphi(\varphi f_2 - \varphi_1 f_1)\} = f\cdot\begin{vmatrix} f & f_1 & f_2 \\ \varphi & \varphi_1 & \varphi_2 \\ 0 & \varphi & \varphi_1 \end{vmatrix}.$$

eht man jetzt aber einen Schritt weiter, zu dem Falle $n=3$,
$s_1 = s_2 = 1$), und ermittelt den Werth der Differenz $\Delta_3\Delta_1 - \Delta_2^2$,
t sich die letztere sogar theilbar durch f^2, denn es berechnet sich:

$$\Delta_1\Delta_3 - \Delta_2^2 = f^2\cdot\begin{vmatrix} f & f_1 & f_2 & f_3 \\ \varphi & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ 0 & f & f_1 & f_2 \\ 0 & \varphi & \varphi_1 & \varphi_2 \end{vmatrix}.$$

erhebt sich somit allgemein die Frage nach der höchsten Potenz
welche in der linken Seite der Congruenz (12) aufgeht, oder,
deren Worten, wenn man die Differenz (12) nach steigenden
n von f anordnet, nach der niedrigsten Potenz von f, deren
ent nicht mehr identisch verschwindet. Die Antwort darauf
er Satz:

(A) *„Die Differenz* $\Delta_n \Delta_{n-s} - \Delta_{n-s_1}\Delta_{n-s_2}$ $(s = s_1 + s_2 = 2, 3, \ldots n)$ *ist noch durch die* $(n-s+1)^{\text{te}}$ *Potenz von* f *theilbar:*

$$(15) \qquad \Delta_n \Delta_{n-s} - \Delta_{n-s_1}\Delta_{n-s+s_1} \equiv 0 \bmod. f^{n-s+1}\text{“}.$$

Der Beweis wird nach dem Verfahren der vollständigen Induction geführt. Der Satz gelte der Reihe nach für die Indices $n = 2, 3 \ldots$ bis zu einem gewissen $p-1$, und für die jeweils möglichen Werthe von s, s_1, s_2 $\left(2 \leqq s \leqq n;\ \begin{matrix} s_1 = 1, 2, & \ldots s-1 \\ s_2 = s-1,\ s-2 \ldots 1 \end{matrix}\right)$; dann folgt daraus seine Gültigkeit für den nächstfolgenden Index p, und die entsprechenden Werthe der s, s_1, s_2 gefolgert werden. Sei s_1 diejenige der beiden Zahlen s_1, s_2, welche nicht grösser ist als die andere, so setzen wir die Recursionsformel (6) für Δ_n einmal für den Zeiger $n = p$, das andere Mal für $n = p - s_1$ an, und multipliciren sodann mit Δ_{p-s} resp. Δ_{p-s_2}, dann kommt:

$$\begin{aligned}(16) \quad -\Delta_p \Delta_{p-s} = {} & f_1 \Delta_{p-1}\Delta_{p-s} + f_2 f \Delta_{p-2}\Delta_{p-s} + \cdots f_{s_2-1} f^{s_2-2} \Delta_{p-s_2+1} \Delta_{p-s} \\ & + f_{s_2} f^{s_2-1} \Delta_{p-s_2}\Delta_{p-s} \\ & + f_{s_2+1} f^{s_2} \Delta_{p-s_2-1}\Delta_{p-s} + \cdots + f_{p-s_1} f^{p-s_1-1} \Delta_{s_1}\Delta_{p-s} \\ & + f_{p-s_1+1} f^{p-s_1} \Delta_{s_1-1}\Delta_{p-s} + \cdots + f_p f^{p-1} \Delta_0 \Delta_{p-s} - f^p \varphi_{p-s}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(17) \quad -\Delta_{p-s_1}\Delta_{p-s_2} = {} & f_1 \Delta_{p-s_1-1}\Delta_{p-s_2} + f_2 f \Delta_{p-s_1-2}\Delta_{p-s_2} + \cdots + f_{s_2-1} f^{s_2-2} \Delta_{p-1}\Delta \\ & + f_{s_2} f^{s_2-1} \Delta_{p-s}\Delta_{p-s_2} \\ & + f_{s_2+1} f^{s_2} \Delta_{p-s-1}\Delta_{p-s_2} + \cdots + f_{p-s_1} f^{p-s_1-1} \Delta_0 \Delta_{p-s_2} \\ & - f^{p-s_1} \varphi_{p-s_1}\Delta_{p-s_2}.\end{aligned}$$

Indem wir den Specialfall $s_2 = 1$ vor der Hand ausschließen, theilen wir die rechten Seiten von (16) und (17) in vier (je durch eine Zeile dargestellte) Parthien, und führen die in (15) vorgeschriebene Subtraction so aus, dass je zwei mit der nämlichen Potenz von f multiplicirte Glieder zusammengefasst werden.

Die Entwickelung von $\Delta_p \Delta_{p-s} - \Delta_{p-s_1}\Delta_{p-s_2}$ beginnt demnach mit der in $-f_1$ multiplicirten Differenz

$$(18) \quad \Delta_{p-1}\Delta_{p-s} - \Delta_{p-s_1-1}\Delta_{p-s_2} = \Delta_{p-1}\Delta_{(p-1)-(s-1)} - \Delta_{(p-1)-s_1}\Delta_{(p-1)-(s_2-1)},$$

welche, der getroffenen Verabredung zufolge, noch gerade durch die $\{(p-1)-(s-1)+1\}^{\text{te}} = (p-s+1)^{\text{te}}$ Potenz von f theilbar ist. Dieselbe Theilbarkeit (durch f^{p-s+1}) findet statt für die nächstfolgende, mit dem Factor $-f_2 f$ verbundene Differenz; mithin lässt sich hier im Ganzen die $(n-s+2)^{\text{te}}$ Potenz von f heraussetzen, d. i. eine um Eins höhere Potenz, als beim Anfangsgliede.

In dieser Weise setzt sich der Process fort, indem je ein weiterer Factor f hinzutritt, bis das $(s_2-1)^{\text{te}}$ Glied (der Coefficient von f_{s_2-1}) erreicht ist, für welches der Gesammtexponent von f auf

$$(n-s+1) + (s_2-2) = n - s_1 - 1$$

gestiegen ist.

Der hierauf folgende Term $f_{s_2} f^{s_2-1}(\Delta_{p-s_2}\Delta_{p-s} - \Delta_{p-s}\Delta_{p-s_2})$ verschwindet identisch.

Von da ab wird der Charakter der Entwickelung ein anderer. Denn die Vereinigung der dritten Zeile von (16) mit der von (17) liefert zuvörderst, als Coefficienten von $-f_{s_2+1} f^{s_2}$:

$$\Delta_{p-s_2-1}\Delta_{p-s} - \Delta_{p-s-1}\Delta_{p-s_2}$$
$$= -(\Delta_{p-s_2}\Delta_{(p-s_2)-(s_1+1)} - \Delta_{(p-s_2)-1}\Delta_{(p-s_2)-s_1}).$$

Aber in der letzteren Differenz ist der kleinste der vier Indices nicht mehr $p-s$, sondern $(p-s_2)-(s_1+1) = p-s-1$; sie lässt also nur noch den Theiler f^{p-s} zu, was, im Verein mit f^{s_2}, als höchste, neuem Gliede vorantretende Potenz von f, die $(p-s+s_2)^{\text{te}} = (p-s_1)^{\text{te}}$ ergibt.

Das nächste Mal summiren sich $p-s-1$ und s_2+1 als Exponenten von f, sodass als Gesammtfactor wiederum f^{p-s_1} resultirt, und dies Letztere wiederholt sich so lange, bis man zu dem mit f_{p-s_1} verknüpften Term vorgedrungen ist, wo es zum letzten Male in dieser Art auftritt. Der noch verbleibende Rest von Gliedern (die aus der vierten Zeile von (16), (17) hervorgehen) verhält sich abermals abweichend. Er beginnt mit dem Ausdrucke:

$$(20) \qquad -f^{p-s_1}(f_{p-s_1+1}\Delta_{s_1-1}\Delta_{p-s} - \varphi_{p-s_1}\Delta_{p-s_2}),$$

der im Allgemeinen) die $(p-s_1)^{\text{te}}$ Potenz von f aufweist, und jetzt kommen nur noch Terme von (16), bei denen die begleitende Potenz von f fortwährend um eine Einheit wächst, bis sie mit der p^{ten}, als letzten abschliesst.

Als Gesammtergebniss ist demnach zu verzeichnen, dass bei der vorgenommenen Anordnung von $\Delta_p\Delta_{p-s} - \Delta_{p-s_1}\Delta_{p-s_2}$ das erste Glied (der Coefficient von f_1), die $(p-s+1)^{\text{te}}$ Potenz von f abzusondern lautet, sämmtliche nachfolgenden Glieder aber eine höhere, sodass die ganze Summe durch f^{p-s+1} theilbar wird.

Damit ist der Beweis des Satzes (A), bis auf den Sonderfall $s_2 = 1$, um -1 auf p geleistet, und, da der Satz für $p=2$ gemäss (13) richtig ist, so gilt er allgemein.

Wir wenden uns jetzt zu der Modification, deren der geführte Beweis bedarf, wenn s_2 gleich Eins wird d. h. wenn die erste Zeile der rechten Seiten von (16) und (17) gar nicht existirt.

Aus $s_2 = 1$ folgt sofort, dass s_1 (welches $\geqq 1$ und $\leqq s_2$ festgesetzt war) ebenfalls $= 1$, mithin $s = 2$ wird; es handelt sich also um die Differenz $\Delta_p\Delta_{p-2} - \Delta_{p-1}^2$.

Ordnet man dieselbe, wie früher, so ist das erste, nicht verschwindende Glied, der Factor von $f_{s_2+1} = f_2$ mit der $(p-1)^{\text{ten}}$ Potenz von f behaftet. Dasselbe Verhalten zeigen die weiteren Glieder bis

zum vorletzten incl., während das letzte mit f^n multiplicirt ist. Zieht man jetzt aus dieser Summe den Factor f^{n-1} heraus, so bleibt es noch fraglich, ob der verbleibende Bestand nicht abermals durch f theilbar ist. Dass diese Annahme aber nicht zutrifft, wird durch ein geeignetes Beispiel bewiesen. Nimmt man nämlich

$$f = (x-\alpha)(x-\beta)\left(\alpha \gtrless \beta\right), \quad \varphi = f_1,$$

so erhält man mit Hülfe der Partialbruchzerlegung von $\frac{f_1}{f}$:

$$\begin{aligned}(21)\qquad &\Delta_n\Delta_{n-2} - \Delta_{n-1}^2 \\ &= \left\{(x-\alpha)^{n-1} + (x-\beta)^{n-1}\right\}\left\{(x-\alpha)^{n+1} + (x-\beta)^{n+1}\right\} \\ &- \left\{(x-\alpha)^n + (x-\beta)^n\right\}^2 = f^{n-1}(\alpha-\beta)^2.\end{aligned}$$

Demnach gilt der Satz (A) auch in dem Falle $s = 2$ $(s_1 = s_2 = 1)$, in dem Sinne, dass bei Anordnung der Differenz $\Delta_n\Delta_{n-2} - \Delta_{n-1}^2$ nach steigenden Potenzen von f der erste nicht verschwindende Coefficient der zu $f^{n-s+1} = f^{n-1}$ gehörige ist.

Nachdem im Vorstehenden der vollständige Beweis des Satzes (A) geführt worden ist, lässt sich auch ein Criterium für den Umfang desselben angeben. Wie nämlich aus den Formeln (16), (17), (18) sofort hervorgeht, ist der Coefficient von f^{n-s+1} bei der Entwickelung von $\Delta_n\Delta_{n-s} - \Delta_{n-s_1}\Delta_{n-s_2}$, bis auf den Factor $-f_1$, gleich dem Coefficienten von f^{n-s+1} bei der Entwickelung von $\Delta_{n-1}\Delta_{n-s} - \Delta_{n-s_1-1}\Delta_{n-s_2}$. Die wiederholte Anwendung desselben Schlusses führt also zu der Congruenz:

$$\begin{aligned}(22)\qquad &\Delta_n\Delta_{n-s} - \Delta_{n-s_1}\Delta_{n-s_2} \\ &= (-f_1)^{s-2}\left(\Delta_{n-s+2}\Delta_{n-s} - \Delta_{n-s+1}^2\right) \bmod. f^{n-s+2}.\end{aligned}$$

Schliessen wir demnach den extremen Fall einer Theilbarkeit von f_1 durch f im Folgenden ein für allemal aus, so haben wir als Ergänzung zu (A) den Satz:

(A_1) „*So lange die Differenz* $\Delta_{n-s+2}\Delta_{n-s} - \Delta_{n-s+1}^2$ *durch keine höhere Potenz von* f, *als die* $(n-s+1)^{te}$ *theilbar ist, ist die letztere auch die höchste Potenz von* f, *welche in der Differenz* $\Delta_n\Delta_{n-s} - \Delta_{n-s_1}\Delta_{n-s_2}$ $(s = s_1 + s_2)$ *aufgeht.*“

§ 3.

Quadratische Formen der Δ. Der Satz (B).

Fasst man den Ausdruck $\Delta_n\Delta_{n-s} - \Delta_{n-s_1}\Delta_{n-s_2}$ $(s = s_1 + s_2)$ auf als eine quadratische, homogene und isobare (d. i. mit dem Gewicht $2n - s$ behaftete) Form der Δ, für welche die Summe der Coefficienten verschwindet, so lässt sich der Satz (A) in eleganter Weise

men. Sei Φ_g eine allgemeine quadratische, homogene und isobare
der Δ, vom Gewicht g:

$$\Phi_g = \alpha_0 \Delta_g \Delta_0 + \alpha_1 \Delta_{g-1} \Delta_1 + \cdots + \alpha_h \Delta_{g-h} \Delta_h,$$

$= \frac{g}{2}$ resp. $\frac{g-1}{2}$, jenachdem g gerade oder ungerade, und die
ficienten α selbst wieder ganze, ganzzahlige Functionen der
$x_1, x_2, \ldots; \varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ bedeuten, so fragen wir zunächst nach
othwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Bestehen
ongruenz:

$$\Phi_g \equiv 0 \bmod. f.$$

m Zwecke führen wir statt der α neue Grössen a ein mittelst
elationen

$$a_0 = \alpha_0, \quad a_1 = \alpha_1 + \alpha_0, \quad a_2 = \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0, \ldots,$$
$$a_h = \alpha_h + \alpha_{h-1} + \cdots + \alpha_0.$$

mkehrung derselben lautet:

$$\alpha_0 = a_0, \quad \alpha_1 = a_1 - a_0, \quad \alpha_2 = a_2 - a_1, \ldots, \alpha_h = a_h - a_{h-1}.$$

nimmt die Form Φ_g (23) die Gestalt an:

$$\Phi_g = a_0(\Delta_g \Delta_0 - \Delta_{g-1}\Delta_1) + a_1(\Delta_{g-1}\Delta_1 - \Delta_{g-2}\Delta_2) + \cdots$$
$$+ a_{h-1}(\Delta_{g-h+1}\Delta_{h-1} - \Delta_{g-h}\Delta_h) + a_h \Delta_{g-h}\Delta_h,$$

es hat nach Satz (A) die Congruenz zur Folge:

$$\Phi_g \equiv a_h \Delta_{g-h} \Delta_h \bmod. f.$$

n sich eine Theilbarkeit von Δ_{g-h} oder Δ_h durch f, wie aus (6)
rvorgeht, nur mit der — oben bereits ausgeschlossenen — Theilbarkeit
f durch f vertragen würde, so ist in (28) der Satz enthalten:

„*Eine quadratische, homogene und isobare Form der Δ ist dann,*
nur dann durch f theilbar, wenn dies von ihrer Coefficienten-
gilt.“

Soll eine höhere Potenz von f, als die erste, in Φ_g aufgehen, so
sse weitere Bedingungen hinzutreten; wir beschränken uns auf
folgenden Satz, für welchen der Beweis ganz ähnlich, wie für
letzten geführt wird:

„*ist bei der Anordnung* (23) *einer quadratischen, homogenen und*
ar. Form Φ_g der Δ der erste, nicht verschwindende Coefficient der
sonst die höchste, in Φ_g aufgehende Potenz von f stets, aber auch
dann die ν^{te}, falls die Summe der Coefficienten von Φ_g durch f^ν
lbar ist.“

Sind im Besondern die Cofficienten der Form ganze rationale
ler — wie beim Satze (A) — so ist die Theilbarkeit ihrer Summe
ch irgend eine Potenz von f äquivalent mit deren Verschwinden.
zu Satze (B) gehörige, zu (A_1) analoge Ergänzung möge der
ze alber unterdrückt werden.

§ 4.

Formen höheren Grades in den Δ. Der Satz (C).

Für die homogenen und isobaren Formen n^{ten} Grades in
lassen sich ähnliche Ergebnisse ableiten, wie die im vorangel
Paragraphen für quadratische Formen bewiesenen; wir begnüg
indessen mit einem speciellen Satze, dessen wir in der Folge be
sein werden:

(C) *„Die Differenz* $\Delta_n^{s-1}\Delta_{n-s} - \Delta_{n-1}^s$ $(2 \leqq s \leqq n)$ *ist noch*
die $(n-s+1)^{te}$ *Potenz von* f *theilbar“.*

Denn diese Behauptung ist zunächst richtig für $s = 2$ u
beliebiges n, da nach Satz (A) die höchste in $\Delta_n\Delta_{n-2} - \Delta_{n-1}^2$ a
gehende Potenz von f die $(n-2+1)^{te}$ ist.

Nun findet die identische Zerlegung statt:

$$\Delta_n^s\Delta_{n-(s+1)} - \Delta_{n-1}^{s+1} = \Delta_n^{s-1}(\Delta_n\Delta_{n-(s+1)} - \Delta_{n-1}\Delta_{n-s}) + \Delta_{n-1}(\Delta_n^{s-1}\Delta_{n-s} - \Delta_{n-1}^s), \tag{29}$$

wo der erste Klammerfactor rechter Hand, wiederum nach Sa
durch f^{n-s} theilbar ist. Nimmt man also die Giltigkeit des Sat
für irgend ein $s(< n)$ an, so weist der zweite Klammerfactor a
rechten Seite von (29) den Theiler f^{n-s+1} auf. Mithin ist $f^{n-s} = f^{n+1}$
der der linken Seite von (29) zukommende Theiler d. h. der S
gilt dann auch (bei gleichem n) für die der Zahl s nächstfolgen
$s+1$, und es ist somit allgemein, was bewiesen werden sollte

$$\Delta_n^{s-1}\Delta_{n-s} - \Delta_{n-1}^s \equiv 0 \bmod f^{n-s+1} \quad (2 \leqq s \leqq n). \tag{30}$$

Aus dem geführten Beweise geht zugleich mit Hülfe des Satze
das Corollar hervor:

(C_1) *„Die Differenz* $\Delta_n^{s-1}\Delta_{n-s} - \Delta_{n-1}^s$ *kann keine höhere*
von f, *als die* $(n-s+1)^{te}$, *als Factor enthalten, solange das N*
für die Differenz $\Delta_{n-s+2}\Delta_{n-s} - \Delta_{n+s+1}^2$ *zutrifft“.*

§ 5.

Das Theilbarkeitssystem (D).

Indem zur Abkürzung gesetzt wird:

$$y_n = x + f\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}, \tag{31}$$

denke man sich $f(y_n)$ nach dem Taylor'schen Satze entwickelt*)

*) So oft im Folgenden (abgesehen vom Schlussparagraph) von
wickelung einer Function in eine Taylor'sche Reihe die Rede ist, soll
im Sinne eines abkürzenden Ausdrucks verstanden werden, mit der M
einer solchen Entwickelung haben die Darlegungen des Textes Nichts zu

ch man unter S_ν die Summe der ersten ν Glieder dieser Entwickelung, is $\Delta_n^{\nu-1} S_\nu$ eine rationale, ganze, ganzzahlige Function der $f, f_1, \ldots, f_n$; $\varphi \ldots, \varphi_n$, welche offenbar den Factor f besitzt. Wir schreiben

$$\Delta_n^{\nu-1} S_\nu = f T_\nu = f(\Delta_n^{\nu-1} + f_1 \Delta_n^{\nu-2} \Delta_{n-1} + f_2 f \Delta_n^{\nu-3} \Delta_{\nu-1}^2 + \cdots + \cdots + f_{\nu-1} f^{\nu-2} \Delta_{n-1}^{\nu-1})$$

agen nach der höchsten, in T_ν aufgehenden Potenz von f. werde zuerst der Fall $\nu \leqq n$ in Betracht gezogen. Auf das sglied $\Delta_n^{\nu-1}$ von T_ν wende man die, zuvor mit $\Delta_n^{\nu-2}$ multipli- ecursionsformel (6) für Δ_n an, dann nimmt T_ν die Gestalt an:

$$T = -f_2 f \Delta_n^{\nu-3} (\Delta_n \Delta_{n-2} - \Delta_{n-1}^2) - \cdots - f_i f^{i-1} \Delta_n^{\nu-i-1} (\Delta_n^{i-1} \Delta_{n-i} - \Delta_{n-1}^i)$$
$$- \cdots - f_{\nu-1} f^{\nu-2} (\Delta_n^{\nu-2} \Delta_{n-\nu+1} - \Delta_{n-1}^{\nu-1})$$
$$- f_\nu f^{\nu-1} \Delta_n^{\nu-2} \Delta_{n-\nu} - \cdots - f_n f^{n-1} \Delta_n^{\nu-2} \Delta_0 + f^n \Delta_n^{\nu-2} \varphi_n .$$

Bei dieser Anordnung kommt jedem der $\nu - 2$ ersten Terme die Potenz von f als Factor zu. Denn greifen wir etwa den $(i-1)^{\text{ten}}$ heraus, so besitzt dessen Klammerfactor, in Folge des Satzes , ein Theiler f^{n-i+1}, und dieser vereinigt sich mit dem voran- enen f^{i-1} zur n^{ten} Potenz von f. Dagegen ist der $(\nu-1)^{\text{te}}$ Term (5) nur mit der $(\nu-1)^{\text{ten}}$ Potenz von f behaftet, und in jedem folgenden Gliede tritt noch je ein weiteres f als Factor hinzu.

Soll demnach beurtheilt werden, welches die höchste, in T_ν ent- ene Potenz von f ist, so sind zwei Hauptunterfälle zu unter- eiden.

Entweder ist f_ν durch f nicht theilbar, verschwindet also auch nicht identisch, dann ist gemäss der schon früher eingetretenen Be- annung, dass kein Δ_n den Factor f zulassen, noch weniger identisch chwinden solle, die $(\nu-1)^{\text{te}}$ Potenz von f die höchste, auch auf keine Weise übersteigbare, welche im $(\nu-1)^{\text{ten}}$ Terme von T_ν (33), damit zugleich in T_ν selbst aufgeht.

Oder aber, es weist f_ν den Factor f auf resp. verschwindet iden- isch, dann wird T_ν mindestens durch f^ν theilbar.

Der Kürze halber soll indessen von der Eventualität einer eigent- lichen Theilbarkeit von f_ν durch f (wie bereits früher für $\nu = 1$ an) genommen werden, sodass nur noch der Fall eines identisch verschwindenden f_ν ($\nu > 2$) einer Untersuchung bedarf.

Verschwindet nun f_ν (und damit auch $f_{\nu+1}$, $f_{\nu+2}$ etc.) identisch, also nicht d. h. hat man es mit einer rationalen, ganzen Func- tion $(\nu-1)^{\text{ten}}$ Grades $\varphi(x)$ vom Grade $\nu - 1$ zu thun, so besteht T_ν (33) aus einem Aggregate von $\nu - 1$ Gliedern, deren jedes den Factor f^n zulässt, und somit auch nach durch die nämliche Potenz von f theilbar. Dass es aber

im Allgemeinen auch keine höhere Potenz dieser Art giebt, zeig ei
directe Ausrechnung, falls man φ passend, etwa gleich f_1, wäh

Derselbe Schluss bleibt auch gültig, wenn schon ein f_x ($x <$
identisch verschwinden sollte, übrigens ist dieser Fall von den eb
besprochenen nicht wesentlich verschieden, da sich alsdann ν d.. d
Anzahl der Entwickelungsglieder von $f(y_n)$, von selbst auf $\varkappa$ re ci

Nachdem so die verschiedenen Möglichkeiten für $\nu \leqq n$ e rte
worden sind, wenden wir uns zu den Fällen $\nu \geqq n+1$.

An die Stelle der Entwickelung (33) tritt jetzt die andere:

$$(34)\quad \begin{aligned} T_\nu = &-f_2 f \Delta_n^{\nu-3}(\Delta_n \Delta_{n-2} - \Delta_{n-1}^2) - \cdots - f_i f^{i-1} \Delta_n^{\nu-i-1}(\Delta_n^{i-1}\Delta_{n-} - \\ &- \cdots - f_n f^{n-1} \Delta_n^{\nu-n-1}(\Delta_n^{n-1}\Delta_0 - \Delta_{n-1}^n) + f^n \Delta_n^{\nu-2} \varphi_n \\ &+ f_{n+1} f^n \Delta_n^{\nu-n-2} \Delta_{n-1}^{n+1} + \cdots + f_{\nu-1} f^{\nu-2} \Delta_{n-1}^{\nu-1}. \end{aligned}$$

Nunmehr lässt sich aus jedem der n ersten Glieder der Factor a
sondern, während die (für $\nu > n+1$) noch nachfolgenden v d
Factoren $f^n, f^{n+1}, \ldots$ begleitet werden. Somit wird T_ν sicherlu
die n^{te} Potenz von f theilbar; dass dieselbe aber im Allgemeine au
nicht überschritten wird, lehrt wiederum der Fall einer ganzerat
nalen Function f von genügend hohem Grade, wenn ausserm
passend, z. B. gleich f_1 gewählt wird.

Um die gewonnenen Ergebnisse in einfachster Weise zusa me
zufassen, übertragen wir lieber die Theilbarkeit der rationalen un
Function $\Delta_n^{\nu-1} S_\nu$ durch irgend eine Potenz von f auf diejeni
rationalen gebrochenen Function S_ν, indem wir die Definition einfare

„*Eine rationale Function der $f, f_1, \ldots, \varphi, \varphi_1, \ldots$, deren em
keinen Theiler mit f gemein hat, heisst theilbar durch irgend eine ote
von f, wenn die letztere im Zähler der Function f aufgeht.*“

Dann gilt das Theorem:

(D) „*Denkt man sich den Quotienten $\frac{\varphi(x+h)}{f(x+h)}$ nach Potenzen von
entwickelt:*

$$(35)\qquad \frac{\varphi(x+h)}{f(x+h)} = u_0 + h u_1 + h^2 u_2 + \cdots + h^n u_n + \cdots,$$

*so ist die Summe S_ν der Anfangsglieder der Taylor'schen Entwickelu
von $f(y_n) = f\left(x + \frac{u_{n-1}}{u_n}\right)$ für $\nu \leqq n+1$ noch durch die ,
$\nu > n+1$ noch durch die $(n+1)^{te}$ Potenz von f theilbar.*

*Nur in dem Falle, dass $f(x)$ eine ganze rationale Functi v
Grade $\nu - 1$ bedeutet, ist $S_\nu = f(y_n)$ für jeden Werth von (
noch durch die $(n+1)^{te}$ Potenz von f theilbar.*“

Was die zu Eingang des Theorems gewählte Fassung angeht, li
auf der Hand, dass gemäss der Formel (2) die Grössen $f\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}$ un $\frac{u_{n-1}}{u_n}$
übereinstimmen.

§ 6.

Der Giltigkeitsbereich des Theorems (D). Der Satz (E).

Es erübrigt jetzt noch die Untersuchung der Beschränkungen, welchen die Functionen φ, f zu unterliegen haben, damit die zufolge des Theorems (D) aus der Summe S_ν der ν ersten Glieder von $f(y_n)$ hervorstretende ν^{te} resp. $(n+1)^{\text{te}}$ Potenz von f sicher die höchste ist.

Für $\nu \leqq n$ ist diese Frage, bei Ausschluss der ganzen rationalen Functionen $f(x)$ des Grades $\nu - 1$, bereits entschieden worden; denn nachdem einmal die Verabredung getroffen war, dass weder f_ν, noch $\ldots, \Delta_{n-\nu}$ einen Theiler mit f gemein haben sollen, ging aus der Entwickelung (33) hervor, dass sich aus S_ν $(\nu \leqq n)$ auf keine Weise eine höhere, als die ν^{te} Potenz von f abspalten lässt.

Dagegen war in den Fällen $\nu > n$ und, bei $\nu \leqq n$ für die ganzen rationalen Functionen $f(x)$ des Grades $\nu - 1$, ein entsprechender Schluss noch möglich, insofern S_ν eine ganze Reihe von Gliedern aufweist, deren jedes mit dem Factor f^{n+1} behaftet ist.

Soll nun für diese Fälle festgestellt werden, unter welchen Umständen eine Erhöhung der Theilbarkeit von S_ν um wenigstens eine Potenz von f eintreten würde, so führen wir, um gewissen Schwierigkeiten bezüglich der Taylor'schen Entwickelbarkeit von $f(y_n)$ aus dem Wege zu gehen — da es sich ja hier um formale Eigenschaften der Bildungen von φ und f handelt — eine Beschränkung in der Allgemeinheit der Functionen φ und f ein, indem wir die letzteren als willkürliche ganze rationale Functionen (von x) von genügend hohem Grade wählen.

Eine derartige Beschränkung ist in der That erlaubt. Denn wenn z. B. nach Theorem (D) $\Delta_n^n S_{n+1}$ im allgemeinen noch durch f^{n+1} theilbar ist, so besagt das Nichts Anderes, als dass aus einer ganzen ganzen Function der als völlig willkürlich und unabhängig anzusehenden Variabeln $f, f_1, \ldots, f_n$; $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ der Factor f^{n+1} heraustritt. Es leidet aber keine wesentliche Aenderung, wenn man für f solche wie für φ arbiträre ganze rationale Functionen (von x) des Grades n nimmt; die $f, f_1, \ldots, f_n$; $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ bleiben dann, nach wie vor, lauter willkürliche und von einander unabhängige Veränderliche, und das Verschwinden von f_{n+1} hat nach (34) auf die Theilbarkeit von $\Delta_n^n S_{n+1}$ durch f^{n+1} keinen Einfluss, während dasjenige von f allenfalls überhaupt nicht in Betracht kommt.

Die Theilbarkeit von S_{n+2}, S_{n+3}, ... durch f^{n+1} bedarf dabei keiner besonderen Erwähnung, da die Congruenz $T_{n+1+i} \equiv T_{n+1} \bmod. f^n$ auch

$$\Delta_n^i S_{n+1+i} \equiv S_{n+1} \bmod. f^{n+1} \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

unmittelbare Folge der Formel (34) ist.

Die angestellte Ueberlegung benöthigt dagegen einer wesentli
Modification, wenn man den „allgemeinen“ Fall verlässt und
einer eventuellen Theilbarkeit $\Delta_n^{n+i} S_{n+1+i}$ durch die $(n+2)^{te}$ Po
von f forscht. Denn aus (34) folgert man weiter:

$$T_{n+2+i} \equiv T_{n+2} \bmod. f^{n+1} \quad (i=1,2,\ldots), \tag{37}$$

$$T_{n+2} = T_{n+1} + f_{n+1} f^n \Delta_{n-1}^{n-1} \tag{38}$$

und damit

$$\Delta_n^i S_{n+2+i} \equiv S_{n+2} \bmod. f^{n+2}, \tag{37 a}$$

$$\Delta_n S_{n+2} = S_{n+1} + f_{n+1} f^{n+1} \Delta_{n-1}^{n+1}. \tag{38 a}$$

Hieraus ist ersichtlich, dass bei einer etwaigen Theilbarkeit
$S_\nu (\nu \geqq n+1)$ durch f^{n+2} zwei Hauptfälle zu unterscheiden sind:
mal reducirt sich die Gesammtheit der Fälle $\nu > n+1$ auf
einzigen $\nu = n+2$; andererseits bildet $\nu = n+1$ für sich
zweiten Hauptfall. Der letztere bietet wiederum zwei Unterfäl
nachdem f_{n+1} verschwindet oder nicht: man bemerkt dann zu
nach (38a), dass beim Nichtverschwinden von f_{n+1} eine Theilbarkei
von S_{n+1} durch f^{n+2} die nämliche Theilbarkeit für S_{n+2} ausschlies
müsste, und umgekehrt.

Fasst man dies zusammen, so erkennt man — unter Anwen
der gleichen Schlüsse, wie oben — dass es für die vorliegende
erlaubt ist, f und φ als ganze rationale Functionen anzunehmen
zwar die erstere vom Grade $n+1$ resp. (für $f_{n+1} = 0$) vom Gra
die letztere beidemale vom Grade n. Und wenn wir zudem v
setzen, dass weder f_1, noch φ (also auch kein Δ_ν) mit f einen T
gemein haben sollen, so entspricht das vollständig den früher
φ auferlegten Bedingungen.

Der nunmehr ausschliesslich noch verbleibende Fall (cf. Theore
eines $\nu < n+1$ bei gleichzeitig verschwindendem f_ν wird im
stehenden von selber miterledigt werden.

Von den vier soeben aufgeführten Fällen lassen nämlich o
drei eine gemeinsame Behandlung zu, wenn man die Frage so
„Unter welcher Bedingung besteht eine Identität von der Fo

$$\Delta_n^\mu f\left(x + f\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\right) = f^{n+2} G(x), \tag{39}$$

*wo $f(x)$ eine arbiträre ganze rationale Function vom Grade $\mu <$
resp. $= n$, resp. $= n+1$) bedeutet und $\varphi(x)$ eine ebensolche Fu
vom Grade n?“*

Setzt man, wie in (31), $y_n = x + f\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}$, so liefert eine ein

Differentiation von (39) nach x die weitere Identität:

$$\Delta_n^{\mu} y_n' \frac{df(y_n)}{dy_n} + \mu f(y_n) \Delta_n^{\mu-1} \Delta_n' = f^{n+1} \{fG' + (n+2) G f_1\}$$

auch, wenn man will, dass nur ganze Functionen darin auftreten:

$$\{\Delta_n^{\mu-1} f_1(y_n)\} \{\Delta_n^2 y_n'\} + \mu \{\Delta_n^{\mu} f(y_n)\} \Delta_n' = f^{n+1} \Delta_n \{fG' + (n+2) G f_1\}.$$

Die Giltigkeit von (39) vorausgesetzt, müsste also die $(n+1)^{te}$ Potenz von f im ersten Gliede der linken Seite von (40a) aufgehen. Da der erste Factor desselben, $\Delta_n^{\mu-1} f_1(y_n)$, kann mit $f(x)$ keinen Theiler gemein haben (da ein solcher zugleich in $f_1(x)$ enthalten sein müsste). Somit zieht die Identität (39) die Congruenz nach sich:

$$\Delta_n^2 y_n' = 0 \bmod. f^{n+1}.$$

Es auch das Umgekehrte findet statt. Denn sei $n+1$ der höchste Exponent von f, für welchen die Congruenz (41) gilt, so gehen wir von einer Identität:

$$\Delta_n^{\mu} f(y_n) = f^{n+1+i} H(x) \quad (i \geqq 0)$$

noch unbekannt und H nicht weiter durch f theilbar sein soll. Man differenzire wiederum (42) nach x, dann kommt:

$$\{\Delta_n^{\mu-1} f_1(y_n)\} \{\Delta_n^2 y_n'\} + \mu \{\Delta_n^{\mu} f(y_n)\} \Delta_n' = f^{n+i} \Delta_n \{fG' + (n+1+i) G f_1\}.$$

Hier ist die rechte Seite durch f^{n+i}, aber auch durch keine höhere Potenz von f theilbar, in demselben Sinne sind die beiden Glieder linkerhand durch f^{n+1} resp. f^{n+1+i} theilbar. Mithin kann i weder negativ, noch kleiner, als Eins sein d. h. es ist $i = 1$, was zu beweisen war.

Durch Wiederholung derselben Schlüsse zeigt man, dass, wenn f^{n+i} $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ die höchste in $\Delta_n^{\mu} f(y_n)$ aufgehende Potenz von f, so die höchste in $\Delta_n^2 y_n'$ aufgehende Potenz von f durch f^{n+i} angegeben wird und *vice versa**).

---

*) Aus dem geführten Beweise ergiebt sich nebenher die *Gesammtheit* der Lösungen einer von mir früher (diese Zeitschrift, Band XXXIII, pag. 515 u. f.) behandelten Aufgabe, eine rationale Substitution $y_n(x)$ von der Art zu finden, dass durch die ganze rationale Function $f(y_n)$ mit der $(n+1)^{ten}$ Potenz von $f(x)$ proportional wird: $f(y_n) = Q(x) f^{n+1}(x)$. In der That gehen aus einer Lösung etwa $y = x + \frac{u_{n-1}}{u_n}$ (35), alle andern z_n durch den Process

$$z_n = y_n + f^{n+1}(x)\, \psi(x)$$

hervor, wenn $\psi(x)$ eine, durch $f(x)$ nicht theilbare, im Uebrigen aber arbiträre ganze Function von x bedeutet. Oder, um einen üblichen Ausdruck zu ge-

Dies spricht der Satz aus:

(E) „*Bedeuten $f(x)$ und $\varphi(x)$ arbiträre, ganze rationale Funct* *von den Graden $\mu(>1)$ und $n(\geqq 1)$, die nur der Beschränkung u* *liegen, dass sowohl f_1, wie φ zu f relativ prim sein sollen, s* *$f(y_n) = f\left(x + f\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}\right)$ stets und nur dann durch die $(n+1+i)^{te}$ (≥ 1* *Potenz von f theilbar, wenn f^{n+i} die höchste in y_n' aufgehende P* *von f ist.*“

Für $i = 0$ erhält man mit Rücksicht auf (D) den Satz:

„*Im Allgemeinen ist y_n' noch durch die n^{te} Potenz von f theilbar.*“

Combinirt man das in (E) niedergelegte Ergebniss mit den Ueberlegungen, die kurz zuvor bezüglich einer eventuellen Theilbarkeit von S_{n+1} resp. S_{n+2} durch eine höhere, als die $(n+1)^{te}$ Potenz von f (im Falle beliebiger Functionen φ, f) angestellt wurden, und berücksichtigt noch die (weiter unten bewiesene) Relation

$$\Delta_n^2 y_n' = -(n+1)(\Delta_{n+1}\Delta_{n-1} - \Delta_n^2) \tag{44}$$

so tritt dem Theoreme (1) das folgende Corollar ergänzend zur Seite:

(D_1) „*Sieht man von dem unter* (E) *aufgeführten Falle ab, und legt den Functionen φ, f nur die Beschränkung auf, dass weder φ noch f_1 mit f einen Theiler gemein haben sollen, so ist die Summe S_ν von den ν Anfangsgliedern der Entwickelung $f(y_n) = f\left(x + f\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\right)$ nicht nur für $\nu < n+1$, sondern auch für $\nu = n+1$ ausschliesslich durch die ν^{te} und durchaus durch keine höhere Potenz von f theilbar.*

Dagegen ist für $\nu > n+1$ eine Erhöhung der im Allgemeinen stattfindenden Theilbarkeit von S_ν durch f^{n+1} um die i^{te} ($i = 1, 2, \ldots$) Potenz von f möglich: eine solche tritt genau dann, aber auch nur dann ein, wenn die höchste, in der Differenz $\Delta_{n+1}\Delta_{n-1} - \Delta_n^2$ aufgehende Potenz von f die $(n+i)^{te}$ ist.“

Das Theorem (D) gilt also gerade so weit, als $\Delta_{n+1}\Delta_{n-1} - \Delta_n^2$ durch keine höhere, als die n^{te} Potenz von f theilbar ist.

Was jetzt noch den Beweis der Formel (44) angeht, so folgt zunächst aus (31) durch Differentiation nach x:

$$\Delta_n^2 y_n' = \Delta_n^2 + f_1 \Delta_n \Delta_{n-1} + \Delta_n^2 f\left(\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\right)' \tag{45}$$

wo

$$\Delta_n^2 f\left(\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\right)' = (f\Delta_{n-1}')\Delta_n - (f\Delta_n')\Delta_{n-1} \tag{46}$$

---

brauchen: Alle Lösungen der Aufgabe gehören einer und derselben, durch den Modul $f^{n+1}(x)$ bestimmten „Classe“ an.

Auf den Inhalt dieser Anmerkung hat mich Herr R. Dedekind aufmerksam gemacht.

st. Andererseits erschliesst man aus der ursprünglichen Bedeutung
on Δ_n resp. Δ_{n-1} (2) sofort, dass

17) $$f\Delta'_n = (n+1)\Delta_{n+1} + (n+1)f_1\Delta_n, \quad f\Delta'_{n-1} = n\Delta_n + nf_1\Delta_{n-1}.$$

Hie urch geht (46) über in

13) $$\Delta_n^2 f\left(\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\right)' = n\Delta_n^2 - (n+1)\Delta_{n-1}\Delta_{n+1} - f_1\Delta_{n-1}\Delta_n,$$

as in (45) eingesetzt, nach kurzer Zusammenziehung, zu der ge-
ünschten Formel (44) führt.

Mittelst dieser Relation (44) gewinnt man leicht eine Recursions-
rmel für y_n. Bedient man sich nämlich der Umformungen:

$$\Delta_{n+1}\Delta_{n-1} - \Delta_n^2 = -\Delta_{n+1}\Delta_n\left\{\frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}} - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\right\}$$

$$= -\frac{\Delta_{n+1}\Delta_n}{f}(y_{n+1} - y_n)$$

h: man unmittelbar

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{n+1} f \frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}} y'_n.$$

§ 7.

Zur Auflösung der transcendenten Gleichungen *).

Wir beschränken uns hier auf die Erörterung einiger Folgerungen,
elche aus dem Theorem (D) des § 5 unmittelbar hervorgehen, eine
örterung, welche dem in einer früheren Arbeit (diese Annalen,
and XXXIII) betreffs der Auflösung der algebraischen Gleichungen
rchgeführten Gedankengange im Wesentlichen parallel läuft.

nter der Bedingung, dass die Taylor'sche Entwickelung von
$y_n = f\left(x + \frac{u_{n-1}}{u_n}\right)$ convergirt, gilt, da aus der Summe $S_\nu (\nu \geqq n+1)$
r ersten Glieder die $(n+1)^{\text{te}}$ Potenz von $f(x)$ heraustritt, die
entität:

1) $$f(y_n) = Q(x)\, f^{n+1}(x),$$

d Factor $Q(x)$ einen endlichen Werth besitzt.

edeutet daher x einen Ausgangswerth, der in solcher Nähe einer
llselle der Gleichung $f(x) = 0$ gewählt ist, dass der absolute Betrag
n fx) kleiner als die Einheit ausfällt, so hat die Formel (51) die

*) Wegen der Nullstellen von Potenzreihen vgl. König „Ueber eine Eigen-
aft der Potenzreihen" diese Annalen, Band XXIII, und Hurwitz „Ueber die
llstellen der Bessel'schen Function", ebenda, Band XXXIII.

Wirkung, dass man sich bei genügender Wiederholung der stitution*)

$$y_n = x + \frac{u_{n-1}}{u_n} \tag{52}$$

dem Werth α beliebig nähern muss.

Will man es aber bei einer einmaligen Anwendung der stitution (52) bewenden lassen, indem man den Index über alle Gr wachsen lässt, so muss die Forderung hinzugefügt werden, dass in diesem Falle die Convergenz der Reihe für $f(y_n)$ erhalten bleibt. dann lässt (51) einen äquivalenten Schluss zu; es wird $\lim y_n = \alpha$, damit zugleich $\lim y_n' = 0$.

Lässt man sich behufs hinreichender Annäherung an die Null α an einem genügend hoch gewählten n genügen, so ist demnac Uebereinstimmung mit der Formel (41), der Werth von y_n' ein für den begangenen Fehler.

Will man den letzteren indessen direct bestimmen, nämlic Rest der Reihe:

$$\alpha = x + (y_1 - x) + (y_2 - y_1) + \cdots + (y_{n+1} - y_n) + \cdots, \tag{53}$$

so leisten die Umformungen (49), (50) nützliche Dienste.

In dem besonderen (bei reellen Wurzeln algebraischer Gleichu wie l. c. pag. 520 gezeigt, immer herstellbaren) Falle, dass die Gl der Reihe (53), von einem bestimmten an, abwechselnde Vorzei haben (und reell sind), wird der Fehler kleiner als das erste i des Restes.

Clausthal, Dezember 1889.

*) Behufs practischer Ausführung der Substitution (52) bedient ma am besten der Recursionsformel (6) resp. (7).

INTORNO A DUE CLASSI DI INTEGRALI

ESPRIMIBILI

CON SOLI LOGARITMI

NOTA

DI

CARLO MARIA PIUMA

Nella mia nota: *Intorno ad una classe di integrali esprimibili con soli logaritmi* (vol. 7, serie 2.ª, pag. 18, degli *Annali di Matematica*), dimostrai un teorema relativo all' integrale

$$\int \frac{f dx}{\sqrt[m]{\theta}}$$

quando esso possa essere espresso con soli logaritmi, nel quale m rappresenta una potenza qualunque di un numero primo, ed f e θ due polinomi interi rispetto alla x, il secondo dei quali soltanto ammette fattori della forma $(x-\alpha)^{m_1}$, nei quali sia l' intero $m_1 < m$.

Nella presente nota mi propongo di dimostrare un teorema perfettamente analogo a quello or ora ricordato, relativamente a due altre classi di integrali della forma sopra indicata, ma nei quali sia per l' una

$$m = 2\,n^p$$

per l' altra

$$m = 3\,n^p$$

dove p ed n sono due interi positivi, il secondo dei quali rappresenta un numero primo diverso da 2.

È noto che se l'integrale $\int_{\theta}^{f(x)dx} \frac{1}{m}$ può essere esp

con soli logaritmi esso avrà la forma

$$\int_{\theta}^{f(x)dx} \frac{1}{m} = A \log \left(\prod_{\varphi=0}^{\varphi=m-1} Z_{\varphi}^{\alpha^{\varphi}} \right)$$

dove A rappresenta una costante, e avendo posto

$$Z_{\varphi} = \sum_{\beta=0}^{\beta=m-1} \alpha^{\beta} X_{\varphi}^{\beta} \theta^{\frac{\beta}{m}}$$

dove gli X_{β} sono polinomi interi rispetto all'x, e α radice primitiva dell'equazione

$$x^{m} - 1 = 0$$

Intorno ai polinomi X_{β}, che entrano nella composizione delle Z_{φ}, nella citata mia nota, osservai che essi possono essere scelti in modo che, quando una qualunque di queste Z_{φ} si annulla per $x = a$, esista sempre una potenza $(x-a)^{\gamma_{\varphi}}$ con esponente intero tale che nella relazione

$$Z_{\varphi} = (x-a)^{\gamma_{\varphi}} Y_{\varphi}$$

la funzione Y_{φ} non diventi nè nulla nè infinita per $x = a$.

Segue da ciò e dal fatto che quest'integrale non può divenire nè nullo nè infinito, che se alcune delle Z_{φ} annullino contemporaneamente per uno stesso valore $x = a$ che ponendo nella sua espressione le Z_{φ} date per mezzo de

di φ con la formola precedente, e differenziando la re-
nz ne che ne risulta, si otterrà

$$\theta^{\frac{1}{m}} \sum_{\varphi=0}^{\varphi=m-1} \frac{Y'_\varphi}{Y_\varphi} = \frac{A\,\theta^{\frac{1}{m}}}{x-a} \sum_{\varphi=0}^{\varphi=m-1} \gamma_\varphi \alpha^{\varphi}$$

dizione che dovendo essere identicamente verificata,
ovrà aver pur luogo per $x=a$. E per questo valore a
il primo membro è finito, ed il secondo infinito se
on è

$$\sum_{\varphi=0}^{\varphi=m-1} \gamma_\varphi \alpha^{\varphi} = 0$$

nnue questa relazione dovrà essere soddisfatta.
Relazioni analoghe si avrebbero per altri valori dell' x
e annullassero alcune delle Z_φ.

L (1) ci servirà per fondamento in queste ricerche.

I.

S ora

$$m = 2\,n^{\nu}$$

ov $n>2$ è un intero primo e ν un intero qualunque po-
iv.

Inquesto caso, α rappresenta una radice primitiva del-
equazione

$$x^{2n^{\nu}} - 1 = 0$$

vvero una radice dell' equazione

$$\frac{x^{n^{\nu}} + 1}{x^{n^{\nu-1}} + 1} = 0$$

e ome è noto è irriducibile ed ammette tutte e sole
radici primitive della precedente.

Segue da ciò che la (1), per questo valore di m, nella quale i γ_φ sono interi dovrà essere esattamente divisibili per

$$\frac{\alpha^{n^p}+1}{\alpha^{n^{p-1}}+1}.$$

Indicando con Q il quoziente e con R il resto di questa divisione si avrà

$$\sum_{\varphi=0}^{\varphi=2n^p-1} \gamma_\varphi \alpha^\varphi = Q\,\frac{\alpha^{n^p}+1}{\alpha^{n^{p-1}}+1} + R$$

ossia

$$(\alpha^{n^{p-1}}+1)\sum_{\varphi=0}^{\varphi=2n^p-1} \gamma_\varphi \alpha^\varphi = Q\,(\alpha^{n^p}+1) + R\,(\alpha^{n^{p-1}}+1)$$

e se si pone

$$A_\varphi = \gamma_\varphi + \gamma_{\varphi-n^{p-1}} \tag{2}$$

espressione nella quale devono essere sostituiti con zero i γ che risultassero avere un' indice negativo ovvero superiore a $2n^p-1$.

Con ciò la relazione precedente diviene

$$\sum_{\varphi=0}^{\varphi=2n^p+n^{p-1}-1} A_\varphi \alpha^\varphi = Q\,(\alpha^{n^p}+1) + R\,(\alpha^{n^{p-1}}-1)$$

dalla quale risulta

$$Q = \sum_{\varphi=0}^{\varphi=n^p+n^{p-1}-1} \frac{A_{n^p+\varphi}}{}\,\alpha^\varphi + \sum_{\varphi=0}^{\varphi=n^{p-1}-1} B\alpha^\varphi$$

...si è posto

$$B_\varphi = A_{\varphi + n^p} - A_{\varphi + 2n^p}$$

...pure si ottiene

$$R(\alpha^{n^{p-1}} + 1) = \sum_{\varphi=0}^{\varphi=n^p-1} C_\varphi \, \alpha^\varphi$$

...i C_φ, per $\varphi = 0, 1, \ldots n^{p-1} - 1$ sono dati dalla

$$C_\varphi = A_\varphi - A_{\varphi + n^p} + A_{\varphi + 2n^p}$$

...$\varphi = n^{p-1}, n^{p-1} + 1, \ldots . n^p - 1$ dalla

$$C_\varphi = A_\varphi - A_{\varphi + n^p}.$$

E a (3) potrà essere scritta nel modo seguente

$$R(\alpha^{n^{p-1}} + 1) = \sum_{\varphi=n^{p-1}}^{\varphi=n^p-1} (A_\varphi - A_{\varphi + n^p}) \alpha^\varphi + R_1$$

...endo un polinomio del grado $n^{p-1} - 1$ rispetto ad α. E poichè R è funzione intera di α, il secondo membro ...sta eguaglianza deve essere esattamento divisibile ...$^{p-1} + 1$. Per cui procedendo a questa divisione, per ...e il valore di R, non avremo a preoccuparci di ...oichè il resto di questa divisione deve essere zero ...i γ_φ soddisfacciano alle condizioni loro imposte ...natura del problema.

...uendo questa divisione si scorge immediatamente ...termine di grado più elevato, rispetto ad α, con... in R, è

$$\left(A_{n^p - 1} - A_{2n^p - 1}\right) \alpha^{n^{p-1}(n-1) - 1}$$

e poichè questo esponente è inferiore di una unità al grado dell'equazione irriducibile alla quale α soddisfa, così che R deve essere nullo, risulterà

$$A_{n^p - 1} - A_{2n^p - 1} = 0$$

Posto ciò, in modo affatto analogo, si deduce

$$A_{n^p - 2} - A_{2n^p - 2} = 0$$

ed in generale

$$A_{\varphi} - A_{\varphi + n^p} = 0$$

pei valori $\varphi = n^{p-1}$, $\varphi = n^{p-1} + 1, \ldots \varphi = n^p - 1$.

Dalla relazione $A_{\varphi} - A_{\varphi + n^p} = 0$ tenuto conto del (2) si ricava

$$\gamma_{\varphi} - \gamma_{\varphi + n^p} = \gamma_{\varphi + n^p} - n^{p-1} - \gamma_{\varphi - n^{p-1}}$$

dove φ può ricevere i valori n^{p-1}, $n^{p-1} + 1, \ldots, n^p - 1$ la quale relazione equivale alla

$$\gamma_{\varphi} - \gamma_{\varphi + n^p} = \gamma_{\varphi + n^p + n^{p-1}} - \gamma_{\varphi + n^{p-1}}$$

nella quale φ può ricevere i valori $0, 1, \ldots (n-1)n^{p-1} - 1$.

Con χ indichiamo uno degli interi $0, 1, \ldots n^{p-1} - 1$, e facciamo poi successivamente $\varphi = \chi$, $\varphi = \chi + n^{p-1}$, $\varphi = \chi + 2n^{p-1}, \ldots \varphi = \chi + (n-2)n^{p-1}$, otterremo così la serie di eguaglianze

$$\gamma_{\chi} - \gamma_{\chi + n^p} = \gamma_{\chi + n^p} + n^{p-1} - \gamma_{\chi + n^{p-1}} = \ldots$$
$$= \gamma_{\chi + (n-1)n^{p-1}} - \gamma_{\chi + n^p + (n-1)n^{p-1}}$$

Il osservando poi che è

$$n^{p} + (2q+1)\, n^{p-1} = n^{p-1}\,(n+1+2q)$$

d impari si scorge che, ponendo $\gamma_{\chi} - \gamma_{\chi+n^{p}} = k_{\chi}$, ar in generale la differenza

$$\gamma_{\chi+2q\,n^{p-1}} - \gamma_{\chi+n^{p}+2q\,n^{p-1}} = k_{\chi}$$

v q può ricevere ciascuno dei valori $0, 1, \ldots . n-1$, dve gli indici di γ che sono eguali o superiori a $2\,n^{p}$ ievno essere ridotti ai loro residui minimi positivi rispetto al modulo $2\,n^{p}$. Nella (4) i k_{χ} rappresentano interi positivi nulli o negativi.

2 In questo caso di $m = 2\,n^{p}$ l'integrale proposto può essere messo sotto la forma

$$(5)\qquad \int_{\theta^{\frac{1}{2n^{p}}}} \frac{f\,dx}{} = A \log \left(\prod_{\chi=0}^{\chi=n^{p-1}-1} \prod_{q=0}^{q=n-1} Z_{\chi+2qn^{p-1}}^{\alpha\,\chi+2qn^{p-1}}\; Z_{\chi+n^{p}+2qn^{p-1}}^{\alpha\,\chi+n^{p}+2qn^{p-1}} \right.$$

quando si convenga di ridurre gli indici delle Z gli esponenti degli α ai loro residui minimi positivi rispetto al modulo $2n^p$.

Dimostreremo ora che i polinomi X, che entrano nella composizione delle Z, possono essere scelti in modo, che le Z soddisfacendo alla (5), tutti gli interi che abbiamo indicati con k_χ abbiano uno stesso valore.

Osserviamo infatti che le due somme

$$\sum_{q=0}^{q=n-1} \alpha^{\chi+2qn^{p-1}} \quad \text{e} \quad \sum_{q=0}^{q=n-1} \alpha^{\chi+n^p+2qn^{p-1}}$$

sono entrambe nulle, e lo sono anche quando si riducano gli esponenti degli α ai loro residui minimi positivi rispetto al modulo $2n^p$.

Infatti queste somme sono rispettivamente equivalenti alle

$$\alpha^{\chi} \sum_{q=0}^{q=n-1} \alpha^{2qn^{p-1}} \quad \text{e} \quad \alpha^{\chi+n^p} \sum_{q=0}^{q=n-1} \alpha^{2qn^{p-1}}$$

Ma è

$$\sum_{q=0}^{q=n-1} \alpha^{2qn^{p-1}} = \frac{\alpha^{2n^p}-1}{\alpha^{2n^{p-1}}-1}$$

che è eguale a zero, il numeratore avendo tale valore ed il denominatore essendo diverso da zero.

Segue da ciò che si ha

$$\prod_{\chi=0}^{\chi=n^{p-1}-1} \left\{ \sum_{q=0}^{q=n-1} Z_{\chi+2qn^{p-1}} \right\} \alpha^{\sum_{q=0}^{q=n-1} \chi+2qn^{p-1}} = 1$$

$$\left\{ \sum_{q=0}^{q=n-1} Z_{\chi+2qn^{p-1}} \right\} \alpha^{\sum_{q=0}^{q=n-1} \chi+2qn^{p-1}}$$

pure

$$\prod_{\chi=0}^{\chi=n^{p-1}-1}\left\{\prod_{q=0}^{q=n-1} Z_{\chi+n^p+2qn^{p-1}}\right\}^{\sum_{q=0}^{q=n-1}\alpha_{\chi+n^p+2qn^{p-1}}} = 1$$

$$\prod_{\chi=0}^{\chi=n-1}\left\{Z_{\chi+n^p+2qn^{p-1}}\right\}^{\sum_{q=0}^{q=n-1}\alpha_{\chi+n^p+2qn^{p-1}}}$$

tanto gli esponenti quanto gli indici devono essere dotti ai loro residui minimi positivi rispetto al modulo $2n^p$.

Dalle due relazioni precedenti si scorge che ponendo

$$Z'_{\chi+2qn^{p-1}} = \frac{\prod_{\chi=0}^{\chi=n^{p-1}-1}\prod_{q=0}^{q=n-1} Z_{\chi+2qn^{p-1}}}{\prod_{q=0}^{q=n-1} Z_{\chi+2qn^{p-1}}}$$

$$Z'_{\chi+n^p+2qn^{p-1}} = \frac{\prod_{\chi=0}^{\chi=n^{p-1}-1}\prod_{q=0}^{q=n-1} Z_{\chi+n^p+2qn^{p-1}}}{\prod_{q=0}^{q=n-1} Z_{\chi+n^p+2qn^{p-1}}}$$

quindi la (5) può essere messa sotto la forma

$$\int \frac{f\,dx}{\theta^{\frac{1}{2n^p}}} = \frac{A}{n} \log \frac{\chi = n^{p-1}-1}{\chi = 0} \frac{q = n-1}{q = 0} \left(Z'^{\alpha\chi + 2qn^{p-1}}_{\chi + 2qn^{p-1}} \; Z'^{\alpha\chi + n^p + 2qn^{p-1}}_{\chi + n^p + 2qn^{p-1}} \right)$$

ove tanto gli indici, quanto gli esponenti degli α de[illegible]no essere ridotti ai loro residui minimi positivi rispett[illegible] al modulo $2\,n^p$.

Si osservi, che per il modo col quale le Z' dipendono [illegible]lle Z, si passa da una delle Z' ad un' altra colla stessa sostu-zione colla quale si passa dalla Z corrispondente alla p[illegible]ma a quella che corrisponde alla seconda, e di più che [illegible] Z' hanno una forma identica alle Z rispetto ad α ed $\theta^{\frac{1}{2n^p}}$.

er le Z' gl' interi k'_χ che corrispondo ai k_χ relativi all Z, hanno tutti lo stesso valore che indicheremo co k per cui sarà verificata la relazione.

(6) $$\gamma'_{\chi + 2\,q\,n^{p-1}} - \gamma'_{\chi + n^p + 2\,q\,n^{p-1}} = k$$

qualunque sia il valore di χ, dove gli interi γ' hanno, in relazione con le Z', un significato analogo a quelle degli interi γ relativi alle Z.

Infatti per la legge colla quale è formato $Z'_{\chi + 2\,q\,n^{p-1}}$ esso sarà in rapporto nè nullo nè infinito per $x = a$ con

$$(x - a)^{\gamma'_{\chi + 2\,q\,n^{p-1}}}$$

essendo

$$\chi + 2\,q\,n^{p-1} = \sum_{\chi=0}^{\chi=n^{p-1}-1} \sum_{q=0}^{q=n-1} \gamma_{\chi + 2\,q\,n^{p-1}} - \sum_{q=0}^{q=n-1} \gamma_{\chi + 2\,q\,n^{p-1}} + n\,\gamma_{\chi + 2\,q\,n^{p-1}}$$

$Z'_{\chi + n^p + 2\,n\,q\,n^{p-1}}$ nella stessa ipotesi sarà in rapporto nè nullo nè infinito con

$$(x - a)^{\gamma'_{\chi + n^p + 2\,q\,n^{p-1}}}$$

essendo

$$\chi + n^p + 2qn^{p-1} = \sum_{\chi=0}^{\chi=n^{p-1}-1} \sum_{q=0}^{q=n-1} \gamma_{\chi + n^p + 2qn^{p-1}} - \sum_{q=0}^{q=n-1} \gamma_{\chi + n^p + 2qn^{p-1}} + n\gamma_{\chi + n + 2qn^{p-1}}$$

dalle quali due ultime relazioni si deduce

$$\gamma'_{\chi + n\,q\,n^{p-1}} - \gamma'_{\chi + n^p + 2\,q\,n^{p-1}} =$$

$$= \sum_{\chi=0}^{\chi=n^{p-1}-1} \sum_{q=0}^{q=n-1} \left(\gamma_{\chi+2qn^{p-1}} - \gamma_{\chi+n^p+2qn^{p-1}} \right)$$

$$- \sum_{q=0}^{q=n-1} \left(\gamma_{\chi+2\,q\,n^{p-1}} - \gamma_{\chi+n^p+2\,q\,n^{p-1}} \right)$$

$$+ n \left(\gamma_{\chi+2\,q\,n^{p-1}} - \gamma_{\chi+n^p+2\,q\,n^{p-1}} \right)$$

ed osservando che, se χ resta costante, qualunque si q si ha

$$\gamma_{\chi+2\,q\,n^{p-1}} - \gamma_{\chi+n^p+2\,q\,n^{p-1}} = k_\chi$$

risulterà che è

$$\gamma'_{\chi+2\,q\,n^{p-1}} - \gamma'_{\chi+n^p+2\,q\,n^{p-1}} = n \sum_{\chi=0}^{\chi=n^{p-1}-1} k_\chi$$

ciò che dimostra la (6) quanto si ponga

$$k = n \sum_{\chi=0}^{\chi=n^{p-1}-1} k_\chi.$$

E per quello che abbiamo ora dimostrato risulta che i polinomi X che entrano nella (5) possono essere scelti in modo che, qualunque sieno χ e q, si abbia

$$\gamma_{\chi+2\,q\,n^{p-1}} = \gamma_{\chi+n^p+2\,q\,n^{p-1}} + k.$$

Dimostriamo ora che tali polinomi possono essere
i in modo che si abbia

$$\gamma_{\chi + 2\,q\,n^{p-1}} = \gamma_{\chi' + 2\,q'\,n^{p-1}}$$

$$\gamma_{\chi + n^p + 2\,q\,n^{p-1}} = \gamma_{\chi' + n^p + 2\,q'\,n^{p-1}}$$

χ' e q' qualunque.

Fatti ponendo

$$Z_{\chi + 2\,n^{p-1}} = \frac{\overset{\varphi = 2\,n^p - 1}{\underset{\varphi = 0}{\prod}} Z_\varphi}{Z_{\chi + 2\,q\,n^{p-1}}\; Z_{\chi + n^p + 2\,q\,n^{p-1}}}$$

facendo

$$Z'_{\chi + 2\,q\,n^{p-1}} = Y_{\chi + 2\,q\,n^{p-1}}\; Z^2_{\chi + 2\,q\,n^{p-1}}$$

$$Z'_{\chi + n^p + 2\,q\,n^{p-1}} = Y_{\chi + 2\,q\,n^{p-1}}\; Z^2_{\chi + n^p + 2\,q\,n^{p-1}}$$

Poichè è

$$Y_{\chi + 2\,q\,n^{p-1}} = Y_{\chi + n^p + 2\,q\,n^{p-1}}$$

qualunque sia χ e q, si scorge da prima che si passa da
una delle Z' ad un' altra coll' identica sostituzione colla
quale si passa dalla Z corrispondente alla prima a quella
corrispondente alla seconda ed inoltre che per $x = a$,
$Z'_{\chi + 2\,q\,n^{p-1}}$ è in rapporto nè nullo nè infinito con la
potenza di $x - a$ che ha per esponente

$$\overset{\varphi = 2\,n^p - 1}{\underset{\varphi = 0}{\sum}} \gamma_\varphi + k$$

e $Z'_{\chi + n^p + 2\,q\,n^{p-1}}$ nella stessa ipotesi è in rap-
porto nè nullo nè infinito con la potenza di $x - a$ che
per esponente

$$\overset{\varphi = 2\,n^p - 1}{\underset{\varphi = 0}{\sum}} \gamma_\varphi - k.$$

Quindi la (5) potrà essere sostituita dalla

$$\int \frac{f\,dx}{\frac{1}{\theta^{2n^p}}} = \frac{1}{2} \log \sum_{\chi=0}^{\chi=n^{p-1}-1} \sum_{q=0}^{q=n-1} \left(Z'^{\alpha}_{\chi+2qn^{p-1}} \right) \left(Z'^{\alpha}_{\chi+n^p+2qn^{p-1}} \right)$$

poichè è

$$\alpha^{n^p} + 1 = 0,$$

ossia che nella (5) i polinomi X che entrano nella composizione delle Z possono essere scelti in modo che si

$$\gamma_{\chi+2qn^{p-1}} = \gamma_{\chi'+2q'n^{p-1}}$$

$$\gamma_{\chi+n^p+2qn^{p-1}} = \gamma_{\chi'+n^p+2qn^{p-1}}$$

qualunque sieno i valori di χ' e q'.

Finalmente, posto il risultato or ora ottenuto, ci pponiamo di dimostrare che i polinomi X possono es- se scelti in modo che, per $x = a$, tutte le Z_{φ} sieno in porto nè nullo nè infinito con una stessa potenza $-a$.

due somme

$$\sum_{\chi=0}^{\chi=n^{p-1}-1} \sum_{q=0}^{q=n-1} \alpha^{\chi+2qn^{p-1}}$$

$$\sum_{\chi=0}^{\chi=n^{p-1}-1} \sum_{q=0}^{q=n-1} \alpha^{\chi+n^p+2qn^{p-1}}$$

nulle.

mendo

$$Y = \prod_{\chi=0}^{\chi=n^{p-1}-1} \prod_{q=0}^{q=n-1} Z_{\chi+2qn^{p-1}}$$

$$= \prod_{\chi=0}^{\chi=n^{p-1}-1} \prod_{q=0}^{q=n-1} Z_{\chi+n^p+2qn^{p-1}}$$

$$Z'_{\chi+2qn^{p-1}} = Y_1 \, Z^{n^p}_{\chi+2qn^{p-1}}$$

$$Z'_{\chi+n^p+2qn^{p-1}} = Y \, Z^{n^p}_{\chi+n^p+2qn^{p-1}}$$

orge immediatamente che qualunque siano χ e q, an $Z'_{\chi+2qn^{p-1}}$ quanto $Z'_{\chi+n^p+2qn^{p-1}}$ sono per $=a$ in rapporto nè nullo nè infinito con una stessa otenza di $x-a$, e che si passa da una delle Z' ad n' ltra, con la stessa sostituzione colla quale si passa all Z corrispondente alla prima a quella che corrisponde lla seconda.

Per cui sarà

$$\int \frac{f\,d\,x}{\theta^{\frac{1}{2n^p}}} =$$

$$\frac{A}{n} \log \frac{x = n^{p-1} - 1}{\Big\| \atop \chi = 0} \; \frac{q = n - 1}{\Big\| \atop q = 0} \begin{pmatrix} Z'^{\alpha}_{\chi + 2\,q\,n^{p-1}} & Z'^{\alpha}_{\chi + n^p + 2\,q\,n^{p-1}} \\ \chi + 2\,q\,n^{p-1} & \chi + n^p + 2\,q\,n^{p-1} \end{pmatrix}$$

relazione nella quale tanto gli esponenti di α quanto gli indici delle Z' devono essere ridotti ai loro residui minimi positivi rispetto al modulo $2\,n^p$.

E quindi, finalmente, potremo perciò porre

$$(7) \qquad \int \frac{f\,d\,x}{\theta^{\frac{1}{2n^p}}} = A \log \frac{\varphi = 2\,n^p - 1}{\Big\| \atop \varphi = 0} Z_{\varphi}^{\alpha^{\varphi}}$$

dove tutte le Z sono per $x = a$, in rapporto nè nullo nè infinito con una stessa potenza di $x - a$.

È poi chiaro che se una delle Z_{φ} si annulla per un valore qualunque della x ad esempio b, tutte le Z_{φ} saranno in rapporto nè nullo nè infinito con una stessa potenza di $x - b$.

II.

Sia ora $m = 3n^p$, ed $n > 3$ e primo: con ciò sarà

$$n^p > 2n^{p-1}.$$

l equazione

$$\frac{x^{2n^p} + x^{n^p} + 1}{x^{2n^{p-1}} + x^{n^{p-1}} + 1} = 0$$

ammette tutte e sole le radici primitive della

$$x^{3n^p} - 1 = 0$$

me è noto, irriducibile.

I ciò che segue, conserveremo alle diverse lettere ig ficati analoghi a quelli loro attribuiti trattando il as di $m = 2n^p$.

I integrale del quale ora ci dobbiamo occupare, quando ia sprimibile con soli logaritmi, avrà la forma

$$\int_0^{\frac{1}{3n^p}} \frac{f\,dx}{} = A \log \prod_{\varphi=0}^{\varphi=3n^p-1} Z_\varphi^{\alpha^\varphi}$$

torno alle Z_φ dimostreremo da prima un teorema n co al precedente.

$$(9^{\text{bis}}) \qquad \int_{\theta}^{\frac{1}{3n^p}} \frac{f\,dx}{} =$$

$$A \log \frac{\chi = n^{p-1} - 1}{\chi = 0} \frac{q = n - 1}{q = 0} \begin{pmatrix} \chi + 3qn^{p-1} & \chi + n^p + 3qn^{p-1} & \chi + 2n^p + 3qn^{p-1} \\ Z^{\alpha}_{\chi + 3qn^{p-1}} & Z^{\alpha}_{\chi + n^p + 3qn^{p-1}} & Z^{\alpha}_{\chi + 2n^p + 3qn^{p-1}} \end{pmatrix}$$

quando si convenga di ridurre gli indici delle Z e gli esponenti degli α ai residui minimi positivi rispetto al modulo $3n^p$.

Dalla (9) risulta la relazione

$$\sum_{\varphi=0}^{\varphi = 3n^p - 1} \gamma_{\varphi} \alpha^{\varphi} = 0$$

Ma la (8) essendo irriducibile, il primo membro di questa ultima relazione dovrà essere divisibili per

$$\alpha^{2n^p} + \alpha^{n^p} + 1$$

, ió che torna lo stesso, i γ_φ dovranno avere valori
il che rendano identicamente nulli i coefficienti delle
iv'se potenze di α nel resto di questa divisione, il che,
nto resto essendo del grado $2(n-1)n^{p-1}-1$ in α,
rà fra i diversi γ, $2(n-1)n^{p-1}$, relazioni, che ora
roponiamo di stabilire.

Indicando con Q il quoziente e con R il resto della
detta divisione sarà

$$\sum_{\varphi=0}^{\varphi=3n^p-1} \gamma_\varphi \alpha^\varphi = \frac{\alpha^{2n^p}+\alpha^{n^p}+1}{\alpha^{2n^{p-1}}+\alpha^{n^{p-1}}+1} Q + R$$

ovvero ponendo

$$A_\varphi = \gamma_\varphi + \gamma_{\varphi-n^{p-1}} + \gamma_{\varphi-2n^{p-1}}$$

sarà

$$\sum_{\varphi=0}^{\varphi=3n^p+2n^{p-1}-1} A_\varphi \alpha^\varphi = (\alpha^{2n^p}+\alpha^{n^p}+1)Q +$$

$$+ (\alpha^{2n^{p-1}}+\alpha^{n^{p-1}}+1)R$$

avendo che i γ con indice superiore a $3n^p-1$, ovvero
con indice negativo, devono essere sostituiti con zero.
Dalla relazione precedente si deduce

$$Q = \sum_{\varphi=2n^p+2n^{p-1}}^{\varphi=3n^p+2n^{p-1}-1} A_\varphi \alpha^{\varphi-2n^p}$$

$$- \sum_{\varphi=2n^p}^{\varphi=2n^p+2n^{p-1}-1} \left(A_\varphi - A_{\varphi+n^p}\right) \alpha^{\varphi-2n^p}$$

e

$$(\alpha^{2n^{p-1}} + \alpha^{n^{p-1}} + 1)\, R = \sum_{\varphi=n^p}^{\varphi=2n^p-1} \left(A_{\varphi+n^p} - A_\varphi\right) \alpha^\varphi + \sum_{\varphi=2n^{p-1}}^{\varphi=n^p-1} \left(A_{\varphi+2n^p} - A_\varphi\right) \alpha^\varphi$$

$$+ \sum_{\varphi=0}^{\varphi=2n^{p-1}-1} \left(A_{\varphi+3n^p} - A_{\varphi+2n^p} + A_\varphi\right) \alpha^\varphi .$$

E poichè R deve essere identicamente nullo, ne segue che i coefficienti di α nell' espressione

$$\sum_{\varphi=n^p}^{\varphi=2n^p-1} \left(A_{\varphi+n^p} - A_\varphi\right) \alpha^\varphi + \sum_{\varphi=2n^{p-1}}^{\varphi=n^p-1} \left(A_{\varphi+2n^p} - A_\varphi\right) \alpha^\varphi$$

devono essere identicamente nulli, o ciò che torna lo stesso che pei valori n^p, n^p+1, $n^p+2, \ldots\ldots, 2n^p-1$ di φ devonsi avere le n^p relazioni.

$$A_\varphi - A_{\varphi+n^p} = 0$$

e che pei valori $2n^{p-1}$, $2n^{p-1}+1, \ldots, n^p-1$ devonsi avere le $n^p - 2n^{p-1}$ relazioni

$$A_\varphi - A_{\varphi+2n^p} = 0$$

ciò che in tutto formano $2(n-1)n^{p-1}$ relazioni alle quali devono soddisfare i γ_φ

Nella prima di queste due ultime eguaglianze facendo successivamente

$$\varphi = n^p \,,\ \varphi = n^p + 1 \,, \ldots\ldots \,, \varphi = n^p + 2n^{p-1} - 1$$

otremo un seguito di eguaglianze che potrà essere espresso in generale dalle due

$$A_{\chi + n^p} = A_{\chi + 2n^p}$$

$$A_{\chi + n^p + n^{p-1}} = A_{\chi + 2n^p + n^{p-1}}$$

ove qui come nel seguito χ può ricevere gli n^{p-1} valori, $0, 1, \ldots, n^{p-1} - 1$.

Eguella stessa facendo poi

$$\varphi = n^p + 2n^{p-1} \,,\ \varphi = n^p + 2n^{p-1} + 1 \,, \ldots\ldots \,, \varphi = 2n^p - 1$$

nella seconda attribuendo poi successivamente a φ i valori $2n^{p-1}, 2n^{p-1} + 1, \ldots, n^p - 1$, si ottengono relazioni che possono essere scritte nel modo seguente

$$A_{\chi + (q+2)\, n^{p-1}} = A_{\chi + n^p + (q+2)\, n^{p-1}}$$

$$A_{\chi + n^p + (q+2)\, n^{p-1}} = A_{\chi + 2\, n^p + (q+2)\, n^{p-1}}$$

$$A_{\chi + (q+2)\, n^{p-1}} = A_{\chi + 2\, n^p + (q+2)\, n^{p-1}}$$

ultima delle quali è conseguenza evidente delle due prime, dove q può ricevere i valori $0, 1, \ldots . n - 3$, e così si ha sempre $2\,(n-1)\, n^{p-1}$ relazione fra i γ_φ.

6. Sia ora

$$Y_{\chi+\lambda n^{p-1}} = \frac{\underset{\chi=0}{\overset{\chi=n^{p-1}-1}{\|}} \quad \underset{q=0}{\overset{q=n-1}{\|}} \quad Z_{\chi+q n^{p-1}} \quad Z_{\chi+n^p+q n^{p-1}} \quad Z_{\chi+2n^p+q n^{p-1}}}{Z_{\chi+\lambda n^{p-1}} \quad Z_{\chi+n^p+\lambda n^{p-1}} \quad Z_{\chi+2n^p+\lambda n^{p-1}}}$$

ed osservando che è

$$\alpha^{\chi+\lambda n^{p-1}} + \alpha^{\chi+n^p+\lambda n^{p-1}} + \alpha^{\chi+2n^p+\lambda n^{p-1}} = 0,$$

qualunque sia il valore di χ e di λ, e convenendo di ridurre gli indici delle Z e gli esponenti degli α ai loro residui minimi positivi rispetto al modulo $3\,n^p$, risulterà che facendo

$$Z'_{\chi+\varepsilon n^p+\lambda n^{p-1}} = Z^3_{\chi+\varepsilon n^p+\lambda n^{p-1}} \; Y_{\chi+\lambda n^{p-1}}$$

dove ε può ricevere i tre valori 0, 1, 2, si passa da una Z' ad un'altra colla stessa sostituzione colla quale si passa dalla Z corrispondente alla prima a quella che corrisponde alla seconda e che l'integrale (9) potrà essere messo sotto la forma

$$\int_{\theta}^{\infty} \frac{f\,dx}{3n^p} = A \log \underset{\varphi=0}{\overset{\varphi=3n^p-1}{\|}} \alpha^{\varphi} Z'$$

... A_φ relative a queste nuove Z' soddisfanno necessa-
...ente alle (10) ed (11) e di più pel loro modo di com-
...posizione a relazioni che si possono compendiare nella se-
...guente formola

$$\chi + \varepsilon\, n^p + (\lambda + 2)\, n^{p-1} = {}^{A}\chi + \varepsilon_1\, n^p + (\lambda_1 + 2)\, n^{p-1}$$

...ve ε ed ε_1 possono avere i valori 0, 1, 2; λ e λ_1 i valori
... 1.... $n-3$, e χ uno dei valori 0, 1, ... $n^{p-1} - 1$,
...ne risulta pure, per i suddetti valori di ε e di χ, e pei
...valori 0, 1, ... $n - 4$ di λ_1

$${}^{A}\chi + \varepsilon\, n^p + (\lambda + 2)\, n^{p-1} = {}^{A}\chi + \varepsilon\, n^p + (\lambda + 3)\, n^{p-1}.$$

Da quest'ultima relazione facendo poi in essa successi-
...vamente $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, ... $\lambda = n-4$ segue

$$\begin{aligned} {}^{\gamma}\chi + \varepsilon\, n^p &= {}^{\gamma}\chi + \varepsilon\, n^p + 3\, n^{p-1} = \cdots \\ &= {}^{\gamma}\chi + \varepsilon\, n^p + 3\, h\, n^{p-1} \end{aligned}$$

...ve h è posto h eguale al più grande intero contenuto in
... $\frac{n-3}{3}$ e

$$\begin{aligned} {}^{\gamma}\chi + \varepsilon\, n^p + n^{p-1} &= {}^{\gamma}\chi + \varepsilon\, n^p + (3+1)\, n^{p-1} = \cdots \\ &= {}^{\gamma}\chi + \varepsilon\, n^p + (3\, h_1 + 1)\, n^{p-1} \end{aligned}$$

...ve h_1 è posto h_1 eguale al più grande intero contenuto
... $\frac{p-2}{3}$ e

$$\begin{aligned} {}^{\gamma}\chi + \varepsilon\, n^p + 2\, n^{p-1} &= {}^{\gamma}\chi + \varepsilon\, n^p + (3+2)\, n^{p-1} = \cdots \\ &= {}^{\gamma}\chi + \varepsilon\, n^p + (3\, h_2 + 2)\, n^{p-1} \end{aligned}$$

...ve h_2 è posto h_2 eguale al più grande intero contenuto
... $\frac{n-3}{3}$.

...La forma dell'integrale proposto espresso per mezzo
...delle ${}^{Z'}\varphi$ rientrando nella (9) quando al luogo di $\frac{A}{3}$ si

ponga A; potremo supporre che i γ_ϱ corrispondenti al χ soddisfacciano le (10), (11), (12), (13), (14) ed inoltre le (15), (16) e (17).

Dalla (12), facendo in essa successivamente $q=0, =1, \ldots, q=n-3$, dedurremo che pei valori 0, 1, . . ., di q è

$$(18) \qquad A_{\chi+(q+2)n^{p-1}} - A_{\chi+(q+3)n^{p-1}} =$$

$$= A_{\chi+n^p+(q+2)n^{p-1}} - A_{\chi+n^p+(q+3)n^{p-1}}$$

e dal risultato istesso, della sostituzione di $q=n-3$ ed (12) sottraendo membro a membro la (10), e dalla (13) sottraendo membro a membro la (11) si scorge che la (18) ha luogo pei valori 0, 1, ... $n-2$, di q.

Facendo poi $q=0$ nella (13) e sottraendo il risultato dalla (11) si deduce che la (18) è pure verificata per $q=-1$.

E facendo successivamente nella (13) istessa $q=0, =1, \ldots . q=n-3$, e sottraendo membro a membro ciascun risultato dal precedente, si deduce che, attribuendo a ciascuno dei valori 0, 1, ... $2n-4$, la (18) è sempre verificata.

Ma la (18) equivale per ciascuno dei suddetti valori di q alla

$$(19) \qquad \gamma_{\chi+q\,n^{p-1}} - \gamma_{\chi+n^p+q\,n^{p-1}}$$

$$= \gamma_{\chi+(q+3)n^{p-1}} - \gamma_{\chi+n^p+(q+3)\,n^{p-1}}$$

In modo analogo, si deduce dalla (14), che la

$$(20) \qquad \gamma_{\chi+q\,n^{p-1}} - \gamma_{\chi+2\,n^p+q\,n^{p-1}} =$$

$$= \gamma_{\chi+(q+3)n^{p-1}} - \gamma_{\chi+2\,n^p+(q+3)\,n^{p-1}}$$

è verificata per ciascuno dei precedenti valori di q.

8. Sia ora in primo luogo

$$n = 3k+2.$$

dalla (19) segue, facendo in essa successivamente $q=0$, $q=$, ... $q=2n-4=6k$ che, indicando con a_χ un intero positivo nullo o negativo, per ciascuno dei valori 0, 1, 2, ..., $2k+1$ risulterà

$$\gamma_\chi + 3\lambda n^{\nu-1} - \gamma_\chi + n^\nu + 3\lambda n^{\nu-1} = a'_\chi$$

facendo successivamente nella (20) $q=2$, $q=5$, ... $=6=3(k-2)+2$ otterremo un seguito di eguaglianze che convenendo di ridurre gli indici ai loro residui minimi positivi rispetto al modulo $3n^\nu$) possono essere compendiate nella seguente

$$\gamma_\chi + \{6k+3(\lambda+2)\} n^{\nu-1}$$
$$- \gamma_\chi + n^\nu + \{6k+3(\lambda+2)\} n^{\nu-1} = a'_\chi$$

dove a'_χ rappresenta un intero positivo nullo o negativo, e dove λ può ricevere i valori 0, 1, ... $k-1$.

La (13) per $q=0$ può essere scritta

$$\gamma_\chi + (3k+4) n^{\nu-1} + \gamma_\chi + 3(k+1) n^{\nu-1} + \gamma_\chi + n^\nu$$
$$- \gamma_\chi + 6(k+1) n^{\nu-1} + \gamma_\chi + n^\nu + 3(k+1) n^{\nu-1} + \gamma_\chi + 2n^\nu$$

Dalla (19) per $q=n-3=3k-1$ si ha

$$\gamma_\chi + (3k-1) n^{\nu-1} - \gamma_\chi + (6k+1) n^{\nu-1}$$
$$= \gamma_\chi + n^\nu - \gamma_\chi + 2n^\nu$$

Addizionando membro a membro queste due ultime eguaglianze si ha

$$a'_\chi = a_\chi + \gamma_\chi + (3k+4) n^{\nu-1} - \gamma_\chi + (6k+1) n^{\nu-1}$$

Se è $n=5$ e quindi $k=1$ dalla relazione precedente risulta identicamente

$$\alpha'_\chi = \alpha_\chi,$$

Se poi $n > 5$ e quindi $k > 1$, allora la (17) per = dimostra che è

$$\gamma_{\chi + (3k+4)\, n^{p-1}} = \gamma_{\chi + \{3(k+h_2)+4)\}\, n^{p}}$$

ma h_2 essendo il più grande intero contenuto in $\frac{n-}{3}$ sa $h_2 = k - 1$ per cui

$$\gamma_{\chi + (3k+4)\, n^{p-1}} = \gamma_{\chi + (6k+1)\, n^{p-1}}$$

e quindi in ogni caso sarà

$$\alpha'_{\chi} = \alpha_{\chi}.$$

ed in tal modo resta dimostrato che la (21) è verica pei valori 0, 1, ... $3k+1$ di λ, riducendo ben' inte g indici ai loro residui minimi positivi rispetto al m dul $3\, n^p$.

Nella (19) facendo poi successivamente $q=1$, $q=4$..... $6k-2$ risulterà

$$\gamma_{\chi + (3\lambda+1)\, n^{p-1}} - \gamma_{\chi + n^p + (3\lambda+1)\, n^{p-1}} = b_{\chi}$$

dove λ può ricevere i valori 0, 1, ... $2k$, relazion che mantenendo la solita convenzione relativa agli indic pu essere scritta nel modo seguente

$$(22) \qquad \gamma_{\chi + 3(k+\lambda+1)\, n^{p-1}} - \gamma_{\chi + 2n^p + 3(k+\lambda+1)\, n^{p-1}} = b_{\chi}$$

per tutti i suddetti valori di λ.

Nella (20) facendo poi successivamente $q = 0$, $q=3$ .... $q = 3(h-1)$ risulterà

$$\gamma_{\chi + 3\lambda\, n^{p-1}} - \gamma_{\chi + 2n^p + 3\lambda\, n^{p-1}} = b'_{\chi}$$

ove λ può ricevere i valori 0, 1, 2, ..., $k-1$.

questa relazione ponendo $\lambda=0$ si ha

$$b'_{\chi} = \gamma_{\chi} - \gamma_{\chi} + 2\,n^{\nu}$$

er la (21) è

$$a_{\chi} = \gamma_{\chi} - \gamma_{\chi} + n^{\nu}$$

ra quali due ultime segue

$$b'_{\chi} - a_{\chi} = \gamma_{\chi} + n^{\nu} - \gamma_{\chi} + 2\,n^{\nu}$$

nala (10) equivale alla

$$\gamma_{\chi} + n^{\nu} + \gamma_{\chi} + n^{\nu} - n^{\nu-1} + \gamma_{\chi} + n^{\nu} - 2\,n^{\nu-1} =$$

$$\gamma_{\chi} + 2\,n^{\nu} + \gamma_{\chi} + 2\,n^{\nu} - n^{\nu-1} + \gamma_{\chi} + 2\,n^{\nu} - 2\,n^{\nu-1}$$

nto conto di questa relazione la precedente diviene

$$b'_{\chi} - a_{\chi} = \gamma_{\chi} + 2\,n^{\nu} - n^{\nu-1} + \gamma_{\chi} + 2\,n^{\nu} - 2\,n^{\nu-1} -$$

$$\gamma_{\chi} + n^{\nu} - n^{\nu-1} - \gamma_{\chi} + n^{\nu} - 2\,n^{\nu-1}.$$

ss

$$b_{\chi} - a_{\chi} = \gamma_{\chi} + 3\,(2\,k+1)\,n^{\nu-1} - \gamma_{\chi} + (3\,k+1)\,n^{\nu-1} +$$

$$\gamma_{\chi} + n^{\nu} + 3\,k\,n^{\nu-1} - \gamma_{\chi} + 3\,k\,n^{\nu-1}$$

l essendo

$$a_{\chi} = \gamma_{\chi} + 3\,k\,n^{\nu-1} - \gamma_{\chi} + n^{\nu} + 3\,k\,n^{\nu-1}$$

rà

$$b_{\chi} = \gamma_{\chi} + 3\,(2\,k+1)\,n^{\nu-1} - \gamma_{\chi} + (3\,k+1)\,n^{\nu-1} =$$

$$\gamma_{\chi} + 3\,(2\,k+1)\,n^{\nu-1} - \gamma_{\chi} + 2\,n^{\nu} + 3\,(2\,k+1)\,n^{\nu-1} = b'_{\chi}$$

Quindi risulterà che la (22) sarà verificata per ciascuno dei valori 0, 1, 2,..... $3\,k+1$ attribuendo a λ.

9. Sia poi

$$n = 3k+1.$$

Operando, in modo analogo al precedente, sulla 19 se ne deduce

$$(23) \qquad \gamma_\chi + 3\lambda n^{p-1} - \gamma_\chi + n^p + 3\lambda n^{p-1} = a_\chi$$

dove a_χ è un'intero positivo nullo o negativo e dove χ può ricevere ciascuno dei valori 0, 1, 2,..... $2k$.

E nella (20) facendo successivamente $q=1$, $q=4$ ... $q=n-4=3(k-1)$, colla solita convenzione circa gli indici si ricava

$$\gamma_\chi + 3(2k+\lambda+1) n^{p-1} - \gamma_\chi + n^p + 3(2k+\lambda+1) n^{p-1} = a_\chi$$

per ciascuno dei valori 0, 1,.... $k-1$ asssegnato a χ.

Dalla (13) poi per $q=0$ risulta

$$\gamma_\chi + n^p + 2n^{p-1} + \gamma_\chi + n^p + n^{p-1} + \gamma_\chi + n^p =$$

$$\gamma_\chi + 2n^p + 2n^{p-1} + \gamma_\chi + 2n^p + n^{p-1} + \gamma_\chi + 2n^p$$

e la (19) per $q = n-3 = 3k-2$ fornisce

$$\gamma_\chi + (3k-2) n^{p-1} - \gamma_\chi + n^p + (3k-2) n^{p-1} +$$

$$\gamma_\chi + n^p - \gamma_\chi + 2n^p.$$

Ed addizionando membro a membro queste due ultime eguaglianze, ed osservando che la (23) ha luogo per $\chi = k+1$ sarà

$$a_\chi = \gamma_\chi + n^p + (3k-2) n^{p-1} - \gamma_\chi + (3k-2) n^p +$$

$$\gamma_\chi + 2n^p + n^{p-1} - \gamma_\chi + n^p + n^{p-1}$$

a dalla (16) risulta

$$\gamma_{\chi} + (3k-2)\, n^{p-1} = \gamma_{\chi} + n^{p-1} = \gamma_{\chi} + 3\, n^{p} + n^{p-1}$$

o la solita convenzione circa gli indici, come pure

$$\gamma_{\chi} + n^{p} + (3k-2)\, n^{p-1} = \gamma_{\chi} + n^{p} + n^{p-1}$$

e cui si ottiene finalmente

$$a_{\chi} = a'_{\chi}$$

sta che la (23) è soddisfatta da ciascuno dei valori 0, ... $3k$ attribuito a λ.

Nella (19) facendo poi successivamente $q = 2$, $q = 5$, ... $= 3(2k-2)+2$ si otteranno relazioni che, colla solita convenzione circa gli indici possono essere compendiate nella

$$\gamma_{\chi} + (3k+\lambda+1)\, n^{p-1}$$

$$- \gamma_{\chi} + 2\, n^{p} + (3k+\lambda+1)\, n^{p-1} = b_{\chi}$$

per ciascuno dei valori 0, 1, ..., $2k-1$ di λ.

Nella (20) poi per $q = 0$, $q = 3$, ..., $q = 3(k-1)$ si ottengono relazioni compendiate nella

$$\gamma_{\chi} + 3\lambda\, n^{p-1} - \gamma_{\chi} + 2\, n^{p} + 3\lambda\, n^{p-1} = b'_{\chi}$$

pei valori 0, 1, 2, ... k di λ

Un procedimento identico a quello tenuto, in circostanza analoga, nel caso di $n = 3k+2$, si dimostra che è

$$a_{\chi} - a_{\chi} = \gamma_{\chi} + n^{p} + 3k\, n^{p-1} - \gamma_{\chi} + 3k\, n^{p-1}$$

$$\gamma_{\chi} + 6k\, n^{p-1} - \gamma_{\chi} + 2\, n^{p} + 6k\, n^{p-1}$$

la quale tenuto conto delle (23) e (24) da

$$b'_{\chi} = b_{\chi}$$

e perciò resta dimostrato che la (24) è soddisfatta per ascuno dei valori 0, 1,... $3k$ attribuito a λ.

10, E dai due paragrafi precedenti si deduce che qualunque sia la forma di n, le due relazioni,

$$(25) \qquad a_{\chi} + \gamma_{\chi} + 3\lambda\, n^{\nu-1} = \gamma_{\chi} + n^{\nu} + 3\lambda\, n^{\nu-1}$$

$$(26) \qquad b_{\chi} + \gamma_{\chi} + 3\lambda\, n^{\nu-1} = \gamma_{\chi} + 2\, n^{\nu} + 3\lambda\, n^{\nu-1}$$

hanno luogo quando si dia a λ uno dei valori 0, 1, 2, $n-1$.

Ma è

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \alpha^{\chi + \varepsilon\, n^{\nu} + 3\lambda\, n^{\nu-1}} =$$

$$= \alpha^{\chi + \varepsilon\, n^{\nu}} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n^{\nu-1}} \alpha^{3\lambda\, n^{\nu-1}} = \alpha^{\chi+\varepsilon\, n^{\nu}} \frac{\alpha^{3\, n^{\nu}} - 1}{\alpha^{3\, n^{\nu-1}} - 1} : 0$$

per cui ponendo

$$y_\chi = \prod_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} Z_{\chi+3\lambda n^{p-1}}, \quad y'_\chi = \prod_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} Z_{\chi+n^p+3\lambda n^{p-1}}, \quad y''_\chi = \prod_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} Z_{\chi+2n^p+3\lambda n^{p-1}}$$

e

$$Z'_{\chi+3\lambda n^{p-1}} = Z^n_{\chi+3\lambda n^{p-1}} \; y'_\chi \; y''_\chi \qquad Z'_{\chi+n^p+3\lambda n^{p-1}} = Z^n_{\chi+n^p+3\lambda n^{p-1}} \; y_\chi \; y''_\chi$$

$$Z'_{\chi+2n^p+3\lambda n^{p-1}} = Z^n_{\chi+2n^p+3\lambda n^{p-1}} \; y_\chi \; y'_\chi$$

risulterà 1.° che si passa da una delle Z' ad un'altra colla stessa sostituzione colla quale si passa dalla Z corrispondente alla prima a quella che corrisponde alla seconda, 2.° che nella (9 bis) alla Z si possono sostituire le Z' purchè si divida A per n, e quindi continuando a rappresentare con A il quoziente $\frac{A}{n}$ si vede che la (9 bis) resta identicamente soddisfatta dalla Z'.

E la potenza di $x-a$ in rapporto nè nullo nè infinito con ciascuna delle $Z'_{\chi+\varepsilon n^p+3\lambda n^{p-1}}$ avrà per esponente $K_{\chi+3\lambda n^{p-1}} = n\gamma_{\chi+3\lambda n^{p-1}} + n(a+b) + 2\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n^{p-1}} \gamma_{\chi+3\lambda n^{p-1}}$

e quindi che questo esponente sarà costante per tutte le Z che hanno il loro indice congruo rispetto ad n^p.

11. Poniamo ora

$$y_{\chi+\lambda n^{p-1}} = \frac{\overset{\varepsilon=2}{\underset{\varepsilon=0}{\|}} \quad \overset{\lambda=n-1}{\underset{\lambda=0}{\|}} \quad \overset{\chi=n^{p-1}}{\underset{\chi=0}{\|}} \quad Z_{\chi+\varepsilon n^p+3\lambda n^{p-1}}}{Z_{\chi+3\lambda n^{p-1}}\, Z_{\chi+n^p+3\lambda n^{p-1}}\, Z_{\chi+2n^p+3\lambda n^{p-1}}\, \ldots}$$

$$Z'_{\chi+\varepsilon n^p+\lambda n^{p-1}} = Z^3_{\chi+\varepsilon n^p+\lambda n^{p-1}}\, y_{\chi+\lambda n^{p-1}}$$

risulterà che tutte le Z' sono in rapporto nè nullo nè infinito, con una stessa potenza di $x-a$, ed inoltre che si passa da una delle Z' ad un'altra colla stessa sostituzione colla quale si passa dalla Z corrispondente alla prima a quella che corrisponde alla seconda e che le Z' possono nella (9 bis) essere sostituite alle Z purchè si divida A per 3. Ciò fa vedere che nella (9 bis), ovvero nella (9), le Z possono essere scelte in modo che ciascuna di esse sia in rapporto nè nullo nè infinito con una stessa potenza di $x-a$, di esponente intero, a essendo un valore qualunque pel quale una delle Z sia nulla.

III.

1. Dai risultati finali dei paragrafi I e II si deduce che esisterà un certo polinomio intero ξ pel quale posto

$$U_{\varphi} = \frac{Z_{\varphi}}{\xi}$$

tanto nel caso di $m = 2n^p$ quanto in quello di $m = 3n^p$ (essendo n primo e più grande di 3 e p un intero positivo qualunque) U_{φ} non potrà mai essere nè nullo nè infinito per valori finiti della x.

Ora da questa relazione si scorge, procedendo come si è fatto nella precitata mia nota: *Intorno ad una classe di integrali esprimibili con soli logaritmi* che

$$X_{\frac{\beta}{\xi}} \theta^{\frac{\beta}{m}}$$

non potrà mai divenire infinito per valori finiti della x, per cui ponendo

$$\theta = \prod_{\rho=0}^{\rho=\tau} (x - a_{\rho})^{\varepsilon_{\rho}}$$

avrà:

$$X_{\frac{\beta}{\xi}} \theta^{\frac{\beta}{m}} = Y_{\beta} \prod_{\rho=0}^{\rho=\tau} (x - a_{\rho})^{\frac{\beta \varepsilon_{\rho}}{m}}$$

dove i numeratori degli esponenti nel secondo membro si suppongano ridotti ai loro residui minimi positivi rispetto al modulo m, e dove gli Y rappresentano polinomî interi rispetto alla x, e quindi sarà

$$Z_{\varphi} = \sum_{\beta=0}^{\beta=m-1} \alpha^{\varphi\beta} Y_{\beta} \prod_{\rho=0}^{\rho=\tau} (x - a_{\rho})^{\frac{\beta \varepsilon_{\rho}}{m}}$$

dove U_{φ} non potrà divenire nè nullo nè infinito per valori finiti della x.

Ciò posto il nostro integrale potrà essere messo sotto la forma

$$(28) \qquad \int \frac{f\,dx}{\theta^{\frac{1}{m}}} = A \log \left(\prod_{\varphi=0}^{\varphi=m-1} U_{\varphi}^{\alpha^{\varphi}} \right)$$

forma corrispondente alla formula (22) della suddetta mia nota, nella quale tra i due Σ e $R^{\alpha^{q \times m^{p-1}\, p}}_{q,p}$ deve intendersi log.

Poichè dalla (27) si deduce che è

$$\prod_{\varphi=0}^{\varphi=m-1} U_{\varphi} = \prod_{\varphi=0}^{\varphi=m-1} \frac{Z_{\varphi}}{\xi}$$

dove, per ciò che si è dimostrato il secondo membro, non può divenire nè nullo nè infinito per valori finiti della x, ed osservando che esso è eguale al rapporto di due polinomi interi rispetto a questa variabile, se ne dedurrà che esso deve ridursi ad una costante. Da ciò deriva che i polinomi Y saranno tali da soddisfare all'equazione

$$\prod_{\varphi=0}^{\varphi=m-1} U_{\varphi} = \text{costante.}$$

Quest'ultima eguaglianza è l'espressione del teorema, che in detta mia nota dimostrai pel caso di $m=?$, esteso al caso di $m=r\,n^{p}$, essendo l'intero primo $n>3$ e p un intero qualunque ed $r=2$ od $r=3$.

Sugli enti geometrici generati da forme fondamentali in corrispondenza algebrica,

DI

GINO LORIA

> « Durch gehörige Aneignung der wenigen Grundbeziehungen macht mann zich zum Herrn des ganzen Gegenstandes; es tritt Ordnung in das Chaos ein, und man sieht wie alle Theile naturgemäss in einander greifen, im schönster Ordnung sich in Reihen stellen, und verwandte zu wohlbegrenzten Gruppen sich vereinigen. »
>
> STEINER.

L'importanza della nozione di corrispondenza fra gli elementi di due varietà della stessa specie, è nota a chiunque siasi occupato tampoco di Geometria; è pure noto che questo concetto, applicato nel caso più semplice, condusse, nel piano, alla generazione dei luoghi di secondo ordine e degli inviluppi di seconda classe, nello spazio, alla doppia generazione delle quàdriche rigate; e che, sviluppato maggiormente, condusse alla costruzione per punti o per piani delle superficie di secondo ordine o seconda classe, delle curve gobbe del terzo ordine o delle sviluppabili di terza classe. Di altri risultati interessanti che esso diede di uno stadio di ulteriore evoluzione, verrà tenuto parola a luogo opportuno più innanzi. Ma già gli esempi addotti ci sembrano nostro avviso sufficienti a far sorgere la seguente questione generale e a renderne desiderabile la soluzione:

Date r *forme geometriche di* s^{ma} *specie in corrispondenza algebrica* (*univoca o non*), *si supponga che* r *loro elementi corrispondenti determinino una nuova figura geometrica; studiare le proprietà dell'ente* (*che diremo*

generato (1) *dalle forme date*) *costituito da tutte q*
figure.

Scopo del presente scritto è di risolvere questo prob
per forme fondamentali, nei casi in cui la corrispond
sia univoca; si è fatto eccezione pel caso di forme di p
specie, perchè, essendo ogni corrispondenza algebrica
voca fra due tali forme una projettività, si sarebbe g
a conclusioni per lo più conosciutissime. Ci limiteremo
enunciare le proprietà più salienti delle figure gener
lasciando ad altri o riserbando ad altra occasione lo s
delle principali fra queste. Le dimostrazioni saranno
la maggior parte soppresse; il lettore potrà ristab
basandosi sui principii di corrispondenza di Chasle
Salmon e di Zeuthen; o meglio applicando i metodi stra
nariamente fecondi che il Sig. Schubert ha riuniti nell'im
tante sua opera recante il titolo *Kalkül der abzählen*
Geometrie (2). Del resto parecchi risultati esposti non
nuovi — come ciascuno potrà desumere dalle citazion
abbiamo avuto cura di fare — e presero posto in qu
memoria unicamente per render manifesti i legami
essi hanno fra loro e con quelli che forse presen
qualche novità.

Malgrado l'attenzione che abbiamo posta nel ricer
i casi più importanti da studiarsi, non ci lusinghian
aver fatto cenno di tutti; gli è che nel determinarli, tr
alle difficoltà inerenti a qualsiasi ricerca di questo ge
si è alle prese con qualche cosa di personale dovuto
gnificato più o meno esteso che ognuno attribuisce alla
« generazione di una figura mediante altre » (Due
sghembe, a mo' d'esempio, secondo alcuni non gen
alcuna figura, secondo altri, fra cui chi scrive, es
nerano la congruenza lineare di cui sono direttrici).
ci sforzammo di attribuirle il senso più lato; al lett
telligente è riserbato di scoprire se, ciò non ostante
stano altre figure degne di studio generabili con
fondamentali in corrispondenza algebrica.

(1) È chiaro che qui la parola *generato* ha un significato ana
quello del vocabolo *dato* di cui si servirono Euclide e i geometri

(2) Leipzig, 1879.

§. 1.

Enti generati da due forme fondamentali di 1.ª specie in corrispondenza (m, n) [1].

Due fasci di piani di assi r, s in corrispondenza (m, n) generano una rigata di grado $m + n$ luogo delle ∞^1 rette in cui s'intersecano le coppie di piani corrispondenti. L'asse r del primo fascio è una generatrice n — pla della superficie, mentre l'asse s del secondo ne è una generatrice m — pla. Nel primo fascio esistono $2\,m\,(n-1)$ piani tali che il gruppo corrispondente a uno di essi ha un elemento doppio; nel secondo ve ne sono $2\,n\,(m-1)$.

Due punteggiate di sostegni r, s in corrispondenza (n, m) generano una rigata di grado $m + n$ luogo delle ∞^1 rette che congiungono le coppie di punti corrispondenti. Il sostegno r della prima punteggiata è una generatrice n — pla della superficie, mentre l'asse s del secondo è una generatrice m — pla. Nella prima punteggiata esistono $2\,n\,(m-1)$ punti tali che il gruppo corrispondente a uno di essi ha un elemento doppio; nel secondo ve ne sono $2\,m\,(n-1)$.

Ogni superficie generabile col procedimento ora indicato a destra, lo è pure con quello suggerito a sinistra, e viceversa.

Casi particolari. Per $m = 1$, $n = 1$ si ottiene il doppio modo di generare una quadrica rigata con forme fondamentali di prima specie projettive. Per $m = 1$, $n = 2$ si ha la generazione delle rigate di terzo grado che il Sig. Emilio Weyr pose a fondamento del suo studio di tali superficie. [2] Per $m = 2$, $n = 2$ si ha la generazione di un gruppo

---

[1] cioè che ad ogni elemento della prima forma corrispondono m della seconda, e ad ogni elemento della seconda n elementi della prima.

[2] *Geometrie der räumlichen Erzeugnissen ein — zweideutiger geometrischen Elementargebilde, insbesondere der Regelflächen dritter Ordnung* (Leipzig, 1870).

di rigate di quarto grado della quale si è servi
centemente il Sig. Rohn (1) nelle sue ricerche sulle
delle rigate di questo grado. Infine per $m = 2$, $n = 3$
tiene una nota rigata di quinto grado e primo gene

Se gli assi r, s dei due fasci dianzi considerati s' incontrano, la superficie generata riducesi a un cono d'ordine $m + n$ avente la retta r per generatrice n — pla e la retta s per generatrice m — pla.

Se i sostegni r, s del punteggiate dianzi co rate s'incontrano, la ficie generata riducesi curva piana di classe avente la retta r pe gente m—pla e la retta tangente n — pla.

L'ipotesi $m = 1$, $n = 1$ ci riconduce a casi particolari noti; quelli di $m = 1$, $n = 2$ ci dà la generazione de cubici razionali e delle curve piane di terza classe nali, pure studiata dal Sig. Weyr. (3)

2. Due fasci di raggi, aventi per centri i due punti, e per sostegni i due piani α, β, siano in corrispon (m, n); due loro raggi corrispondenti determinano una gruenza lineare il cui luogo è un complesso.

Il cono del complesso corrispondente a un punto P è generato (v. n.° 1) dai fasci di piani che projettano da P i dati fasci di raggi.

La curva del compl corrispondente a un pi è generata (v. n.° 1) dall teggiate in cui il pian secato dai fasci dati.

Il complesso è in conseguenza di grado $m + n$.

I coni del complesso passano tutti per i centri dei due fasci e per gli $m + n$ punti S

Le curve del comp toccano tutte i sosteg due fasci e gli $m + n$ p

(1) *Mathematische Annalen*, T. XXVIII.
(2) Schwarz, *G. di Borchardt* T. LXVII.
(3) *Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebild* w. (Leipzig, 1869).

el retta $\alpha\beta$ in cui s'incon-
ai due raggi corrispon-
en dei due fasci

per la retta AB in cui stanno due raggi corrispondenti dei due fasci.

ri punto S sta su un piano σ.

Il cono del complesso corrispondente a un punto P (o β) consta del piano α (risp. β) contato n (risp. m) volte e degli m (risp. n) piani che congiungono ai raggi del secondo (o primo) fascio corrispondenti al raggio del primo (risp. secondo) passante per P. Invece il cono del complesso corrispondente a un punto di un piano σ, consta di questo piano e di un cono d'ordine $m + n - 1$. Quindi i piani α, β, σ fanno parte della superficie singolare del complesso.

La curva del complesso corrispondente a un piano π per A (o B) consta del punto A (o risp. B) contato n (risp. m) volte e degli m (risp. n) punti in cui esso è incontrato dai raggi del secondo (o primo) fascio corrispondenti al raggio del primo (risp. secondo) posto in π. Invece la curva del complesso corrispondente a un piano per un punto S consta di questo piano e di una curva di classe $m + n - 1$. Quindi i punti A, B, S fanno parte della superficie singolare del complesso.

Caso particolare. Per $m = n = 1$ si ha un notissimo complesso di secondo grado, quello tetraedrale. La sua superficie è formata: come luogo dai piani α, β e dai due piani σ; come inviluppo dai punti A, B e dai due punti S; è facile dimostrare [1] che in tal caso il complesso si può considerare come insieme delle rette che projettano i vertici di un tetraedro con un gruppo di piani o ne incontrano le facce in un gruppo di punti di dato rapporto anarmonico. Una punteggiata e un fascio di piani in corrispondenza (m, n) generano $m + n$ coppie di punti e piani incidenti.

---

[1] C. Sturm, *Journal f. d. r. u. a. Mathematik.* T. CI, p. 164.

4. Una punteggiata e un fascio di raggi in corrispondenza (m, n) generano un cono di classe $m + n$, quello stesso che (n. 1) è generato dal fascio dato e dal fascio di raggi dato che si ottiene projettando dal centro di quello la data punteggiata.

Un fascio di piani e un fascio di raggi in corrispondenza (m, n) generano una curva piana d'ordine $m+n$, quella stessa che (n. 1) è generata dal fascio di raggi dato e dal fascio di raggi che si ottiene secando col piano di esso il dato fascio di piani.

§. II

Enti generati da tre forme di 1.ª specie in corrispondenza algebrica (1).

5. Tre fasci di piani fra cui passi una corrispondenza della specie indicata nella nota di questa pagina, generano con le intersezioni delle terne di piani corrispondenti, una curva d'ordine $n_1 m_2 m_3 + n_2 m_3 m_1 + n_3 m_1 m_2$ avente comuni risp. $m_1 (n_2 m_3 + n_3 m_2)$, $m_2 (n_3 m_1 + n_1 m_3)$, e $m_3 (n_1 m_2 + n_2 m_1)$ punti con gli assi dei tre fasci.

Tre punteggiate fra cui passi una corrispondenza della specie indicata nella nota di questa pagina, generano con i piani congiungenti le terne di punti corrispondenti, una sviluppabile della classe $n_1 m_2 m_3 + n_2 m_3 m_1 + n_3 m_1 m_2$ di cui passano risp. $m_1 (n_2 m_3 + n_3 m_2)$, $m_2 (n_3 m_1 + n_1 m_3)$ e $m_3 (n_1 m_2 + n_2 m_1)$ piani pei sostegni delle tre punteggiate.

Per $m_i = n_i = 1$ si ottiene una notissima generazione delle cubiche gobbe e delle sviluppabili di terza classe.

6. Dati tre fasci di raggi in corrispondenza algebrica,

(1) Per stabilire una corrispondenza algebrica fra tre forme omografiche di 1.ª specie F_1, F_2, F_3, in modo che queste siano trattate tutte egualmente, supporremo sempre di considerare una quarta forma della stessa specie ausiliare F, la quale sia in corrispondenza con ciascuna delle altre; fra due qualunque di queste nascerà allora una corrispondenza. La corrispondenza fra una F e F_i è (m_i, n_i) (cfr. la prima nota del §. I); quella fra F_k e F_l sarà in generale $(n_k m_l, n_l m_k)$.

si considerino le ∞^1 schiere rigate [1] determinate ciascuna da tre raggi corrispondenti come direttrici; il loro luogo è una congruenza di cui ordine e classe sono espressi dal numero $n_1\ m_2\ m_3 + n_2\ m_3\ m_1 + n_3\ m_1\ m_2$.

Il centro del primo fascio è un punto singolare della congruenza al quale compete un cono di raggi d'ordine $n_2\ n_3 + n_3\ m_2$; similmente per gli altri due.

Il sostegno del primo fascio è un piano singolare della congruenza al quale compete una curva di raggi di classe $m_2\ n_3 + n_3\ m_2$; similmente per gli altri due.

Vi sono $n_2\ m_3 + n_3\ m_2$ coppie di raggi corrispondenti nel secondo e terzo fascio che s'incontrano; ognuna dà luogo a $2m_1\ (n_2\ m_3 + n_3\ m_2)$ fasci di raggi della congruenza. Onde questa ne contiene in totale

$$2(n_1n_2m_3+n_1n_3m_2+m_2n_3m_1+m_2n_1m_3+m_3n_1m_2+m_3n_2m_1)$$

Il caso $m_i = n_i = 1$ è conosciuto e fu studiato per la prima volta dal Sig. Roccella [2] e in seguito dai Signori Klein [3] e Sturm [4].

La congruenza dianzi considerata è il luogo delle generatrici di un certo sistema semplicemente infinito di superficie; le direttrici formano una congruenza dello stesso ordine e della stessa classe.

7. Siano r_1 e r_2 i sostegni di due punteggiate, a l'asse di un fascio di piani. Supponiamo che fra il fascio e la punteggiata esista una corrispondenza algebrica (n_1, n_1), mentre fra esso e la seconda ne esista una

Siano a_1 e a_2 gli assi di due fasci di piani, r il sostegno di una punteggiata. Supponiamo che fra la punteggiata e il primo fascio esista una corrispondenza algebrica (m_1, n_1), mentre fra essa e il secondo ne esista una $(m_2,$

---

[1] Schiera rigata è un sistema di generatrici di una superficie di conveniente ordine.

[2] *Sugli enti geometrici dello spazio di rette generati dalle intersezioni dei complessi corrispondenti di due o più fasci projettivi di complessi lineari* (Piazza Armerina 1882). Parte II, n. 10.

[3] *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*. T. I.

[4] *Journal f. d. r. u. a. Mathematik*. T. CI.

(m_2, n_2). Un piano del fascio è incontrato dalle congiungenti i punti che gli corrispondono in un gruppo di $m_1 m_2$ punti, il cui luogo è una curva dell'ordine $m_1 m_2 + m_1 n_2 + m_2 n_1$ che contiene $m_1 n_2 + m_2 n_1$ punti dell'asse del fascio e che ha $m_1 + n_1$ punti m_2 — pli sul sostegno della prima punteggiata, $m_2 + n_2$ punti m_1 — pli sul sostegno della. Un piano per a, r_1 o r_2 contiene quindi risp. $m_1 m_2$, $m_1 n_2$, o $m_2 n_1$ punti mobili della curva.

n_2). Da un punto della p-teggiata esce un gruppo di $m_1 m_2$ piani ognuno dei q-li contiene l'intersezione di e dei piani che corrispondo-a quel punto nei fasci dat- il loro inviluppo è di cl-se $m_1 m_2 + m_1 n_2 + m_2 n_1$: el sostegno della punteggiata passano $m_1 n_2 + m_2 n_1$ pi-ni della sviluppabile, me-re per l'asse del primo fa-io ne passano $m_1 n_1$ di m_2 — li- e per l'asse del secondo n_2 n_2 di m_1 — pli. Per un pu-to di r, a_1, o a_2 passano qu-di risp. $m_1 m_2$, $m_1 n_2$, o $m_2 n_1$ pi-ni mobili della sviluppabile.

Se $m_1 = m_2 = n_1 = n_2 = 1$ si ottiene a sinistra la cubica gobba di cui a, r_1, r_2 sono corde (rette per de punti); a destra una sviluppabile di terza classe di cui r, a_1, a_2 sono assi (rette in due piani).

8. Sia C il centro e γ il piano di un fascio di raggi, r_1 e r_2 i sostegni di due punteggiate. Supponiamo che fra gli elementi del fascio e quelli della prima e seconda punteggiata, esistano due corrispondenze algebriche (m_1, n_1) e (m_2, n_2). Queste tre forme generano:

o un sistema di $m_1 m_2 + m_1 n_2 + m_2 n_1$ coppie di punti e piani in posizione unita, ognuna delle quali è deter-

Sia C il centro e γ il piano di un fascio di ra-gi, a_1 e a_2 gli assi di due fa-ci di piani. Supponiamo che a gli elementi del fascio di raggi e quelli del prim- e secondo fascio di piani, si-stano due corrispondenze l-gebriche (m_1, n_1) e $(m_2$). Queste tre forme genera-o un sistema di $m_1 m_2 + m_1 n_2 + m_2 n_1$ coppie di p-ti e piani in posizione uni-, ognuna delle quali è de-

...ita da un raggio del fa-
...sci che incontri la congiun-
...gente di una coppia di punti
...corrispondenti;
...oppure un complesso di gra-
...do $n_1 m_2 + m_1 n_2 + m_2 n_1$
...luogo) delle ∞^1 congruenze
...lineari di cui ciascuna ha
...per direttrici un raggio del
...fascio e una delle congiun-
...genti le coppie di punti che
...gli corrispondono nelle due
...punteggiate.

minata da un raggio del fascio che incontri la intersezione di una coppia di piani corrispondenti;
oppure un complesso di grado $m_1 m_2 + m_1 n_2 + m_2 n_1$ luogo delle ∞^1 congruenze lineari di cui ciascuna ha per direttrici un raggio del fascio e una delle intersezioni delle coppie di piani che gli corrispondono nei due fasci di piani.

9. Sia r il sostegno di una ...nteggiata; C_1 e C_2 i centri, ... γ_2 i piani di due fasci ... raggi. Fra la punteggiata ... il primo fascio esista una ...rrispondenza (m_1, n_1), fra ...sse e il secondo una cor-...rispondenza (m_2, n_2). L'in-...me delle rette ciascuna ...lle quali passa per un ...nt di r e si appoggia a ...e raggi che corrispondono ...questo nei due fasci è una ...ga di grado $2m_1 m_2 + ... n + m_2 n_1$ avente la retta ...per retta multipla come luo-...secondo $m_1 m_2$, e passante ...r ... $m_1 n_2 + m_2 n_1$ punti ...cui s'intersecano due rag-...corrispondenti dei due ...sci.

Sia a l'asse di un fascio di piani; C_1 e C_2 i centri, γ_1 e γ_2 i piani di due fasci di raggi. Fra il fascio di piani e il primo fascio di raggi esista una corrispondenza (m_1, n_1), fra esso e il secondo una corrispondenza (m_2, n_2). L'insieme delle rette ciascuna delle quali sta in un piano per a e si appoggia a due dei raggi che corrispondono a questo nei due fasci è una rigata di grado $2m_1 m_2 + m_1 n_2 + m_2 n_1$ avente la retta a per retta multipla come inviluppo secondo $m_1 m_2$, e contenente gli $m_1 n_2 + m_2 n_1$ piani in cui stanno due raggi corrispondenti dei due fasci.

Og...i rigata generabile come si è indicato a sinistra, può ...ersi anche col procedimento di destra, e viceversa.

10. Sia dato un fascio di piani F, un fascio di raggi $\overline{F}$ e una punteggiata p in corrispondenza; per ogni punto P di quest'ultima passa un gruppo di rette ciascuna delle quali contiene uno dei punti comuni agli elementi dei due fasci che corrispondono al punto P. Il luogo di tutte le rette analoghe è una rigata; questa può anche intendersi generata:

a) dalla punteggiata p dal fascio F e dal fascio di raggi determinato da $\overline{F}$ sul piano di F;

b) dal fascio $\overline{F}$, dal fascio F e dal fascio di raggi determinato da p col centro di F.

Ne segue che l'ente generato è caso particolare di quello studiato nel n. prec.; quindi non è il caso di soffermarvisi sopra più oltre.

§. III

Di una superficie rigata generata da quattro fasci di raggi in corrispondenza algebrica.

11. Fra gli enti generabili con quattro forme di prima specie in corrispondenza, considereremo solo quello — che ci sembra il più interessante — che corrisponde all'ipotesi dell'essere quelle forme quattro fasci di raggi F, F_1, F_2, F_3. Se la corrispondenza fra F e F_i è (m_i, n_i) $(i = 1, 2, 3)$ il grado della rigata è $2(m_1 m_2 m_3 + n_1 m_2 m_3 + n_2 m_3 m_1 + n_3 m_1 m_2)$.

Pel centro del primo, secondo, terzo, quarto fascio vanno rispettivamente

$$n_1 m_2 m_3 + n_2 m_3 m_1 + n_3 m_1 m_2,\ m_2 m_3 + m_2 n_3 + m_3 n_2,$$
$$m_3 m_1 + m_3 n_1 + m_1 n_3,\ m_1 m_2 + m_1 n_2 + m_2 n_1$$

rette della congruenza; altrettante ne esistono nei loro rispettivi piani.

Se $m_i = n_i = 1$, la rigata è di ottavo grado ed ha per punti tripli i centri dei fasci; essa è caso particolare di quella generata da quattro fasci projettivi di complessi lineari, della quale si è occupato il Sig. Rocca in fine della sua memoria citata nel n. 6.

§. IV

Enti generati da due forme di seconda specie in corrispondenza univoca.

[illegible]. (1) Fra due piani punteggiati esista una corrispon-[illegible]za univoca (cremoniana) d'ordine n. Sia A_i un punto [illegible]amentale del piano α, r_i il suo grado di molteplicità; [illegible]a B_j un punto fondamentale del piano β e s_j il suo grado [illegible]i molteplicità. Supporremo che nessun punto fondamen-[illegible]al esista sull'intersezione $\alpha\beta$ dei due piani.

[illegible] congiungenti le ∞^2 coppie di punti corrispondenti [illegible]enano una congruenza di ordine $n+2$ e classe n. (2) [illegible] punti α e β sono singolari; ognuno di essi contiene una [illegible]a di raggi di classe $n+1$ avente la retta $\alpha\beta$ per [illegible]rente $n-$ pla. Questa è retta $n-$ pla della con-[illegible]nza. Ogni punto fondamentale A_i (o B_j) è singolare [illegible]la congruenza; il cono di raggi che gli compete è [illegible]'ordine r_i (o risp. s_j).

In generale la congruenza ha una superficie focale [illegible]'ordine $4n$ e classe $4(n-1)$.

Per $n=1$ la congruenza è di terzo ordine e prima [illegible]se; essa è formata dagli assi (rette in due piani oscu-[illegible]lanti) di una cubica gobba; questa è curva focale [illegible]ella congruenza la quale non ha in tal caso superficie [illegible]ocale.(3).

Correlativamente: due stelle di piani in corrispondenza [illegible]nivoca d'ordine n generano una congruenza d'ordine n e

---

(1) Quanto è accennato in questo n.° si trova sviluppato nella memoria [illegible]el sig. Hirst *On the Cremonian Congruences* (Proceedings of the [illegible]ondon mathematical Society, T. XIV).

(2) A scanso di equivoci avverto che per *classe* di una congruenza [illegible]nte[illegible] il numero delle sue rette che stanno in un piano arbitrario e [illegible]per *ordine* il numero delle sue rette che passano per un punto arbitrario.

(3) Cfr. Reye. *Die Geometrie der Lage* (2e Aufl.) II. Theil; XII [illegible]orlesg.

classe $n+2$ dotata di proprietà analoghe a quelle pe- dute dalla precedente (1).

13. (2) Una stella di raggi di centro R e una stell di piani di centro P siano in corrispondenza univoca d dine n. Sia a_i un raggio fondamentale della prima st r_i il suo grado di molteplicità; sia β_j un piano fondan tale della prima stella, s_i il suo grado di molteplicità

Ogni raggio della stella R incontra il piano corris dente della stella P in un punto. Il luogo di questi ∞^2 p è una superficie che si suol chiamare *monoide*. Il ordine è $n+1$; il punto R ne è un punto n — plo, me il punto P ne è un punto semplice. La retta fondam tale a_i è retta r_i — pla della superficie; il piano fo mentale β_j seca la superficie in una curva d'ordine s_j in una d'ordine $n - s_j + 1$.

I coni che projettano da R due sezioni piane della perficie hanno comuni $(n+1)^2$ generatrici. Queste so: *a*) le congiungenti R con gli $n+1$ punti comuni a qu due sezioni piane; *b*) le $n+1$ rette b di cui ciascun è contenuta nel piano che le corrisponde nella stella di piani; *c*) le rette a_i che, per un noto teorema della te delle trasformazioni cremoniane, equivalgono a n^2-1 rette semplici. Quindi per R non passano altre rette d superficie oltre alle fondamentali e alle $n+1$ rett dianzi definite.

---

(1) Quanto si espose in questo n.° si può generalizzare suppon che si passi dall'una all'altra delle due forme date con una trasforma multipla. Il caso in cui questa trasformazione è doppia fu studiata Sig. Conti in una tesi di cui il T. I dei *Rendiconti del Circolo m matico di Palermo* contiene un estratto.

(2) V. la nota del Sig. Jung *Sulle superficie generate da due sis cremoniani reciproci* pubblicata nei *Rendiconti della R. Accademia Lincei*, 1885.

upponendo $n = 1$ si ritrova notissima generazione delle
driche scoperta dal Seydewitz [1].
e i centri R, P delle due stelle coincidono il metodo
generazione testè studiato cessa di essere applicabile;
ue forme generano allora un cono d'ordine $n + 1$
go dei raggi della prima stella posti nei piani corri-
ndenti della seconda e un cono di classe $n + 1$ invi-
po dei piani della seconda stella passanti pei raggi
rispondenti della prima; coni dei quali non è difficile
are le principali singolarità [2].
er $n = 1$ si ricade nella notissima generazione dei
di secondo ordine e dei coni di seconda classe me-
te stelle reciproche concentriche.
orrelativamente: un piano punteggiato π e un piano
to ρ in corrispondenza univoca d'ordine n generano
superficie di classe $n + 1$ di cui π è piano tangente
- plo e ρ piano tangente semplice, ecc. ecc.
. I due piani punteggiati considerati alla fine del n° prec.
erano, non solo una superficie inviluppo, ma anche
omplesso. Questo è il luogo degli ∞^2 fasci di raggi
gnuno dei quali projetta da un elemento del piano pun-
giato π i punti della retta che gli corrisponde nel
piano rigato ρ. Il grado del complesso è $n + 1$ (v. n. prec.).
ue le curve del complesso hanno ρ per piano tan-
ente semplice e π per piano tangente n — plo; quelle
hestanno nei piani dell'inviluppo definito al termine del
. ec. contengono ciascuna un fascio di raggi. Il cono
el complesso avente il centro in un punto P di π si
cinde in questo piano contato n volte e nel piano che
oniunge P alla retta che gli corrisponde in ρ; invece
l cno del complesso avente il centro in un punto R di
siscinde in questo piano e nel cono che projetta da R
a curva che gli corrisponde. — Al complesso apparten-

(1) *Grunert's Archiv.* IX Theil.
(2) UNG *Sui sistemi cremoniani reciproci di grado* m. *(Rend. della R. Accademia dei Lincei,* 1885).
Cf. LAZZERI *Sulle reciprocità birazionali nel piano. (Rendiconti della R. Accademia. dei Lincei,* 1886).

gono le $n+1$ congruenze di classe 0 e ordine 1 d cui ciascuna consta delle rette che passano per uno di q gli $n+1$ punti nel piano π che stanno sulle rette ris tti vamente corrispondenti del piano ρ; vi appartengono ur le congruenze analoghe formate dalle rette che passan po punti fondamentali del piano punteggiato; vi apparten no infine le congruenze ognuna delle quali consta delle tte appoggiate a una retta fondamentale del piano riga alla curva corrispondente del piano punteggiato.

Facendo l'ipotesi che sia $n = 1$ si ottiene un noto mi plesso di 2° grado che fu studiato dal Sig. Hirst [1] ba dosi appunto su questa generazione.

Correlativamente: una stella di piani e una stell di raggi in corrispondenza cremoniana d'ordine $n+1$ ge nerano un complesso di grado $n+1$ luogo degli ∞^2 sc di raggi ognuno dei quali consta delle rette appoggiate a una retta della prima e situate nel piano corrispondente della seconda.

15. Siano ρ_1 e ρ_2 i sostegni di due piani rigati in cri spondenza univoca.

Se consideriamo due rette corrispondenti come dire ici di una congruenza lineare, con le ∞^2 congruenze cos ot tenute esauriremo tutte le rette dello spazio.

Se invece consideriamo le ∞^1 rette dell'un piano cui ciascuna incontra la corrispondente, potremo stu re l'inviluppo degli ∞^1 piani contenenti queste coppie di te. Questo inviluppo è di classe $n+2$; ad esso apparten no i sostegni delle due forme e i piani tangenti condott pe una retta fondamentale di uno dei due piani alla cu va corrispondente dell'altra.

Correlativamente: Il luogo dei punti per cui pas no coppie di raggi corrispondenti di due stelle di rag i corrispondenza cremoniana d'ordine n è una curva or dine $n+2$.

L'ipotesi $n = 1$ conduce alle generazioni con form di

---

[1] *Collectanea mathematica in memoriam D. Chelini* (Mediolani 81) p. 51-73.

...nda specie delle sviluppabili della terza classe e delle ...ue gobbe del terzo ordine (1).

...iando le due forme sono conjettive o concentriche la ...errazione precedente scompare; le due forme danno ...do soltanto a $n+2$ elementi uniti.

...1. Un piano punteggiato ... la stella di raggi in cor...ispondenza univoca d'or...ine n generano un gruppo ...i $+2$ punti e altrettante ...ret... passanti per quelli.

Una stella di piani e un piano rigato in corrispondenza univoca d'ordine n generano un gruppo di $n+2$ piani e altrettante rette posti in quelli.

...1. Un piano punteggiato e una stella di piani in cor...ris...ondenza cremoniana d'ordine n generano una curva ...iana d'ordine $n+1$ e un cono di classe $n+1$; ogni ...un... di quella sta in un piano di questo (cfr. n.° 13).

...1. Un piano rigato e una stella di raggi in corrispon...en... cremoniana d'ordine n generano una curva piana ...i classe $n+1$ e un cono d'ordine $n+1$; ogni genera...ric... di questo incontra una tangente di quella (cfr. n.° 13).

§. V

Enti generati da tre forme di 2.ª specie in corrispondenza univoca (2).

...1 Siano P_1, P_2, P_3 i centri di tre stelle di piani in ...orrispondenza univoca. Il luogo dei punti di intersezione ...ell ∞^2 terne di piani corrispondenti è una superficie ...ell ...rdine $n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2$ di cui i centri P_1, P_2, P_3 ...ell... date stelle sono punti multipli secondo i numeri

(1) EYDEWITZ. *Grunert's Archiv.* X Theil.

(2) ...er stabilire una corrispondenza univoca fra tre forme omonime ... 2.ª specie F_1, F_2, F_3 procederemo in modo analogo a quello seguito ...r ... forme di 1.ª specie, cioè considereremo una quarta forma F in ...rri...ondenza univoca con ciascuno. Se n_i è il grado della corrispon...enz... esistente fra F e F_i, sarà in generale $n_i n_k$ quello della corri...ond...nza che esiste fra F_i e F_k.

$n_2 n_3, n_3 n_1, n_1 n_2$. Il numero delle rette r della sup... non passanti pei centri delle tre stelle è eguale al n... delle terne di piani corrispondenti aventi una ret... mune ed è quindi espresso da $n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2$.

La superficie è rappresentabile univocamente su... forma di 2.ª specie. Se p. e. si suppone che la form... siliare di 2.ª specie che stabilisce la corrispondenz... le tre stelle, sia un piano punteggiato π, si può ott... agevolmente la rappresentazione su questo. Alle s... piane della superficie corrispondono curve d'ordine ... $+ n_3 n_1 + n_1 n_2$ aventi comuni: *a)* gli $n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2 + 3$ punti imagini delle rette r dianzi definite; punti fondamentali delle corrispondenze fra π e l... stelle, punti che sono multipli per le curve come ... trasformazioni. Due qualunque fra tali curve hanno ... $(n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2 + 3) + (n_1^2 - 1) + (n_2^2 - 1) + (n_3^2 - 1)$ intersezioni fisse e $n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2$ mobili, come è ... dovere. Il genere di queste sezioni piane è

$$\frac{(n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2 - 1)\ (n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2 - 2}{2}$$

$$\frac{(n_1-1)(n_1-2) + (n_2-1)(n_2-2) + (n_3-1)(n_3-2)}{2}$$

onde (1) la superficie contiene delle linee doppie, e ... plessivamente d'ordine

$$\frac{1}{2}\{(n_1-1)(n_1-2) + (n_2-1)(n_2-2) + (n_3-1)(n_3-2)\};$$

questo numero esprime quindi l'ordine della curva ... di un punto per cui passano due terne di piani corri... denti delle due stelle. (2)

---

(1) Cfr. Caporali. *Sui sistemi lineari triplicemente infiniti di ... algebriche piane.* Collectanea mathematica p. 153.

(2) Alcune proprietà or ora enunciate si trovano nei due lav... Sig. Jung *Sui sistemi cremoniani reciproci di grado* m. Nota III ... *diconti della R. Acc. dei Lincei*, 6 dicembre 1885); e *Sulle sup... generate da tre sistemi deducibili l'uno dall'altro mediante tras... zioni birazionali* (ib., 7 febbraio 1886). Altre sono consegnate ... scritto del Sig. Visalli. *Sopra una serie di superficie rappres... punto per punto sopra un piano.* Nota II (ib. 5 settembre 188... mi cadde sott'occhio dopo aver compiuta la redazione della pr... memoria.

onsiderazioni correlative servono a determinare le proprietà della superficie inviluppata dai piani che congiungono le terne di punti corrispondenti di tre piani punteggiati in corrispondenza univoca.

'ipotesi che le tre stelle di piani o i tre piani punteggiati siano projettivi, riconduce alle notissime generazioni indicate da Grassmann (1) per le superficie di terzo ordine e terza classe. (2)

). Fra una stella di piani di centro P e due piani punteggiati di sostegni π_1 e π_2 esistano due corrispondenze univoche degli ordini n_1 e n_2. Un piano della stella incontra la retta che congiunge i punti che gli corrispondono nei due piani, in un punto il cui luogo è una superficie dell'ordine $n_1 + n_2 + n_1 n_2 + 2$ avente il centro della stella per punto multiplo secondo $n_1 n_2 + 2$. Ogni piano di π_1 (o π_2) fondamentale di un certo ordine per la corrispondenza fra π_1 (o risp. π_2) e P è multiplo dello stesso grado per la superficie suddetta. Ogni piano fondamentale della corrispondenza fra P e π_1 (o π_2) contiene una curva traccia su esso del cono projettante la curva ed ad esso corrisponde in π_1 (o π_2) dal punto che gli corrisponde in π_2 (o risp. π_1). L'intersezione della superficie col piano π_1 si scinde in due degli ordini $n_1 + 1$ e $n_2 (n_1 + 1) + 1$; l'intersezione col piano π_2 in due degli ordini $n_2 + 1$ e $n_1 (n_2 + 1) + 1$; mentre i punti d'intersezione della superficie con la retta $\pi_1 \pi_2$ si distribuiscono in tre gruppi composti risp. di $n_1 n_2$, $n_1 + 1$ e $n_2 + 1$ punti.

La superficie contiene le $n_1 + n_2 + n_1 n_2 + 1$ rette r ognuna delle quali appartiene alla congruenza generata dai due dati piani punteggiati (n. 12) e sta sul corrispon-

---

(1) . di Crelle. T. XLIX.

(2) Generalizzando la ricerca fatta in questo n.°, nasce la questione di studiare il luogo generato da tre reti di superficie degli ordini m_1, m_2, m_3 in corrispondenza univoca; l'ordine di questo luogo è espresso in generale da $m_2 m_3 + m_3 m_1 + m_1 m_2$ e fu studiato dal Signor Cremona. *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen*, Berlin 1870, 12 nel caso in cui questa corrispondenza sia projettiva.

dente piano della stella. Essa è rappresentabile uni
mente sugli elementi di una forma razionale di 2.ª s
la costruzione più semplice si ha facendo la rappr
tazione sulla stella P. Allora alle sezioni piane del
perficie corrispondono dei coni di classe $n_1 + n$
aventi comuni: *a)* i piani che corrispondono alle r
dianzi definite; *b)* i piani fondamentali della corri
denza fra P e π_1 o π_2 presi tante volte quant'è il
grado di molteplicità per la trasformazione: questi
valgono a $(n_1^2 - 1) + (n_2^2 - 1)$ piani semplici. Due de
suddetti hanno quindi comuni $n_1 + n_2 + n_1 n_2 + 2$
tangenti mobili, come è di dovere. Ognuno di quest
ha (per equivalenza) $\frac{(n_1-1)(n_1-2) + (n_2-1)(n_2-2)}{2}$
tangenti doppii, onde è del genere $n_1 n_2 + n_1 + n_2 -$
segue che le sezioni piane della superficie sono pu
genere $n_1 n_2 + n_1 + n_2 - 2$, onde questa ha delle
doppie complessivamente dell'ordine

$$\frac{(n_1 + n_2 + n_1 n_2)(n_1 + n_2 + n_1 n_2 - 1)}{2} + 2.$$ [1]

Il caso più noto delle superficie ora considerato è
che corrisponde all'ipotesi $n_1 = n_2 = 1$; la superfi
allora del quinto ordine, ha P per punto triplo e co
una curva doppia del 5.° ordine. Essa fu studiata suc
vamente dal Clebsch [2], dai Signori Cremona e Stur,
e dal Caporali [4]; la generazione precedente fu in
or fa un anno dal Sig. Del Re [5]. — Se, in partic
ritenendo l'ipotesi $n_1 = n_2 = 1$, si suppone che
piani abbiano due punti uniti comuni, dalla superfi
staccano i sostegni delle forme piane date e riman

---

[1] Cfr. le note del Sig. Jung che abbiamo citate nel n.° prec. l
Nota del Sig. Visalli. *Sopra una serie di superficie rappres
punto per punto sopra un piano* (*Rend. dell' Accademia dei*
5 settembre 1886) di cui, come dell'altra, ebbi notizia dopo di ave
questo lavoro.

[2] *Mathematische Annalen.* T. III.
[3] *Mathematische Annalen.* T. IV.
[4] *Annali di Matematica.* Serie 2.ª T. VII.
[5] *Rendiconti della R. Accademia di Napoli.* Novembre 188

superficie del terzo ordine, la quale risulta luogo delle intersezioni degli elementi omologhi di una stella di piani e di una congruenza lineare in corrispondenza univoca (1). Attribuendo a n_1 e n_2 altri valori particolari, oppure specializzando o le corrispondenze (supponendole p. e. di De Jonquières) o la posizione dei due piani, si ottengono molte superficie notevoli su cui, stante la ristrettezza dello spazio, ci è forza sorvolare.

Un piano punteggiato in corrispondenza univoca con le stelle di piani genera un inviluppo dotato di proprietà correlative a quelle di cui gode il luogo testè studiato.

1. Fra una stella di raggi di centro R e due piani punteggiati di sostegni π_1 e π_2 esistano due corrispondenze non oche dagli ordini n_1 e n_2. Nascono in conseguenza due figure:

a) Una curva d'ordine $n_1 n_2 + n_1 + n_2 + 3$ luogo di un punto per cui passa un raggio della stella e la congiungente dei punti che gli corrispondono nei due piani; tale curva passa $n_1 n_2 + 2$ volte per il punto R; ogni retta fondamentale k-pla per la corrispondenza fra π_1 (o π_2) contiene inoltre k punti della curva.

b) Un cono d'ordine $n_1 n_2 + n_1 + n_2$ inviluppo di un piano in cui sta un raggio della stella e la congiungente dei punti che gli corrispondono nei due piani.

Nel caso particolare $n_1 = n_2 = 1$ si ottiene una curva di questo ordine con un punto triplo e un cono di terza classe; l'una e l'altro furono studiati dal Sig. Del Re nella sua memoria: *Su certi luoghi che s' incontrano nello studio di tre forme geometriche fondamentali di prim' specie projettivamente riferite a due a due* (2).

Correlativamente: Un piano rigato riferito univocamente

---

(1) fr. Schröter. *Journal f. d. r. u. a. Mathematik.* T. XCVI, p. 290. Questa costruzione generalizzata, conduce allo studio delle superficie generate da una superficie inviluppo e una congruenza in corrispondenza univoca o non); fra queste sono comprese le superficie studiate in questo n.° del testo.

(2) *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.* T. I.

a due stelle di piani, dà luogo a una sviluppabile (inv
dei piani contenenti una retta di quel piano e l'int
zione dei piani corrispondenti) e a una curva piana (lo
dei punti d'intersezione di queste coppie di rette).

22. Fra una stella di raggi di centro R e un pian
punteggiato π esista una corrispondenza univoca d'o
m; fra la stessa stella e un piano rigato ρ esista un
corrispondenza univoca d'ordine n. Allora, ogni ra
della stella è incontrato in un punto dal piano determ
dagli elementi che gli corrispondono nei due pia
luogo di questo punto è una superficie d'ordine $m+n$
di cui R è un punto $(m+n)$ — plo, cioè un monoide
dine $m+n+1$; esso può anche intendersi generato
intersezioni degli elementi corrispondenti di una ste
raggi in corrispondenza univoca con i piani tangen
una superficie della natura di quelle considerate in
del n.° 13.

Per il caso $m=n=1$ si vegga il n.° 9 della men
del Sig. Del Re citata nel n.° precedente

Correlativamente: un piano rigato, una stella di pian
e una stella di raggi generano una superficie inviluppo

23. Una stella di piani di centro P sia in corrispon-
denza univoca d'ordine m con un piano punteggiato in
corrispondenza univoca d'ordine n con un piano rigato
Vi sono ∞^2 rette in cui s'intersecano un piano della stella
e il piano determinato dagli elementi corrispondenti nei
due piani; la congruenza che esse formano può anche
intendersi generata dalle intersezioni degli elementi cor-
rispondenti di una stella di piani in corrispondenza uni-
voca con i piani tangenti di una superficie della specie
considerata in fine del n.° 13. Questa congruenza è or-
dine $m+n$ e classe $mn+m+n+2$; il punto P è sin-
golare, e siccome ad esso compete un cono di raggi or-
dine $mn+m+n+1$, così la congruenza è rappresen-
tabile univocamente sugli elementi della data stella. Ogni
piano fondamentale k-plo della corrispondenza fra P e π
contiene una curva di raggi di classe k; ecc. ecc.

Per il caso $m=n=1$, si consulti il n.° 10 della cita

moria del Sig. Del Re; la rappresentazione della corrispondente congruenza trovasi nella nota dell'A. *Rappresentazione su un piano delle congruenze* $(6, 2)$ *e* $(7, 2)_2$ (1) Una congruenza avente proprietà correlative si ottiene con un piano punteggiato, una stella di piani e una stella di raggi.

4. Fra gli elementi di una stella di piani di centro P e quella di due stelle di raggi R_1 e R_2 esistano due corrispondenze univoche degli ordini n_1 e n_2. Ogni piano della stella contiene una retta notevole, quella che congiunge le tracce su di esso dei raggi che gli corrispondono nelle due date stelle. Il luogo delle ∞^2 rette analoghe è una congruenza di ordine $n_1 + n_2 + 1$ e classe $n_1 n_2 + n_1 + n_2 + 1$ di cui i punti P, R_1, R_2 sono punti singolari a cui competono dei coni di raggi degli ordini rispettivi $n_1 n_2 + n_1 + n_2$, $n_2 + 1$, $n_1 + 1$. Essa è rappresentabile univocamente su gli elementi di una forma fondamentale di seconda specie; in particolare la sua rappresentazione su gli elementi della stella P è immediata. Correlativamente, si ha una congruenza mediante un piano punteggiato e due piani rigati.

5. Se una stella di raggi di centro R è in corrispondenza univoca d'ordine n_1 con una stella di piani di centro P_1 in corrispondenza univoca d'ordine n_2 con una stella di piani di centro P_2, vi sono ∞^1 punti in cui concorrono tre elementi corrispondenti delle tre stelle, e ∞^1 rette in cui stanno un raggio della stella R e l'intersezione dei piani che gli corrispondono nelle altre due. Il luogo di quei punti è una curva d'ordine $n_1 n_2 + n_1 + n_2 + 1$, l'inviluppo di questi piani è un cono (di vertice R) di classe $n_1 n_2 + n_1 + n_2 + 2$.

Se p. e. le due corrispondenze sono projettive si ottiene una curva di quarto ordine (2) e un cono di quinta classe. Similmente: un piano rigato riferito univocamente a due piani punteggiati mediante corrispondenze degli ordini

(1) *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*. 1886.
(2) Del Re, l. c. n.° 12.

n_1 e n_2, genera una sviluppabile di classe $n_1 n_2 + n_1 + n_2 + 1$ e una curva piana di classe $n_1 n_2 + n_1 + n_2 + 2$.

26. Siano ρ_1, ρ_2, ρ_3 tre piani rigati in corrispondenze univoche degli ordini n_1, n_2, n_3 con una stessa forma di 2.ª specie. Tre rette corrispondenti, prese come direttrici determinano una schiera rigata. Le rette di queste ∞^2 schiere formano un complesso il cui grado è espresso dal numero $n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2$. Ogni retta del piano ρ_1 è $n_2 n_3$ — pla del complesso, ogni retta di ρ_2 è $n_3 n_1$ — pla e ogni retta di ρ_3 è $n_1 n_2$ — pla. Il cono del complesso avente il vertice nel piano ρ_1 consta di questo piano preso $n_2 n_3$ volte e di un cono d'ordine $n_1 (n_2 + n_3)$; similmente per gli altri due piani ρ_2 e ρ_3: i sostegni delle tre forme date fanno quindi parte della superficie singolare del complesso. Il cono del complesso avente il vertice sulla retta $\rho_2 \rho_3$ consta del piano ρ_2 preso $n_3 n_1$ volte, del piano ρ_3 preso $n_1 n_2$ volte e di altri $n_2 n_3$ piani. Infine il cono del complesso corrispondente al punto $\rho_1 \rho_2 \rho_3$ consta dei piani ρ_1, ρ_2, ρ_3 presi risp. $n_2 n_3, n_3 n_1, n_1 n_2$ volte.

Il complesso più semplice compreso in questa categoria corrisponde all'ipotesi $n_1 = n_2 = n_3 = 1$; è di terzo grado e ci sembra che sarebbe degno di uno studio approfondito.

Tre stelle di raggi in corrispondenza univoca producono un complesso correlativo al precedente.

§. VI.

Enti generati da quattro forme di seconda specie in corrispondenza univoca

Ci limiteremo a esaminare i casi in cui le quattro forme siano omonime.

27. Quattro stelle di piani di centri P_1, P_2, P_3, P_4 che siano in corrispondenze univoche degli ordini n_1, n_2, n_3, n_4 con una stessa forma di seconda specie, generano una curva luogo dei punti in cui concorrono quattro loro elementi corrispondenti. In generale essa non passa pei centri delle date stelle e il suo ordine è espresso da

$$n_1 n_2 + n_3 n_4 + n_1 n_3 + n_4 n_2 + n_1 n_4 + n_2 n_3.$$

e p. e. le quattro stelle sono projettive si ottiene, com'è noto, una curva del sesto ordine. (1)

Similmente, quattro piani punteggiati danno origine a una sviluppabile.

8. Quattro piani rigati di sostegni π_1, π_2, π_3, π_4 che siano in corrispondenze univoche degli ordini n_1, n_2, n_3, n_4 con una stessa forma di seconda specie, generano una congruenza luogo delle ∞^2 coppie di rette appoggiate a quattro rette corrispondenti dei dati piani. Ordine e classe della congruenza sono espressi dal numero

$$n_1 n_2 + n_3 n_4 + n_1 n_3 + n_4 n_2 + n_1 n_4 + n_2 n_3.$$

I sostegni delle forme date sono piani singolari; p. e. π_1 contiene come curva di raggi la curva di classe $n_3 n_4 + n_4 n_2 + n_2 n_3$ che appartiene al complesso generato (n. 26) dai tre piani rigati π_2, π_3, π_4; analogamente per gli altri tre piani. Ecc. ecc.

Sarebbe interessante lo studio della congruenza di sesto ordine e sesta classe con quattro curve di raggi di terza classe che si ottiene supponendo projettivi i quattro piani dati.

Se invece di quattro piani rigati, si considerassero quattro stelle di raggi, si potrebbero istituire considerazioni analoghe.

§. VII.

Di due rigate generabili con cinque piani rigati o cinque stelle di raggi in corrispondenza univoca.

9. Degli enti generati da cinque forme di seconda specie studieremo soltanto quelli che si ottengono da cinque piani rigati o da cinque stelle di raggi ognuna delle quali sia in corrispondenza univoca con una medesima forma

(1) Il problema trattato in questo n.°, generalizzato, conduce allo studio del luogo di un punto per cui passano gli elementi corrispondenti di quattro reti superficie degli ordini m_1, m_2, m_3, m_4 in corrispondenza univoca; l'ordine della curva che così si ottiene è in generale espresso da $m_1 m_2 n_1 n_2 + \ldots + m_4 n_3 n_4 + \ldots$. Per il caso $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1$ si veggia: CREMONA, *Grundzüge einer allg. Theorie der Oberflächen*, n. 129.

di seconda specie. Chiameremo n_1, n_2, n_3, n_4 e n_5 gli ordini di queste corrispondenze, $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ e π_5 i sostegni dei piani dati.

Cinque rette corrispondenti dei piani date non sono in generale incontrate da alcuna retta, ma esistono dei gruppi che ammettono una traversale comune; il loro luogo è una rigata di grado

$$2\,(n_1\,n_2 + n_1\,n_3 + n_1\,n_4 + n_1\,n_5 + n_2\,n_3 + \\ + n_2\,n_4 + n_2\,n_5 + n_3\,n_4 + n_3\,n_5 + n_4\,n_5).$$

I cinque piani dati sono singolari per la rigata; per es. π_1 la seca in

$$n_2\,n_3 + n_4\,n_5 + n_2\,n_4 + n_5\,n_3 + n_2\,n_5 + n_3$$

rette e in una curva dell' ordine

$$2\,n_1\,(n_2 + n_3 + n_4 + n_5) + \\ + (n_2\,n_3 + n_4\,n_5 + n_2\,n_4 + n_5\,n_3 + n_2\,n_5 + n_3$$

similmente per gli altri quattro.

La rigata luogo delle ∞^1 rette appoggiate a cinque raggi corrispondenti di cinque stelle in corrispondenza univoca gode di proprietà correlative.

§. VIII.

Enti generati da due forme di terza specie in corrispondenza univoca.

30. Dati due spazi punteggiati S_1 S_2, supponiamo che fra i loro elementi esista una corrispondenza univoca tale che a un piano del primo corrisponda una superficie d'ordine m del secondo e a un piano di questo una superficie d'ordine n di quello; allora, come è noto, ad una retta di S_1 corrisponde una curva razionale d'ordine n in S_2 e a una retta di S_2 una curva razionale d'ordine m in S_1.

Le ∞^3 rette che congiungono le coppie di punti corrispondenti nei due spazi formano in generale [1] un complesso, il quale si può anche definire come insieme delle

[1] Diciamo in generale perchè esistono alcune particolari corrispondenze involutorie (che furon tutte determinate dal Sig. De Paolis in uno scritto pubblicato nell' Ottobre 1885 nei *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*) in cui le ∞^3 coppie di punti corrispondenti sono distribuite sui raggi di una congruenza.

...t che, considerate in uno dei due spazi, incontrano le ...e che ad esse corrispondono nell'altro. Il grado del ...nesso è in generale $m + n$, ma riducesi al grado metà ... corrispondenza è involutoria (1).

...sso contiene $m + n + 2$ stelle di raggi, i cui centri ...n i punti uniti della corrispondenza fra i due spazi S_1 ... S_2. Altre singolarità di esso si ottengono facilmente dalla ...nsiderazione degli elementi eccezionali (fondamentali) di ...ue a.

...l complesso è rappresentabile univocamente sugli ele... di una forma razionale di terza specie. Il modo più ...v di costruire questa rappresentazione consiste nel far ...rrispondere un punto P_1 di S_1 (p. es.) alla retta che lo ...ngiunge al punto che gli corrisponde in S_2. Allora a ...na superficie d'ordine p in S_1 corrisponderà in generale ...na congruenza dell'ordine $p\,(m\,n + n + 1)$ e della classe ...m; a una curva d'ordine p corrisponderà in generale ...na rigata d'ordine $p\,(m + 1)$; questi numeri subiscono ...elle modificazioni — che si determinano agevolmente — ...ua lo la curva o superficie considerata hanno delle re...zioni particolari con gli elementi fondamentali della cor...spondenza fra S_1 e S_2.

...'ipotesi $m = n = 1$ riconduce al complesso tetra...dra (2); alcuni complessi generabili nel modo descritto ...corrispondenti all'ipotesi che sia involutoria la corri...pondenza fra i due spazii dati s'incontrano nella teoria ...elle trasformazioni doppie dello spazio (3); sarebbe utile ...studio di altri complessi particolari analoghi, cioè di ...uelli che si ottengono specializzando in uno dei modi noti ...la corrispondenza fra S_1 e S_2.

---

(1) ...e, date tre quadriche non appartenenti allo stesso fascio, le ∞^3 ...rette cui ciascuna unisce un punto all'intersezione dei suoi piani po...lari rispetto alle date superficie, formano un (notevole) complesso di ...zo grado.

(2) ...r. la memoria dell'A. *Intorno alla geometria su un complesso ...rticale* (Atti della R. Accad. di Torino, 1884).

(3) ...e Paolis. *Le trasformazioni doppie dello spazio* (Memorie della ...Acad. d. Lincei, Serie 4.ª Vol. I).

Due spazi di pianî in corrispondenza univoca, con... in... terserzioni delle coppie di elementi analoghi, genera... u... complesso dotato di proprietà correlative a quelle d... pr... cedente.

31. Quando fra gli enti geometrici si comprendano anc... le corrispondenze, il complesso di cui tratta il n. pre... non è l'unica figura generata dai due spazi punteggia... conjettivi S_1 e S_2 in corrispondenza univoca. Infatti u... punto P dello spazio ha un corrispondente P_2 quando l... si consideri come appartenenente ad S_1, ha un corrispon... dente P_1 quando lo si consideri come appartenente a S... Chiamiamo π il piano $P P_1 P_2$. Questo è in generale determi... nato e unico (1), onde ad ogni punto P corrisponde un piano... passante per esso; viceversa (se m, n hanno ancora i si... gnificati che avevano nel n. prec.) ad ogni piano π cor... rispondono $m\ n$ punti P situati in esso — sono le inte... riezioni di π e delle superficie che gli corrispondono in S... e in S_2. I punti P e i piani π costituiscono quindi un si... stema nullo di ordine superiore. (2)

Per caratterizzare questo sistema osserveremo quanto... segue:

Ai piani di una stella corrispondono i punti di una super... ficie dell'ordine $m + n + 1$ passante pel centro della ella... stessa; ai piani di un fascio corrispondono i punti di una... curva dell'ordine $m\ n + m + n$ appoggiata in $m + n$ punti... all'asse del fascio medesimo. Agli elementi di un piano con... teggiato corrispondono i piani di una superficie di classe $m\ n$... $+ m + n$ della quale il sostegno del piano dato è tan... gente $m\ n$ — plo. Ai punti di una retta corrispondono i piani... di una sviluppabile di classe $m + n + 1$ di cui $m + n$ piani... passano per la retta data.

La corrispondenza fra i punti P e i piani π ammette... dei punti eccezionali di due specie:

a) Punti P i cui punti corrispondenti P_1 e P_2 sono in... linea retta con P; a ogni punto di tal fatta corrispondono...

(1) Quando cioè la corrispondenza fra S_1 e S_2 non appartenga a quelle... citate nella prima nota del n.° precedente.

(2) Cfr. AMESEDER. *Journal f. d. r. u. a. Matematik*, T. XCVII...

tti i piani di un fascio. Il loro luogo è una curva del-
ne $m\,n+2\,(m+n)+1$ passante per gli m^2+n^2
2 punti che hanno per corrispondenti nei due spazii due
ni coincidenti.

b Punti P tali che i loro corrispondenti P_1 e P_2 coin-
dono con essi; a ogni tale punto corrispondono tutti i
ni che passano per esso. Il loro numero è $m+n+2$.

Lasciamo al lettore di studiare il caso $m=n=1$ e di
ontare i risultati che per tal modo si ottengono con
e stabiliti dal Sig. Ameseder nella memoria precitata.

Due spazi di piani dànno origine a un sistema analogo
otto di proprietà correlative.

3. Supponiamo ora invece di avere uno spazio S di punti
uno spazio $\overline{S}$ di piani fra loro conjettivi, fra gli ele-
nti dei quali esista una corrispondenza *univoca* tale
he, un piano punteggiato di S corrisponda una super-
icie di classe m in $\overline{S}$, e a una retta punteggiata di S cor-
sponda una sviluppabile (razionale) di classe n in $\overline{S}$;
ome è noto, ad ogni stella di piani in $\overline{S}$ corrisponderà in
onseguenza una superficie d'ordine n in S, ad ogni fascio
i piani in $\overline{S}$ corrisponderà una curva (razionale) d'ordine
in S. Vi saranno ∞^2 punti di S che stanno sui loro
tan corrispondenti e ∞^2 piani di $\overline{S}$ che passano pei
ro punti corrispondenti; il luogo dei primi è d'ordine
$+$, l'inviluppo dei secondi è di classe $m+1$. Non è
ifficile assegnare le singolarità di queste superficie negli
punti eccezionali della corrispondenza; per brevità
ass.mo sotto silenzio i risultati di questa ricerca (1).

§. IX.

Il sistema nullo d'ordine superiore generato da uno spazio di punti in corrispondenza univoca con due spazii di piani; e del suo correlativo.

33. Fra i varii enti che si potrebbero considerare come
enati da tre forme di terza specie, ci restringeremo a fis-

(1) Lazzeri. *Sulle reciprocità birazionali nello spazio.* (Rendiconti
. Accad. dei Lincei, 1886).

sare la nostra attenzione su due fra loro correlativi e questi saranno anche gli ultimi di cui tratteremo in questo lavoro.

Supponiamo che fra uno spazio punteggiato S e due spazii di piani $\overline{S_1}$ e $\overline{S_2}$ esistano due corrispondenze univoche; useremo le lettere m_i e n_i ($i = 1$ o 2) per la corrispondenza S e $\overline{S_i}$ in un senso analogo a quello in cui ci servimmo delle lettere m e n nel considerare le corrispondenza fra S e $\overline{S}$.

Ogni punto P di S determina coll'intersezione dei piani che gli corrispondono in $\overline{S_1}$ e $\overline{S_2}$ un piano π. Facendo corrispondere π a P otterremo un sistema nullo di ordine superiore tale che, mentre ad ogni punto P corrisponde un piano π, ad ogni piano π corrispondono $m_1 m_2 - n_1 + n_2$ punti P.

Ai piani di una stella corrispondono i punti di una superficie dell'ordine $m_1 + m_2 + 1$ che passa per il centro di essa. Ai piani di un fascio corrispondono i punti di una curva d'ordine $m_1 m_2 + m_1 + m_2 + n_1 + n_2$ appoggiata in $m_1 + m_2$ punti all'asse del fascio.

Ai punti di un piano corrispondono i piani di una superficie di classe $m_1 m_2 + m_1 + m_2 + n_1 + n_2$ di cui del piano è multiplo secondo $m_1 m_2 + n_1 + n_2$. Agli elementi di una punteggiata corrispondono i piani di una sviluppabile di classe $m_1 + m_2 + 1$ di cui $m_1 + m_2$ piani contengono il sostegno della punteggiata stessa.

Vi è una superficie d'ordine $n_1 + 1$ luogo dei punti S che stanno sui loro corrispondenti in $\overline{S_1}$ (n. 32); essa sia la superficie analoga generata dagli spazii S e $\overline{S_2}$ in una curva d'ordine $(n_1 + 1)(n_2 + 1)$ ogni punto della quale è singolare del sistema perchè ha per corrispondenti ∞^1 piani formanti fascio. — Vi sono poi $m_1 n_2 + m_2 n_1 + 2$ punti singolari, tali che a ciascuno corrispondono tutti i piani che lo contengono; ecc. ecc.

Genova, *15 Novembre 1887*.

...lla integrazione delle equazioni a derivate parziali del primo ordine.

NOTA di G. MORERA

È noto che il problema di integrare l'equazione a derivate parziali

$$H(Q_1, Q_2, P_1, P_2) = h \qquad (1)$$

ove P_1, P_2 indicano le derivate parziali della funzione cognita rispetto a Q_1 e Q_2 ed h una costante, equivale quello di integrare il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\frac{dQ_1}{\frac{dH}{dP_1}} = \frac{dP_1}{-\frac{dH}{dQ_1}} = \frac{dQ_2}{\frac{dH}{dP_2}} = \frac{dP_2}{-\frac{dH}{dQ_2}} \qquad (2),$$

...enso che integrate queste equazioni si ottiene con ...a quadratura una soluzione completa dell'equazione a ...ivate parziali proposta e reciprocamente da una soluzione completa di quest'ultima si ottengono con differenziazioni gli integrali generali delle equazioni differenziali. Dal punto di vista delle ordinarie teorie del calcolo integrale il problema di integrare una equazione alle derivate parziali è più elevato di quello della integrazione di un sistema di equazioni differenziali ordinarie, anzi di ...go, il primo problema si considera risoluto quand'è ...ricondotto al secondo.

Ma havvi un caso importante nel quale l'equazione a ...ivate parziali (1) si può integrare direttamente e questo ...so *quello in cui essa ammette una soluzione completa ...mata dalla somma di due funzioni in ciascuna delle ...al figura una sola delle variabili indipendenti* Q_1, Q_2. ...cercare quando questo caso si presenta è sovratutto ...ante per la integrazione delle equazioni differenziali dei movimenti a due coordinate, le quali hanno notoriamente la forma (2).

In questo caso la determinazione della soluzione co-
pleta si effettua, come vedremo, con sole quadrature, s-
chè anche gli integrali delle equazioni differenziali so-
dati da quadrature, cioè *l'integrazione è riducibile a*
quadrature.

In questo breve scritto dimostro il teorema seguente
La condizione necessaria e sufficiente affinchè l'-
quazione a derivate parziali.

$$H(Q_1, Q_2, P_1, P_2) = h; \quad \left(P_1 = \frac{d\,V}{d\,Q_1}, P_2 = \frac{d\,V}{d\,Q_2} \right),$$

dove h *designa una costante indeterminata, ammet*
una soluzione completa formata dalla somma di u
funzione della sola Q_1 *e di una funzione della sola*
è che H *soddisfi ad una equazione funzionale del*
forma:

$$\varphi\Big(\varphi_1 (H, Q_1, P_1), \varphi_2 (H, Q_2, P_2) \Big) = 0$$

Se l'equazione (1) ammette una soluzione comple
della forma anzidetta P_1 e P_2 saranno funzioni rispet-
vamente della sola Q_1 e della sola Q_2. Immaginiamo s-
stituite in (1) queste funzioni: allora essa si cangia
una identità, differenziando la quale una volta rispetto
Q_1 ed un'altra volta rispetto a Q_2 avremo identicament

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\,H}{d\,P_1}\,\frac{d\,P_1}{d\,Q_1} + \frac{d\,H}{d\,Q_1} = 0 \\ \frac{d\,H}{d\,P_2}\,\frac{d\,P_2}{d\,Q_2} + \frac{d\,H}{d\,Q_2} = 0 \end{aligned}\right\}$$

Differenziamo la prima delle precedenti identità rispet
a Q_2, avremo:

$$\frac{d^2\,H}{dP_1\,dQ_2}\,\frac{d\,H}{d\,Q_1} + \frac{d^2\,H}{dP_1 dP_2}\,\frac{d\,P_1}{d\,Q_1}\,\frac{d\,P_2}{d\,Q_2}$$

$$+ \frac{d^2\,H}{dQ_1\,dQ_2} + \frac{d^2\,H}{dQ_1 dP_2}\,\frac{d\,P_2}{d\,Q_2} = 0$$

e sostituendo in questa identità i valori di $\frac{d\,P_1}{d\,Q_1}$, $\frac{d\,P}{d\,Q}$

dalle precedenti risulterà ovviamente:

$$\frac{d^2H}{dP_1dP_2}\frac{dH}{dQ_1}\frac{dH}{dQ_2} + \frac{d^2H}{dQ_1dQ_2}\frac{dH}{dP_1}\frac{dH}{dP_2}$$
$$\frac{d^2H}{dP_1dQ_2}\frac{dH}{dQ_1}\frac{dH}{dP_2} - \frac{d^2H}{dP_2dQ_1}\frac{dH}{dQ_2}\frac{dH}{dP_1} = 0$$

sserviamo che trattandosi di una soluzione completa, ctenente quindi *almeno una costante arbitraria non ggiunta*, i valori che P_1, P_2 assumono per valori qualunque di Q_1, Q_2 sono in fondo *arbitrarii,* purchè *si lasci ineterminata la costante* h, cioè, assegnati a Q_1 e Q_2 adarbitrio i valori Q^0_1, Q^0_2 si può fare in modo, disponedo opportunamente di h e della costante d'integrazione non aggiunta, che P_1 e P_2 prendano i valori arbitriamente dati P^0_1 e P^0_2. Si vede così che la funzione H de quattro argomenti Q_1, Q_2, P_1, P_2 deve soddisfare identicamente alla relazione sopra trovata. Per mettere in miglior luce la legge di formazione di detta relazione giverà scriverla nella forma seguente:

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2H}{dP_1dP_2} & \frac{d^2H}{dP_1dQ_2} & \frac{dH}{dP_1} \\ \frac{d^2H}{dQ_1dP_2} & \frac{d^2H}{dQ_1dQ_2} & \frac{dH}{dQ_1} \\ -\frac{dH}{dP_2} & -\frac{dH}{dQ_2} & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

La determinazione adunque della forma che *deve avere necessariamente* la $H(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$, affinchè sia verificata la circostanza da noi voluta, dipende dall'integrazione della equazione a derivate parziali (3).

Sviluppiamo il determinante in (2) secondo gli elementi dell'ultima linea, avremo:

$$\frac{dH}{dP_2}\left(\frac{dH}{dP_1}\frac{d^2H}{dQ_1dQ_2} - \frac{dH}{dQ_1}\frac{d^2H}{dP_1dQ_2}\right)$$
$$-\frac{dH}{dQ_2}\left(\frac{dH}{dP_1}\frac{d^2H}{dQ_1dP_2} - \frac{dH}{dQ_1}\frac{d^2H}{dP_1dP_2}\right) = 0$$

Dividiamo questa equazione per $\left(\frac{dH}{dP_1}\right)^2$, quantità che

non può essere identicamente nulla, avremo:

$$\frac{dH}{dP_2}\,\frac{d}{dQ_2}\,\frac{\frac{dH}{dQ_1}}{\frac{dH}{dP_1}} = \frac{dH}{dQ_2}\,\frac{d}{dP_2}\,\frac{\frac{dH}{dQ_1}}{\frac{dH}{dP_1}}$$

Ora la soluzione più generale di questa equazione è data dalla teoria di determinanti funzionali:

$$\frac{\frac{dH}{dQ_1}}{\frac{dH}{dP_1}} = F_1\,(H,\ P_1,\ Q_1),$$

dove il simbolo F_1 indica una funzione arbitraria.

Nelle precedenti equazioni noi possiamo dovunque scambiare gli indici 1 e 2, sicchè concludiamo che H deve soddisfare alle due equazioni a derivate parziali:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dH}{dQ_1} &= F_1\,(H,\ P_1,\ Q_1)\,\frac{dH}{dP_1}\\ \frac{dH}{dQ_2} &= F_2\,(H,\ P_2,\ Q_2)\,\frac{dH}{dP_2}\end{aligned}\right\}$$

dove F_1 e F_2 indicano due funzioni arbitrarie dei rispettivi argomenti.

Ora le cognizioni più elementari sulla teoria delle equazioni a derivate parziali lineari, mostrano che la soluzione più generale del precedente sistema è appunto:

$$\varphi\left(\varphi_1\,(H, P_1, Q_1),\ \varphi_2\,(H, P_2, Q_2)\right) = 0 \qquad (4),$$

dove le funzioni φ_1, φ_2 sono arbitrarie; essendo le F_1 e F_2 legate a queste dalle relazioni:

$$F_1 = \frac{\frac{d\varphi_1}{dQ_1}}{\frac{d\varphi_1}{dP_1}}\ , \qquad F_2 = \frac{\frac{d\varphi_2}{dQ_2}}{\frac{d\varphi_2}{dP_2}}\ ,$$

e quali le derivazioni si intendono fatte ritenendo H m variabile indipendente.

osi resta provato che H deve *necessariamente* soddis-fa e alla equazione funzionale (4).

ra è presto veduto che se H verifica una relazione e tipo (4) la *soluzione completa della forma voluta si* n *effettivamente trovare.*

fatti: sieno α_1, α_2 due costanti, delle quali l'una ar-itraria e l'altra determinata in funzione di quella dal-equazione:

$$\varphi\ (\alpha_1,\ \alpha_2) = 0\ ;$$

lla le equazioni

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1\ (h,\ P_1,\ Q_1) &= \alpha_1 \\ \varphi_2\ (h,\ P_2,\ Q_2) &= \alpha_2 \end{aligned}\right\}$$

ricavano le P_1 e P_2 siccome certe funzioni di Q_1 Q_2 ri-pettivamente, cioè sarà:

$$P_1 = P_1\ (Q_1,\ \alpha_1,\ h) \quad ;$$

$$P_2 = P_2\ (Q_2,\ \alpha_2,\ h) \quad ;$$

e però la funzione:

$$V = \int P_1\ (Q_1,\ \alpha_1,\ h)\ d\ Q_1 + \int P_2\ (Q_2,\ \alpha_2,\ h)\ d\ Q_2$$

soddisferà evidentemente alla equazione a derivate parziali:

$$H = h \quad ,$$

e conterrà, oltre alla costante arbitraria α_1 (α_2 è funzione di α_1), anche una costante arbitraria addittiva, cioè, sarà *appunto una soluzione completa.*

Sul punto doppio apparente della cubica gobba.

NOTA di A. PERRONI

Assegnati sei punti di una cubica gobba, essa risu quale intersezione di due coni di second'ordine, i cui v tici sono in due di questi punti, ognuno dei quali con determinato dalle cinque rette che si ottengono congiu gendone il vertice cogli altri cinque punti dati. Si proi tino sopra un piano qualunque (Ω) i due punti scelti co vertici, e si trovino le traccie delle nove rette ge ratrici, l'una delle quali comune ai due coni, sul pia stesso. Siano V, W le proiezioni dei vertici, siano S la trac della retta congiungente i vertici, M, N, P, Q, le trac delle altre quattro generatrici di un cono, H, K, I, L, que delle generatrici dell'altro cono. I punti $S\ M\ N\ P$ determinano una conica, come la determinano i pu $S\ H\ K\ I\ L$. Siano χ e Υ queste coniche. Alla prima cor sponda il vertice V, all'altra il vertice W. Poichè S è mune alle coniche χ ed Υ, ogni retta condotta per es taglia ciascuna di queste in un solo altro punto, che p costruirsi linearmente. Siano A ed A' due punti della χ della Υ rispettivamente, allineati con S. Le congiunge $A\ V$ ed $A'\ W$ si tagliano in un punto **A** che appartie alla proiezione della cubica gobba. Così questa proiezio può costruirsi punto a punto linearmente.

La retta $A\ V$ incontra ancora χ in un altro punto Tirando $S\ B$, questa taglia Υ in B', e $B'\ W$ incontra $A\ B$ in un punto **B**, e così si hanno i tre punti V **A B** de cubica proiezione giacenti sulla retta $A\ V$.

Affinchè la curva proiezione abbia un punto doppio sop una retta l uscente da V, è necessario che avvenga questa retta la coincidenza di due punti quali **A** e **B** (esc dendo ben inteso che per essere l tangente alla χ, sia A, B coincidenti, epperò anche $A'\ B'$). Ciò richiede c anche i punti A' e B' dedotti da A e B allineati con

no allineati con W, ossia è necessario che due raggi enti da S taglino la conica Σ in due punti allineati V, e la conica Υ in due punti allineati con W. Tutte oppie di punti di Σ allineati con V costituiscono una voluzione I_v, e tutte le coppie di punti di Υ allineati con formano un' involuzione I_w. Si proietti da S la I_w sopra conica Σ, si ottiene un' involuzione I'_w di medesima ce della I_v. Sia $E\ F$ la coppia comune a queste due inzioni; i punti E, F sono allineati con V, perchè apgono ad I_v; proiettati poi da S sulla Υ danno una pia $E'\ F'$ della I_w, ossia di punti della Υ allineati con Così è risoluta la quistione.

i osservi che i punti $E\ F$ si ottengono come punti d'inotro della Σ colla retta che congiunge V col *centro* l'involuzione I'_w, il quale si costruisce linearmente: su sta retta trovasi il punto doppio cercato. Ora si sarebbe ce potuto proiettare I_v sulla Υ, e determinare per na la coppia $E'\ F'$ comune ad I_w e ad I'_v, il che abbe condotto alla costruzione di una retta analoga alla nominata. Insomma le $E\ F$, $E'\ F'$ (o meglio le rette passano pei punti $E\ F$, $E'\ F'$ rispettivamente) possono nersi linearmente, senza servirsi dei punti E, F, E', F'. sistono adunque in modo reale, indipendentemente dalla tà dei punti suddetti, e pertanto è sempre reale il loro nto d'incontro, che è il punto doppio cercato

ccome però il ragionamento che ci condusse alla deminazione del punto doppio può lasciar dubbio sulla ura del punto ottenuto, quando i punti E, F e per conienza $E'\ F'$ non sono reali, conviene aggiungere quanto ie.

er trovare i punti della retta l, passante per V, in essa viene incontrata dalla proiezione della cubica a, facciamo essenzialmente uso dei punti d'incontro a l colla conica Σ. Questi punti d'incontro sono in caso definiti dall' involuzione di poli reciproci della l tto a Σ. Tale involuzione si proietti dal punto S sulla Υ; mo su questa conica un' involuzione proiettiva punto punto della precedente, in modo che ai punti doppii del-

l'una corrisponderanno i punti doppi dell'altra. Que
sono i punti d'incontro della Υ con una retta p semp
reale, che si ottiene come asse dell'ultima involuzione.
l'involuzione sulla l è ellittica, lo è anche quella dei p
reciproci sulla p, che può ricavarsi proiettando da S sulla
appunto l'involuzione sulla l. Ora i raggi che proietta
da W i punti d'incontro di p colla Υ, sono determin
dall'involuzione di raggi ottenuta proiettando l'involuzio
situata sulla p da W. Quindi anche i due ulteriori (olt
V) punti d'incontro della l colla cubica proiezione, so
definiti dall'involuzione secondo cui questa retta sega
fascio anzidetto. Così tali punti, siano essi reali od im
ginarii, vengono rappresentati da una forma reale.
questa è un'involuzione parabolica i due punti in quistio
coincidono. Ciò può aver luogo, o per essere paraboli
l'involuzione sulla p, nel qual caso la l tocca la cubic
cioè i due punti sono soltanto infinitamente prossimi, o p
la circostanza che l'asse p passa per W, e allora si
il punto doppio, che riesce isolato quando l'involuzio
sulla p è ellittica.

Ciminago Michele, *Gerente*.

WISSENSCHAFTLICHE BEILAGE ZUM JAHRESBERICHT DES STÄDT. GYMNASIUMS
UND REALGYMNASIUMS ZU BONN.

DIE VERWENDUNG DES DIFFERENTIALQUOTIENTEN AUF DER OBERSTUFE DES REALGYMNASIUMS.

(ALS ANHANG: DIE REELLEN WURZELN DER KUBISCHEN GLEICHUNG.)

VON

E. MILARCH,
OBERLEHRER.

BONN,
CARL GEORGI, UNIVERSITÄTS-BUCHDRUCKEREI UND VERLAG.
1907.

907, Progr. Nr. 534.

1. Erklärung des Differentialquotienten.

Der Differenzenquotient $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ erscheint unter der unbestimmten Form $\frac{o}{o}$, sofern $f(y)$ genau so aufgebaut ist wie $f(x)$, und $x=y$ gesetzt wird. Dass der wahre Wert von sehr wohl und leicht zu ermitteln ist, soll zunächst an einigen Beispielen gezeigt werden; dabei soll der Differentialquotient $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ (für $x=y$) kurz mit $df(x)$ bezeichnet werden.

2. Beispiele.

a) $dx^5=\frac{x^5-y^5}{x-y}\ (x=y)$; führt man die Division zunächst aus und setzt dann erst $=y$; so erhält man

$$\underline{dx^5=5x^4}$$

b) $dx^{3/5}=\frac{x^{3/5}-y^{3/5}}{x-y(x=y)}$

$\frac{\binom{x}{1/5}^3-\binom{y}{1/5}^3}{\binom{x}{1/5}^5-\binom{y}{1/5}^5}$ kürze man durch $(x^{1/5}-y^{1/5})$ und setze alsdann $x=y$; so erhält man $\underline{dx^{3/5}=\frac{3}{5}.x^{-\frac{2}{5}}}$

c) ebenso ergibt sich $dx^{-5}=-5x^{-6}$

Allgemein ist also für beliebiges m

$$\underline{\underline{dx^m=mx^{m-1}}}$$

d) $f(x)=Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\ldots.$

$f(y)=Ay+By^2+Cy^3+Dy^4+\ldots.$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=A+B(x+y)+C(x^2+xy+y^2)+D(x^3+x^2y+xy^2+y^3)+\ldots.$$

und $\underline{\underline{df(x)=Ax^0+2Bx^1+3Cx^2+4Dx^3+\ldots}}$

Anmerkung: Umgekehrt kann man aus $df(x)=Ax^0+2Bx^1+3Cx^2+4Dx^3+\ldots.$ wieder ursprüngliche $f(x)$ herauslesen; man hat nur nötig, jeden Exponenten um 1 zu erhöhen dann das betreffende Glied durch den erhöhten Exponenten zu dividieren

$$\text{also } f(x)=\frac{Ax^1}{1}+\frac{2Bx^2}{2}+\frac{3Cx^3}{3}+\ldots.$$

Dieses Wiederherstellen der unverseherten Reihe nennt man Integrieren.

e) $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

$e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \ldots$

$$\frac{e^x - e^y}{x-y} = 1 + \frac{x+y}{2!} + \frac{x^2+xy+y^2}{3!} + \frac{x^3+x^2y+xy^2+y^3}{3!} + \ldots$$

$$\frac{e^x - e^y}{x-y\,(x=y)} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots; \quad \underline{de^x = e^x}.$$

Andererseits:

$$\frac{x-y}{e^x - e^y} = \frac{1}{1 + \frac{x+y}{2!} + \frac{x^2+xy+y^2}{3!} + \frac{x^3+x^2y+xy^2+y^3}{4!} + \ldots}$$

$$\underline{\frac{x-y}{e^x - e^y} = \frac{1}{e^x} \quad (x=y)}$$

f) Wenn (1) $lnx = a$ und (2) $lny = b$ ist, dann gilt:
(3) $e^a = x$ und (4) $e^b = y$

nun ist $\frac{a-b}{e^a - e^b} = \frac{1}{e^a}$ (für $a=b$).

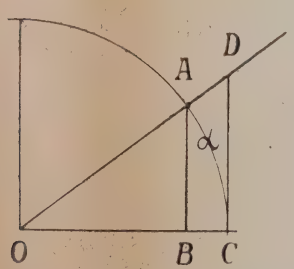
Führt man in diese Gleichung die Bezeichnungen der Gleichungen (1), (2), (3), (4) ein so erhält man:

$$\frac{lnx - lny}{x-y} = \frac{1}{x} \quad \begin{pmatrix}\text{für } lnx = lny \\ \text{also } x = y\end{pmatrix}$$

mithin $dlnx = \frac{1}{x}$ und $\underline{dln(1+x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots}$

Anm. $(1+x)(1-x+x^2-x^3+x^4 \ldots) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots = 1 + x - x^2 + x^3 - x^4 + \ldots$

g)



$\widehat{AB} = \sin a$; $AC = a$; $DC = \operatorname{tg} a$.

Solange $a > o$ (und $< 90^0$) gilt die Ungleichung

$$\frac{tga}{a} > 1 > \frac{\sin a}{a}$$

für $a = o$ geht die Ungleichung über in die Gleichung

$$\frac{\operatorname{tg} o}{o} = 1 = \frac{\sin o}{o}$$

h) $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$

$$\frac{\sin x - \sin y}{x-y} = \cos \frac{x+y}{2} \cdot \frac{\sin \frac{(x-y)}{2}}{\frac{(x-y)}{2}}$$

und $\underline{d \sin x = \cos x}$.

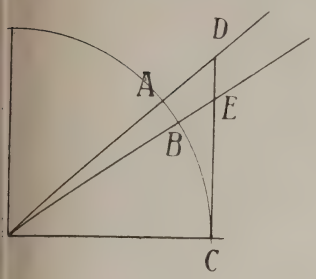
i) Ganz ähnlich $d\cos x = -\sin x$.

k) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha-\beta)\ (1+\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta)$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\alpha-\beta} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)}\cdot(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)$$

$$d\operatorname{tg}\alpha = 1+\operatorname{tg}^2\alpha.$$

l) Diese Figur lässt folgende 2 Bezeichnungen zu:



entweder	oder
$DC=\operatorname{tg}\alpha$	$DC=x$
dann $\overset{\frown}{AC}=\alpha$	dann $\overset{\frown}{AC}=\operatorname{arctg} x$ (d. h. AC ist der Bogen, der zur Tangente x gehört)
und $EC=\operatorname{tg}\beta$	und $CY=y$
dann $\overset{\frown}{BC}=\beta$	dann $\overset{\frown}{BC}=\operatorname{arctg} y$.

Nun war nach dem vorigen Beispiel:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\alpha-\beta(=\beta)} = 1+\operatorname{tg}^2\alpha;\ \text{in Worten:}$$

$$\frac{\text{Tangente}-\text{Tangente}}{\text{Bogen}-\text{Bogen (für Bogen}=\text{Bogen)}} = 1+\text{Tangentenquadrat.}$$

Mithin auch, wenn die zweite Bezeichnungsweise eingeführt wird:

$$\frac{x-y}{\operatorname{artg} x-\operatorname{artg} y\ (\operatorname{artg} x=\operatorname{artg} y)} = 1+x^2,$$

$$\text{und}\quad \frac{\operatorname{artg} x-\operatorname{artg} y}{x-y\ (x=y)} = \frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-x^6+\ \ldots\ .$$

3. Diese Beispiele führen nun auf folgende wichtige Reihen:

a) Die Newtonsche Reihe.

(1) $(1+x)^m = 1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\ \ldots$, worin A, B etc. vorläufig vollständig unbekannte Koeffizienten sind.

(2) $(1+y)^m = 1+Ay+By^2+Cy^2+Dy^4+\ \ldots\ .$

$$\frac{(1+x)^m-(1+y)^m}{(1+x)-(1+y)} = A+B(x+y)+C(x^2+xy+y^2)+D(x^3+x^2y+xy^2+y^3)+\ \ldots\ .$$

wobei die rechte Seite durch $(x-y)$ dividiert ist, was ja gleich $(1+x)-(1+y)$ ist.

Diese Gleichung geht für $(1+x)=(1+y)$ oder für $(x=y)$ über in

(3) $\left.\begin{matrix} d(1+x)^m \\ \text{oder}\ m(1+x)^{m-1} \end{matrix}\right\} = A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+\ \ldots\ .;$

(4) $$\frac{m(1+x)^m}{1+x} = A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+\ \ldots\ .$$

(5) $$m(1+x)^m = A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+\ \ldots\ .$$
$$+\ Ax\ +2Bx^2+3Cx^3+\ \ldots\ .$$

(6) Aus (1) gewinnt man:

$$m(1+x)^m = m+Amx+Bmx^2+Cmx^3+\ \ldots$$

(6) minus (5) gibt:

$$o=(m-A)+x(A(m-1)-2B)+x^2(B(m-2)-3C)+x^3(C(m-3)-4D)+\ \ldots$$

Diese Reihe kann, da x von Null verschieden ist, nur dann gleich Null sein, wenn je Hauptklammer gleich Null ist.

Mithin:

$$A=m;\quad 2B=m(m-1);\quad 3C=\frac{m(m-1)(m-2)}{2!};\quad 4D=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{3!}$$

$$B=\binom{m}{2}\qquad C=\binom{m}{3}\qquad D=\binom{m}{4}\text{ etc.}$$

Diese Werte werden in (1) eingesetzt:

$$(1+x)^m=1+mx+\binom{m}{2}x^2+\binom{m}{3}x^3+\ldots\ldots$$

Diese Reihe gilt nun ohne weiteres auch für gebrochenes und negatives m, da d Beweis schon im Beispiel (a) (b) (c) geführt wurde.

b) Die logarithmische Reihe.

$$d\,ln(1+x)=x^0-x^1+x^2-x^3+x^4\ldots\ldots$$

und durch Integration:

$$ln(1+x)=\frac{x^1}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\ldots$$

Anm. Übergang vom natürlichen zum Brigghschen Logarithmus:

$$10^{\log a}=a$$
$$\log a.ln\ 10=ln\,a;$$
$$\log a=\frac{ln\,a}{ln\ 10}$$

c) Die Sinusreihe.

$\sin x$ soll in ungerade Potenzen von x entwickelt werden:

(1) $\sin x=Ax+Bx^3+Cx^5+Dx^7+\ldots\ldots$

(2) $\cos x=A+3Bx^2+5Cx^4+7Dx^6+\ldots\ldots$

(3) $-\sin x=2.3Bx+4.5Cx^3+6.7Dx^5\ldots\ldots$ (Durch nochmaliges Differenzieren.)

(4) $o=x(2.3.B+A)+x^3(4.5C+B)+x^5(6.7D+C)+\ldots\ldots$ Durch Addition v (1) und (3).

Aus (2) folgt aber, dass $A=1$ ist, sonst wäre die Gleichung für $x=o$ nicht erfüllt.

Aus (4) folgt weiter:

$$B=-\frac{1}{2.3};\quad C=+\frac{1}{2.3.4.5};\quad D=-\frac{1}{2.3.4.5.6.7}\text{ etc.}$$

Diese Werte in (1) eingesetzt, gibt:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\ldots$$

d) Die Kosinusreihe. Sie entsteht aus der vorigen Reihe durch beiderseitige Differenzieren.

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\ldots$$

e) Die Leibnizsche Reihe.

$$d\,\mathrm{arctg}\,x=x^0-x^2+x^4-x^6+x^8-\ldots\ldots$$

nd durch Integration:

$$\operatorname{artg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots .$$

Der Bogen, der zur Tangente 1 gehört, $\frac{2\pi}{8} = 1 - {}^1/_3 + {}^1/_5 - {}^1/_7 + \ldots$

$$\pi = 4(1 - {}^1/_3 + {}^1/_5 - {}^1/_7 + \ldots .)$$

4. Maxima und Minima.

ax^3+bx^2+cx+d sei die zu untersuchende Funktion.
am^3+bm^2+cm+d sei ihr Max. oder Min., dann ist
$a(m-\delta)^3+b(m-\delta)^2+c(m-\delta)+d$ der dem Max. oder Min. unmittelbar vorhergehende ert, falls δ sehr klein angenommen wird; und
$a(m+\delta)^3+b(m+\delta)^2+c(m+\delta)+d$ der dem Max. oder Min. unmittelbar folgende Wert. — Diese beiden Werte können gleich gesetzt werden; aus dieser Gleichung folgt dann:
$6am^2\delta+2a\delta^3+2bm\delta+2c\delta=o$
$3am^2+2bm+c=-a\delta^2=o$, da δ ja unendlich klein angenommen ist. Die linke Seite ser Gleichung erhält man aber, wenn man in $df(x)$ $x=m$ setzt. —

5. Die reellen Wurzeln der kubischen Gleichung (Anhang).

Setzt man in der allgemeinen Form

$$x^3 \pm ax^2 + bx = \pm c$$

$x = y \mp a/3$; so erhält man die reduzierte Form

$$y^3 \pm py = \pm q$$

Setzt man noch $y = z\sqrt{\frac{p}{3}}$

erhält man als Normalform

$$\frac{z^3 p \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot \sqrt{3}} \pm \frac{pz \cdot \sqrt{p}}{\sqrt{3}} = \pm q$$

$$z^3 \pm 3z = \pm q \frac{3\sqrt{3}}{p\sqrt{p}} = \pm 2m$$

Für die folgende Rechnung empfiehlt es sich, die rechte Seite auf alle Fälle positiv zu alten;
Falle $z^3 \pm 3z = -2m$, rechne man daher

$$-z^3 \mp 3z = 2m$$

$$(-z)^3 \pm 3(-z) = 2m$$

lass als endgültige Normalform zu betrachten ist:

$$(\pm z)^3 \pm 3(\pm z) = 2m.$$

1. Fall $z^3+3z=2m$

$$z=u-\frac{1}{u};\quad z^3=u^3-\frac{1}{u^3}-3\overbrace{\left(u-\frac{1}{u}\right)}^{z}$$

$$u^3-\frac{1}{u^3}=2m$$

$$u^3+\frac{1}{u^3}=2t$$

$$u^3=t+m;\quad u=\sqrt[3]{t+m}$$

$$\frac{1}{u^3}=t-m$$

$$1=t^2-m^2;$$

$$t=\sqrt{1+m^2}$$

Für die Ausrechnung empfiehlt sich folgendes Schema:

$\log(t+m)$	=		
$\log u$	=		; $u=$
$\log 1$	=		
$-\log u$	=		
$\log\frac{1}{u}$	=	$\frac{1}{u}=$	
		$z=$	

2. Fall $z^3-3z=2m$

$$z=u+\frac{1}{u};\quad z^3=u^3+\frac{1}{u^3}+3\overbrace{\left(u+\frac{1}{u}\right)}^{z}$$

$$u^3+\frac{1}{u^3}=2m$$

$$u^3-\frac{1}{u^3}=2t$$

$$u^3=m+t;\quad u=\sqrt[3]{t+m}$$

$$\frac{1}{u^3}=m-t$$

$$1=m^2-t^2$$

$$t=\sqrt{m^2-1}$$

Die Gleichung $t=\sqrt{m^2-1}$ führt auf den sogenannten conus irreducibilis, wenn m ei echter Bruch ist; dieser Fall wird nun leicht folgendermassen gelöst:

$$z^3-3z=2m$$

man setze: $m=\cos 3\varphi=4\cos^3\varphi-3\cos\varphi$

$$z^3-3z=2(4\cos^3\varphi-3\cos\varphi)$$

$$z(z^2-3)=2\cos\varphi(4\cos^2\varphi-3)$$

woraus ohne weiteres ersichtlich, dass

$$z_1=2\cos\varphi.$$

Sind z_1, z_2, z_3 die 3 Lösungen der gegebenen Gleichung $z^3-oz^2-3z-2m=o$; so muss sich diese Gleichung auf die Form bringen lassen:

$$(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)=o.$$

Mithin:

$$z^3-z^2(z_1+z_2+z_3)+z(z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3)-z_1z_2z_3=z^3-oz^2-3z-2m$$

woraus folgt:

(1) $z_1+z_2+z_3=o$

(2) $z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3=-3.$

Daraus findet man leicht, da $z_1=2\cos\alpha$ schon gefunden ist,

$$\left.\begin{matrix}z_2\\z_3\end{matrix}\right\}=-2\cos(\varphi^0\pm 60^0).$$

Aus dem LXXXVI. Bande der Sitzb. der k. Akad. der Wissensch. II. Abth. Nov.-Heft. Jahrg. 1882.

Über Ableitung neuer unendlicher Reihen aus einer gegebenen durch Umstellung der Vorzeichen nach einem bestimmten Gesetze.

Von **Reinhard Mildner**,
Professor der Landes - Unterrealschule in Römerstadt.

(Vorgelegt in der Sitzung am 2. November 1882.)

Professor Unferdinger hat im LV. Bande (II. Abtheilung) er Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften Jahrgang 1867, mathem.-naturwissenschaftl. Classe) aus der ogarithmenreihe, Arcus-Tangensreihe, ferner im nächsten Bande us der Reihe für e^x, $\sin x$ und $\cos x$ neue Reihen abgeleitet, in elchen abgeleiteten Reihen n positive Glieder der gegebenen eihen mit n negativen Gliedern abwechseln. Es waren die spe- ellen Eigenschaften der Differentialquotienten der speciellen ɔgeleiteten Reihen, durch welche die Möglichkeit geboten war, e in den Sitzungsberichten verzeichneten Resultate im Wege r Integralrechnung zu finden. Durch diese Arbeiten angeregt, ıbe ich mir die allgemeine Lösung dieses Problems vorgelegt. imlich: Aus dem gegebenen Werthe einer unendlichen Reihe, n Werth einer neuen Reihe mit k abwechselnd-positiven und k gativen Gliedern der ursprünglichen Reihe zu ermitteln. Also geben:

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots .$$

Man bestimme aus $f(x)$ jene Function von x, welche die chstehende Reihe repräsentirt:

$$\varphi(x) = [A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{k-1} x^{k-1}] - [A_k x^k + A_{k+1} x^{k+1} + \ldots + A_{2k-1} x^{2k-1}] + [A_{2k} x^{2k} + \ldots + A_{3k-1} x^{3k-1}] - \ldots$$

Mit der Lösung dieses Problems befasst sich die vorliegende beit, wobei ich nicht unterlassen konnte, als specielle Beispiele

die wichtigsten Reihen der Analysis auf diesem Wege zu handeln.

Der von mir eingeschlagene Gedankengang ist folgender

Es sei für alle x, welche der Relation entsprechen:

$$-a<x<+a$$

der Werth der unendlichen Reihe:

$$A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots+A_kx^k+\ldots=f(x)$$

gegeben, so ist bekanntlich für $[x]<a$.

$$A_0+A_kx^k+A_{2k}x^{2k}+A_{3k}x^{3k}+\ldots=\frac{1}{k}\sum_{g=0}^{g=k-1}f(x\lambda^g),$$

wobei $e^{\frac{2\pi i}{k}}=\lambda$ zur Abkürzung gesetzt wurde.

Es sei ferner:

$$F(x)=A_nx^n+A_{n+1}x^{n+1}+A_{n+2}x^{n+2}+\ldots=$$
$$=f(x)-(A_0+A_1x+\ldots+A_{n-1}x^{n-1});$$

dann ist:

$$\frac{F(x)}{x^n}=A_n+A_{n+1}x+A_{n+2}x^2+\ldots=$$
$$=\frac{f(x)-(A_0+A_1x+\ldots A_{n-1}x^{n-1})}{x^n}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man nach 2)

$$A_n+A_{n+k}x^k+A_{n+2k}x^{2k}+\ldots=\frac{1}{k}\sum_{g=0}^{g=k-1}\frac{F(x\lambda^g)}{x^n\lambda^{ng}}$$

oder:

$$A_nx^n+A_{n+k}x^{n+k}+A_{n+2k}x^{n+2k}+\ldots=\frac{1}{k}\sum_{g=0}^{g=k-1}\frac{F(x\lambda^g)}{\lambda^{ng}}=$$

$$=\frac{1}{k}\sum_{g=0}^{g=k-1}\frac{f(x\lambda^g)-[A_0+A_1x\lambda^g+A_2x^2\lambda^{2g}+\ldots+A_{n-1}x^{n-1}\lambda^{(n-}}{\lambda^{ng}}$$

Die einzelnen Theile des Subtrahenden haben die allgeme Form:

$$\sum_{g=0}^{g=k-1} \frac{A_r x^r \lambda^{rg}}{\lambda^{ng}} = A_r x^r \sum_{g=0}^{g=k-1} \lambda^{(r-n)g} = A_r x^r \sum_{g=0}^{g=k-1} \lambda^{pg};$$

wobei p eine ganze Zahl vorstellt:

$$= A_r . x^r . (1+\lambda^p+\lambda^{2p}+\ldots+\lambda^{(k-1).p}) = A_r . x^r . \frac{1-\lambda^{kp}}{1-\lambda^p}$$

$$= A_r x^r . \frac{1-(\lambda^k)^p}{1-\lambda^p} = 0$$

weil der Zähler Null und der Nenner von der Null verschieden ist.

Da die einzelnen Theile des Subtrahenden verschwinden, so geht die Gleichung 3) über in:

$$A_n x^n + A_{n+k} x^{n+k} + A_{n+2k} x^{n+2k} + \ldots = \frac{1}{k} \sum_{g=0}^{g=k-1} \frac{f(x\lambda^g)}{\lambda^{ng}} \qquad 4)$$

richtig für $[x] < a$ und alle positiv ganzen n und k.

Setzt man in 4) $-x$ statt x, so ist für gerade n und ungerade k

$$A_n x^n - A_{n+k} x^{n+k} + A_{n+2k} x^{n+2k} - \ldots = \frac{1}{k} \sum_{g=0}^{g=k-1} \frac{f(-x\lambda^g)}{\lambda^{ng}} \qquad 5)$$

und für ungerade n und ungerade k geht Gleichung 4) über in:

$$A_n x^n - A_{n+k} x^{n+k} + A_{n+2k} x^{n+2k} - \ldots = -\frac{1}{k} \sum_{g=0}^{g=k-1} \frac{f(-x\lambda^g)}{\lambda^{ng}}; \qquad 6)$$

so gibt 5) und 6) vereinigt für alle n und ungeraden k:

$$A_n x^n - A_{n+k} x^{n+k} + A_{n+2k} x^{n+2k} - A_{n+3k} x^{n+3k} + \ldots =$$

$$= (-1)^n \frac{1}{k} \sum_{g=0}^{g=k-1} \frac{f(-x\lambda^g)}{\lambda^{ng}} \qquad 7)$$

. . . . . .

Nicht schwer ist es, ähnliche Ausdrücke für die Reihe 7) zu erhalten, wenn k gerade ist. Man substituire dann in Reihe 4)

statt x, $x\lambda^{1/2}$, so erhält man, da λ^k in $e^{\pi i}$ übergeht:

$$A_n x^n \lambda^{\frac{n}{2}} + A_{n+k} x^{n+k} \lambda^{\frac{n}{2}} \cdot e^{\pi i} + A_{n+2k} \pi^{n+2k} \cdot \lambda^{\frac{n}{2}} \cdot e^{2\pi i} + \ldots =$$
$$= \frac{1}{k} \sum_{g=0}^{g=k-1} \frac{f[x\lambda^{\frac{2g+1}{2}}]}{\lambda^{ng}}$$

und wenn man diese Gleichung durch $\lambda^{\frac{n}{2}}$ dividirt und beacht dass $e^{g\pi i} = (-1)^g$ ist, so ergibt sich:

$$A_n x^n - A_{n+k} x^{n+k} + A_{n+2k} x^{n+2k} - \ldots = \frac{1}{k} \sum_{g=0}^{g=k-1} \frac{f(x\lambda^{\frac{2g+1}{2}})}{\lambda^{\frac{2g+1}{2}} \cdot n}$$

. . . . . .

Im Übrigen behält die Gleichung 8) auch für ungerade ihre volle Giltigkeit.

Setzt man in Gleichung 7) für n der Reihe nach die Zahl 0, 1, 2, ... bis $k-1$, so gibt dies für ungerade $k=2r+1$ f gende k Gleichungen:

$$A_0 - A_k x^k + A_{2k} x^{2k} - A_{3k} x^{3k} + \ldots = \frac{1}{k} \sum_{g=0}^{g=k-1} f(-x\lambda^g)$$

$$A_1 x - A_{k+1} x^{k+1} + A_{2k+1} x^{2k+1} - A_{3k+1} x^{3k+1} + \ldots =$$
$$= -\frac{1}{k} \sum_{g=0}^{g=k-1} \lambda^{-g} f(-x\lambda^g)$$

$$A_2 x^2 - A_{k+2} x^{k+2} + A_{2k+2} x^{2k+2} - A_{3k+2} x^{3k+2} + \ldots =$$
$$= \frac{1}{k} \sum_{g=0}^{g=k-1} \lambda^{-2g} f(-x\lambda^g)$$

. . . . . .

$$A_{k-1} x^{k-1} - A_{2k-1} x^{2k-1} + A_{3k-1} x^{3k-1} - A_{4k-1} x^{4k-1} + \ldots =$$
$$= \frac{1}{k} \sum_{g=0}^{g=k-1} \lambda^{-(k-1)g} f(-x\lambda^g)$$

Alles addirt gibt:

$$(A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_{k-1}x^{k-1})-$$
$$-(A_kx^k+A_{k+1}x^{k+1}+\ldots+A_{2k-1}x^{2k-1})+$$
$$+(A_{2k}x^{2k}+A_{2k+1}x_{2k+1}+\ldots+A_{3k-1}x^{3k-1})-\ldots=R \quad 9)$$
$$=\frac{1}{k}\sum_{g=0}^{g=k-1} f(-x\lambda^g)\ \{1-\lambda^{-g}+\lambda^{-2g}-\lambda^{-3g}+\ldots+\lambda^{-(k-1)g}\}$$
$$=\frac{1}{k}\sum_{g=0}^{g=k-1} f(-x\lambda^g).\sigma_g,$$

obei zur Abkürzung:

$$\sigma_g=1-\lambda^{-g}+\lambda^{-2g}-\lambda^{-3g}+\ldots+\lambda^{-(k-1)g}$$

setzt wurde.

$$\sigma_g=\frac{1+\lambda^{-kg}}{1+\lambda^{-g}}=\frac{1+e^{-2g\pi i}}{1+e^{\frac{-2g\pi i}{k}}}=\frac{1+\cos 2g\pi-i\sin 2g\pi}{1+e^{\frac{-2g\pi i}{k}}}=$$
$$+\frac{2}{1+e^{\frac{-2g\pi i}{k}}}=\frac{2e^{\frac{g\pi i}{k}}}{e^{\frac{g\pi i}{k}}+e^{\frac{-g\pi i}{k}}}=\frac{\cos\frac{g\pi}{k}+i\sin\frac{g\pi}{k}}{\cos\frac{g\pi}{k}}$$
$$=1+i\,\mathrm{tg}\,\frac{g\pi}{k}$$

Dies berücksichtigend liefert die Gleichung 9) das einfache sultat:

$$R=\frac{1}{k}\sum_{g=0}^{g=k-1}(1+i\,\mathrm{tg}\,\tfrac{g\pi}{k})f(-xe^{\frac{2g\pi i}{k}}), \qquad 1)$$

. . . . . .

nn man für λ den Werth einsetzt.

Substituirt man in Gleichung 7) für n der Reihe nach die hlen 1, 2, ... bis k, so entstehen folgende k Gleichungen:

$$A_1x-A_{k+1}x^{k+1}+A_{2k+1}x^{2k+1}-\ldots=-\frac{1}{k}\sum_{g=0}^{g=k-1}\lambda^{-g}f(-x\lambda^g)$$

$$A_2x^2-A_{k+2}x^{k+2}+A_{2k+2}x^{2k+2}-\ldots=\frac{1}{k}\sum_{g=0}^{g=k-1}\lambda^{-2g}f(-x\lambda^g)$$

$$A_3x^3 - A_{k+3}x^{k+3} + A_{k2+3}x^{2\ +3} - \ldots = -\frac{1}{k}\sum_{g=0}^{g=k-1} \lambda^{-3g} f(-x\lambda^g)$$

. . . . . .

$$A_kx^k - A_{2k}x^{2k} + A_{3k}x^{3k} - \ldots = -\frac{1}{k}\sum_{g=0}^{g=k-1} \lambda^{-kg} f(-x\lambda^g)$$

Diese k Gleichungen addirt, geben:

$$(A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_{k-1}x^{k-1} + A_kx^k) -$$
$$-(A_{k+1}x^{k+1} + A_{k+2}x^{k+2} + \ldots + A_{2k}x^{2k}) +$$
$$+(A_{2k+1}x^{2k+1} + A_{2k+2}x^{2k+2} + \ldots + A_{3k}x^{3k}) - \ldots\ldots = R' \qquad 10)$$
$$= -\frac{1}{k}\sum_{g=0}^{g=k-1} f(-x\lambda^g)\,[\lambda^{-g} - \lambda^{-2g} + \lambda^{-3g} - \ldots + \lambda^{-kg}]$$

Setzt man der Einfachheit wegen, wie früher:

$$\sigma_g = \lambda^{-g} - \lambda^{-2g} + \lambda^{-3g} - \ldots + \lambda^{-kg}$$

so ist:

$$\sigma_g = \lambda^{-g} \cdot \frac{1+\lambda^{-kg}}{1+\lambda^{-g}} = e^{\frac{-2g\pi i}{k}} \cdot \frac{1+e^{-2g\pi i}}{1+e^{\frac{-2g\pi i}{k}}} = \frac{2e^{\frac{-2g\pi i}{k}}}{1+e^{\frac{-2g\pi i}{k}}} =$$

$$= \frac{2e^{\frac{-g\pi i}{k}}}{e^{\frac{g\pi i}{k}} + e^{\frac{-g\pi i}{k}}} = \frac{\cos\frac{g\pi}{k} - i\sin\frac{g\pi}{k}}{\cos\frac{g\pi}{k}} = 1 - i\,\mathrm{tg}\frac{g\pi}{k}$$

Dies beachtend, geht die Gleichung 10) über in:

$$R' = \frac{1}{k}\sum_{g=0}^{g=k-1} (i\,\mathrm{tg}\frac{g\pi}{k} - 1)\, f(-xe^{\frac{2g\pi i}{k}}) \qquad II)$$

. . . . . .

I) und II) gelten nur für ungerade k.

Um eine allgemeine Formel für alle k zu erhalten, benütze man die Gleichung 8) und setze in dieselbe für n der Reihe nach die Zahlen 0, 1, 2, — bis $k-1$, so findet man folgende Gleichungen:

$$A_{\mathfrak{z}} \quad -A_kx^k + A_{2k}x^{2k} \ldots = \frac{1}{k}\sum_{g=0}^{g=k-1} f(x\lambda^{\frac{2g+1}{2}})$$

$$A_1 x - A_{k+1} x^{k+1} + A_{2k+1} x^{2k+1} - \ldots =$$
$$= \frac{1}{k} \sum_{g=0}^{g=k-1} \lambda^{-\frac{2g+1}{2}} f(x\lambda^{\frac{2g+1}{2}})$$

$$A_2 x^2 - A_{k+2} x^{k+2} + A_{2k+2} x^{2k+2} - \ldots =$$
$$= \frac{1}{k} \sum_{g=0}^{g=k-1} \lambda^{-2\cdot\frac{2g+1}{2}} f(x\lambda^{\frac{2g+1}{2}})$$

. . . . . .

$$A_{k-1} x^{k-1} - A_{2k-1} x^{2k-1} + A_{3k-1} x^{3k-1} - \ldots =$$
$$= \frac{1}{k} \sum_{g=0}^{g=k-1} \lambda^{-(k-1)\cdot\frac{2g+1}{2}} f(x\lambda^{\frac{2g+1}{2}})$$

Alles addirt, gibt:

$$(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{k-1} x^{k-1}) -$$
$$-(A_k x^k + A_{k+1} x^{k+1} + \ldots + A_{2k-1} x^{2k-1}) + \ldots = P \qquad 11)$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{g=0}^{g=k-1} f(x\lambda^{\frac{2g+1}{2}}) \left\{1 + \lambda^{-\frac{2g+1}{2}} + \lambda^{-\frac{2g+1}{2}\cdot 2} + \lambda^{-\frac{2g+1}{2}\cdot(k-1)}\right\}$$

Es sei wieder:

$$\gamma = 1 + \lambda^{-\frac{2g+1}{2}} + \lambda^{-\frac{2g+1}{2}\cdot 2} + \lambda^{-\frac{2g+1}{2}\cdot 3} + \ldots + \lambda^{-\frac{2g+1}{2}\cdot(k-1)}$$

ist die Summe dieser k Glieder

$$\sigma g = \frac{1 - \lambda^{-k\cdot\frac{2g+1}{2}}}{1 - \lambda^{-\frac{2g+1}{2}}} = \frac{1 - e^{-(2g+1)\pi i}}{1 - e^{-\frac{2g+1}{k}\pi i}} =$$

$$= \frac{1 - \cos(2g+1)\pi + i\sin(2g+1)\pi}{1 - e^{-\frac{2g+1}{k}\pi i}} = \frac{2}{1 - e^{-\frac{2g+1}{k}\pi i}} =$$

$$= \frac{2e^{\frac{2g+1}{2k}\pi i}}{e^{\frac{2g+1}{2k}\pi i} - e^{-\frac{2g+1}{2k}\pi i}} = \frac{\cos\frac{2g+1}{2k}\pi + i\sin\frac{2g+1}{2k}\pi}{i\sin\frac{2g+1}{2k}\pi}$$

$$= -i\cot g\frac{2g+1}{2k}\pi + 1;$$

dieser Ausdruck für σg in 11) substituirt, gibt die allgemei giltige Formel:

$$(A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_{k-1}x^{k-1})-$$
$$(A_kx^k+A_{k+1}x^{k+1}+\ldots+A_{2k-1}x^{2k-1})+\ldots \qquad \text{II}$$
$$=\frac{1}{k}\sum_{g=0}^{g=k-1}(1-i\operatorname{cotg}\frac{2g+1}{2k}\pi)f(xe^{\frac{2g+1}{k}\pi i})$$

giltig für alle positiv ganzen k.

. . . . . .

Beginnt man in Gleichung 8) mit $n=1$ zu substituiren, un geht bis $n=k$, so ergeben sich folgende k-Gleichungen:

$$A_1x-A_{k+1}x^{k+1}+A_{2k+1}x^{2k+1}-\ldots=\frac{1}{k}\sum_{g=0}^{g=k-1}\lambda^{-\frac{2g+1}{2}}f(x\lambda^{\frac{2g+1}{2}})$$

$$A_2x^2-A_{k+2}x^{k+2}+A_{2k+2}x^{2k+2}-\ldots=\frac{1}{k}\sum_{g=0}^{g=k-1}\lambda^{-\frac{2g+1}{2}\cdot 2}f(x\lambda^{\frac{2g+1}{2}})$$

. . . . . .

$$A_kx^k-A_{2k}x^{2k}+A_{3k}x^{3k}-\ldots=\frac{1}{k}\sum_{g=0}^{g=k-1}\lambda^{-\frac{2g+1}{2}\cdot k}f(x\lambda^{\frac{2g+1}{2}})$$

Dieses System von Gleichungen durch Addition vereinig liefert:

$$(A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots+A_kx^k)-$$
$$-(A_{k+1}x^{k+1}+A_{k+2}x^{k+2}+\ldots+A_{2k}x^{2k})+\ldots=$$
$$=\frac{1}{k}\sum f(x\lambda^{\frac{2g+1}{2}})\left\{\lambda^{-\frac{2g+1}{2}}+\lambda^{-\frac{2g+1}{2}\cdot 2}+\lambda^{-\frac{2g+1}{2}\cdot 3}+\ldots+\lambda^{-\frac{2g+1}{2}\cdot k}\right.$$

Es sei wieder:

$$\sigma_g=\lambda^{-\frac{2g+1}{2}}+\lambda^{-\frac{2g+1}{2}\cdot 2}+\lambda^{-\frac{2g+1}{2}\cdot 3}+\ldots+\lambda^{-\frac{2g+1}{2}\cdot k}$$

so erhält man als Summe für die Glieder dieser geometrische Progression:

$$\sigma_g=\lambda^{-\frac{2g+1}{2}}\cdot\frac{1-\lambda^{-k\cdot\frac{2g+1}{2}}}{1-\lambda^{-\frac{2g+1}{2}}}=\lambda^{-\frac{2g+1}{2}}\cdot\frac{1-e^{-(2g+1)\pi i}}{1-\lambda^{-\frac{2g+1}{2}}}$$

$$= \lambda^{-\frac{2g+1}{2}} \cdot \frac{2}{1-\lambda^{-\frac{2g+1}{2}}} = \frac{2e^{-\frac{2g+1}{k}\pi i}}{1-e^{-\frac{2g+1}{k}\pi}} = \frac{2e^{-\frac{2g+1}{2k}\pi i}}{e^{\frac{2g+1}{2k}\pi i} - e^{-\frac{2g+1}{2k}\pi i}}$$

$$= \frac{\cos\frac{2g+1}{2k}\pi - i\sin\frac{2g+1}{2k}\pi}{i\sin\frac{2g+1}{2k}\pi} = -i\,\operatorname{cotg}\frac{2g+1}{2k}\pi - 1$$

Dieser Ausdruck in die Gleichung 12) eingesetzt, gibt die r alle positiv ganzen k giltige Formel:

$$(A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots + A_kx^k) -$$
$$-(A_{k+1}x^{k+1} + A_2x^{k+2} + \ldots + A_{2k}x^{2k}) + \ldots = \qquad \text{IV)}$$
$$= -\frac{1}{k}\sum_{g=0}^{g=k-1}(1 + i\,\operatorname{cotg}\tfrac{2g+1}{2k}\pi) f(xe^{\frac{2g+1}{k}\pi i})$$

. . . . . .

Es sind also die Reihen I, II, III und IV ausgewerthet für le x, deren absolute Beträge kleiner sind als a; also für $[x] < a$.

Sind in der Reihe III die Coëfficienten der ungeraden Po- nzen Null, also $A_1 = A_3 = A_5 = \ldots = 0$, und setzt man statt k, $2k$, erhält man die Reihe der geraden Potenzen; dabei erscheinen wechselnd k positive und k negative Glieder der ursprünglichen ihe. Es ist demnach:

$$f(x) = A_0 + A_2x^2 + A_4x^4 + A_6x^6 + \ldots; \; -a < x < +a \text{ und}$$
$$(A_0 + A_2x^2 + A_4x^4 + \ldots + A_{2k-2}x^{2k-2}) -$$
$$-(A_{2k}x^{2k} + A_{2k+2}x^{k+2} + \ldots + A_{4k-2}x^{4k-2}) + \ldots = \qquad \text{V)}$$
$$= \frac{1}{2k}\sum_{g=0}^{g=2k+1}(1 - i\,\operatorname{cotg}\tfrac{2g+1}{4k}\pi) f(xe^{\frac{2g+1}{2k}\pi i});$$

tig für alle positiv ganzen k.

. . . . . .

Ebenso erhält man aus IV, wenn die Coëfficienten aller raden Potenzen verschwinden und wenn $2k$ statt k gesetzt rd aus der Reihe der ungeraden Potenzen das folgende sultat:

$$f(x) = A_1x + A_3x^3 + A_5x^5 + \ldots; \; -a < x < +a$$

$$(A_1x+A_3x^3+\ldots+A_{2k-1}x^{2k-1})-$$

$$-(A_{2k+1}x^{2k+1}+A_{2k+3}x^{2k+3}+\ldots+A_{4k-1}x^{4k-1})+\ldots=\text{VI}$$

$$=-\frac{1}{2k}\sum_{g=0}^{g=2k-1}(1+i\operatorname{cotg}\tfrac{2g+1}{4k}\pi)f(xe^{\frac{2g+1}{2k}\pi i});$$

. . . . . .

ebenfalls für alle positiv ganzen k giltig.

Setzt man in III) $xe^{\varphi i}$ an die Stelle von x, so geht die linke Seite der Gleichung über in $P+Qi$ wobei P und Q folgende unendliche Reihen darstellen:

$$P=[A_0+A_1x\cos\varphi+A_2x^2\cos 2\varphi+\ldots+$$

$$+A_{k-1}x^{k-1}\cos(k-1)\varphi]-$$

$$-[A_kx^k\cos k\varphi+A_{k+1}x^{k+1}\cos(k+1)\varphi+\ldots+$$

$$+A_{2k-1}x^{2k-1}\cos(2k-1)\varphi]+\ldots$$

$$Q=[A_1x\sin\varphi+A_2x^2\sin 2\varphi+\ldots+A_{k-1}x^{k-1}\sin(n-1)\varphi]-$$

$$-[A_kx^k\sin k\varphi+A_{k+1}x^{k+1}\sin(k+1)\varphi+\ldots+$$

$$+A_{2k-1}x^{2k-1}\sin(2k-1)\varphi]+\ldots$$

so ist:

$$P+Qi=\frac{1}{k}\sum_{g=0}^{g=k-1}(1-i\operatorname{cotg}\tfrac{2g+1}{2k}\pi)f[xe^{(\varphi+\frac{2g+1}{k}\pi)i}] \qquad \alpha)$$

Zerlegt man nun $f[xe^{(\varphi+\frac{2g+1}{k}\pi)i}]$ in seinen reellen Bestandtheil $\omega(g)$ und in den imaginären $i\psi(g)$, so gibt α):

$$P+Qi=\frac{1}{k}\sum_{g=0}^{g=k-1}(1-i\operatorname{cotg}\tfrac{2g+1}{2k}\pi)\,[\omega(g)+i\psi(g)]$$

und es ist dann:

$$\sum_{r=0}^{r=k-1}A_rx^r\cos r\varphi-\sum_{r=k}^{r=2k-1}A_rx^r\cos r\varphi+\sum_{r=2k}^{r=3k-1}A_rx^r\cos r\varphi-\ldots=$$

VII)
$$=\frac{1}{k}\sum_{g=0}^{g=k-1}[\omega(g)+\operatorname{cotg}\tfrac{2g+1}{2k}\pi\,\psi(g)]$$

$$\sum_{r=0}^{r=k-1} A_r x^r \sin r\varphi - \sum_{r=k}^{r=2k-1} A_r x^r \sin r\varphi + \sum_{r=2k}^{r=3k-1} A_r x^r \sin r\varphi - \ldots =$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{g=0}^{g=k-1} \left[\psi(g) - \operatorname{cotg} \frac{2g+1}{2k} \pi\omega(g)\right] \qquad \text{VIII)}$$

. . . . . .

$g)$ und $\psi(g)$ sind durch die Gleichung bestimmt:

$$f[xe^{(\varphi+\frac{2g+1}{k}\pi)i}[= \omega(g) + i\psi(g) \qquad \beta)$$

. . . . . .

Durch dasselbe Verfahren erhält man aus Gleichung IV):

$$\sum_{r=1}^{r=k} A_r x^r \cos r\varphi - \sum_{r=k+1}^{r=2k} A_r x^r \cos r\varphi + \sum_{r=2k+1}^{r=3k} A_r x^r \cos r\varphi - \ldots =$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{g=0}^{g=k-1} \left[\operatorname{cotg} \frac{2g+1}{2k} \pi\psi(g) - \omega(g)\right] \qquad \text{IX)}$$

. . . . . .

$$\sum_{=1}^{=k} A_r x^r \sin r\varphi - \sum_{r=k+1}^{r=2k} A_r x^r \sin r\varphi + \sum_{r=2k+1}^{r=3k} A_r x^r \sin r\varphi - \ldots =$$

$$= -\frac{1}{k} \sum_{g=0}^{g=k-1} \left[\psi(g) + \operatorname{cotg} \frac{2g+1}{2k} \pi\omega(g)\right], \qquad \text{X)}$$

. . . . . .

bei $\omega(g)$ und $\psi(g)$ ebenfalls durch die Gleichung $\beta)$ gegeben
d, also ganz einfach aus der Function $f(x)$ abgeleitet werden
nen. Die letzten vier Gleichungen sind ebenfalls für alle
itiv ganzen k giltig, wenn $[x] < a$ ist.

Ähnlich lassen sich die Gleichungen V und VI behandeln.

Als interessante Beispiele will ich die wichtigsten Reihen
Analysis behandeln.

1. Beispiel.

Es sei:

$$f(x) = -l(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots; \quad -1 \leqq x < +1$$

so ist nach I für ungerade k

$$\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^k}{k}\right) - \left(\frac{x^{k+1}}{k+1} + \frac{x^{k+2}}{k+2} + \ldots + \frac{x^{2k}}{2k}\right) +$$

$$+ \left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \ldots + \frac{x^{3k}}{3k}\right) - \ldots = \qquad \delta)$$

$$= R = -\frac{1}{k} \sum_{g=0}^{g=k-1} (i \operatorname{tg} \frac{g\pi}{k} - 1)\, l(1 + x e^{\frac{2g\pi i}{k}}).$$

Es ist

$$l(1 + x e^{\frac{2g\pi i}{k}}) = l(1 + x \cos \frac{2g\pi}{k} + ix \sin \frac{2g\pi}{k}) =$$

$$= \frac{1}{2}\, l(1 + 2x \cos \frac{2g\pi}{k} + x^2) + i \operatorname{arc\,tg} \frac{x \sin \frac{2g\pi}{k}}{1 + x \cos \frac{2g\pi}{k}}.$$

Substituirt man diesen Werth in δ) und vereinigt die reellen und imaginären Bestandtheile, so ist:

$$R = \frac{1}{k}\, l(1+x) + \frac{1}{k} \sum_{g=1}^{g=k-1} \varphi(g) + \frac{1}{k} \cdot i \sum_{g=1}^{g=k-1} \Psi(g),$$

wobei $\varphi(g)$ und $\psi(g)$ durch folgende Functionen gegeben sind.

$$\varphi(g) = \operatorname{tg} \frac{g\pi}{k} \operatorname{arc\,tg} \frac{x \sin \frac{2g\pi}{k}}{1 + x \cos \frac{2g\pi}{k}} + \frac{1}{2}\, l(1 + 2x \cos \frac{2g\pi}{k} + x^2)$$

und

$$\psi(g) = \operatorname{arc\,tg} \frac{x \sin \frac{2g\pi}{k}}{1 + x \cos \frac{2g\pi}{k}} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{g\pi}{k}\, l(1 + 2\pi \cos \frac{2g\pi}{k} + x^2).$$

Es ist klar, dass $\sum_{g=1}^{g=k-1} \psi(g)$ Null ist, ich will dies jedoch für

n vorliegenden Fall zeigen. k sei $= 2r+1$, dann ist:

$$\sum_{g=1}^{g=2r}(\varphi)g = \sum_{g=1}^{g=r}[\varphi(g)+\varphi(k-g)] = \sum_{g=1}^{g=\frac{k-1}{2}}[\varphi(g)+\varphi(k-g)]$$

d

$$\sum_{g=1}^{g=2r}\psi(g) = \sum_{g=1}^{g=\frac{k-1}{2}}[\psi(g)+\psi(k-g)].$$

In $\varphi(g)$ und $\psi(g)$ erscheint g in den Functionen $\operatorname{tg}\frac{g\pi}{k}$, $\sin\frac{2g\pi}{k}$ d $\cos\frac{2g\pi}{k}$.

Man setze nun in diese drei Functionen $k-g$ anstatt g, um f $\varphi(k-g)$ und $\psi(k-g)$ zu kommen, also:

$$\operatorname{tg}\frac{k-g}{k}\pi = -\operatorname{tg}\frac{g\pi}{k}$$

$$\sin\frac{2(k-g)\pi}{k} = -\sin\frac{2g\pi}{k} \quad \text{und} \quad \cos\frac{2(k-g)\pi}{k} = \cos\frac{2g\pi}{k}.$$

Dies in $\varphi(k-g)$ und $\psi(k-g)$ eingesetzt, gibt augenscheinlich: $k-g) = \varphi(g)$ und $\psi(k-g) = -\psi(g)$ also ist:

$$\sum_{g=1}^{g=k-1}\varphi(g) = 2\sum_{g=1}^{g=\frac{k-1}{2}}\varphi(g) \quad \text{und} \quad \sum_{g=0}^{g=k-1}\psi(g) = 0,$$

nit:

$$= \frac{1}{k}l(1+x) +$$

$$-\frac{2}{k}\sum_{g=1}^{g=\frac{k-1}{2}}\left[\operatorname{tg}\frac{g\pi}{k}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sin\frac{2g\pi}{k}}{1+x\cos\frac{2g\pi}{k}} + \frac{1}{2}l\left(1+2x\cos\frac{2g\pi}{k}+x^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{k}l(1+x) + \frac{1}{k}l\prod_{g=s}^{g=\frac{k-1}{2}}\left(1+2x\cos\frac{2g\pi}{k}+x^2\right) +$$

$$+\frac{2}{k}\sum_{g=0}^{g=\frac{k-1}{2}}\operatorname{tg}\frac{g\pi}{k}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sin\frac{2g\pi}{k}}{1+x\cos\frac{2g\pi}{k}}.$$

Es ist bekanntlich:

$$1-x^{2r+1} = (1-x) \prod_{g=1}^{g=r} (x^2 - 2x \cos \frac{2g\pi}{2r+1} + 1)$$

oder wenn x mit $-x$ vertauscht und für $2r+1$, k gesetzt wird:

$$1+x^k = (1+x) \prod_{g=1}^{g=\frac{k-1}{2}} (x^2 + 2x \cos \frac{2g\pi}{k} + 1),$$

somit geht vorhergehende Gleichung über in:

$$R = \frac{1}{k} l(1+x^k) + \frac{2}{k} \sum_{g=1}^{g=\frac{k-1}{2}} \operatorname{tg} \frac{g\pi}{k} \operatorname{arc\,tg} \frac{x \sin \frac{2g\pi}{k}}{1+x \cos \frac{2g\pi}{k}};$$

. . . . . .

giltig für ungerade k.

Nach II) ist R für gerade k durch den Ausdruck gegeben

$$R = \frac{1}{k} \sum_{g=0}^{g=k-1} (1+i \operatorname{cotg} \frac{2g+1}{2k} \pi)\, l(1-xe^{\frac{2g+1}{k}\pi i}).$$

Nur ist:

$$l(1-xe^{\frac{2g+1}{k}\pi i}) = l(1-x \cos \frac{2g+1}{k}\pi - ix \sin \frac{2g+1}{k}\pi) =$$

$$= \frac{1}{2} l(1-2x \cos \frac{2g+1}{k}\pi + x^2) - i \operatorname{arc\,tg} \frac{x \sin \frac{2g+1}{k}\pi}{1-x \cos \frac{2g+1}{k}\pi}$$

Also wie früher, wenn man für den Logarithmus hinter dem Summenzeichen seinen Werth einsetzt und das ganze Product in seinen reellen und imaginären Bestandtheil zerlegt:

$$R = \frac{1}{k} \sum_{g=0}^{g=k-1} \varphi(g) + \frac{i}{k} \sum_{g=0}^{g=k-1} \psi(g)$$

obei $\varphi(g)$ und $\psi(g)$ durch die folgenden Ausdrücke dargestellt erden:

$$\varphi(g) = \frac{1}{2} l(1-2x\cos\frac{2g+1}{k}\pi+x^2)+$$

$$+\operatorname{cotg}\frac{2g+1}{2k}\pi \operatorname{arc\,tg}\frac{x\sin\frac{2g+1}{k}\pi}{1-x\cos\frac{2g+1}{k}\pi}$$

d

$$\psi(g(= \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{2g+1}{2k}\pi\, l(1-2x\cos\frac{2g+1}{k}\pi+x^2)-$$

$$-\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sin\frac{2g+1}{k}\pi}{1-x\cos\frac{2g+1}{k}\pi}$$

$k = 2r$ hat man:

$$\sum_{g=0}^{g=2r-1}\varphi(g) = \sum_{g=0}^{g=r-1}\varphi(g) + \sum_{g=2r-1}^{g=r}\varphi(g);$$

nn man in der zweiten Summe die Zahlen in umgekehrter ihenfolge substituirt.

Es ist aber:

$$\sum_{g=2r-1}^{g=r}\varphi(g) = \sum_{g=0}^{g=r-1}\varphi(k-g-1);$$

s berücksichtigend findet man:

$$\sum_{g=0}^{g=2r-1}\varphi(g) = \sum_{g=0}^{g=r-1}[\varphi(g)+\varphi(k-g-1)]$$

gleichen:

$$\sum_{g=0}^{g=2r-1}\psi(g) = \sum_{g=0}^{g=r-1}[\psi(g)+\psi(k-g-1)]$$

In $\varphi(g)$ und $\psi(g)$ erscheinen die Functionen:

$$\operatorname{cotg}\frac{2g+1}{2k}\pi,\quad \cos\frac{2g+1}{k}\pi \text{ und } \sin\frac{2g+1}{k}\pi$$

Setzt man in diese drei Functionen, um auf $\varphi(k-g-1)$ und $\psi(k-g-1)$ zu kommen, für g, $k-g-1$ so ist:

$$\operatorname{cotg}\frac{2(k-g-1)+1}{2k}\pi = -\operatorname{cotg}\frac{2g+1}{2k}\pi$$

$$\cos\frac{2(k-g-1)+1}{k}\pi = \cos\frac{2g+1}{k}\pi \text{ und}$$

$$\sin\frac{2(k-g-1)+1}{k}\pi = -\sin\frac{2g+1}{k}\pi$$

Dies in $\varphi(g)$ und $\psi(g)$ eingesetzt, gibt ohne weitere Rechnung:

$$\varphi(k-g-1) = \varphi(g) \text{ und } \psi(k-g-1) = -\psi(g)$$

daher erhält man:

$$\sum_{g=0}^{g=2r-1}\varphi(g) = 2\sum_{g=0}^{g=r-1}\varphi(g) \text{ und } \sum_{g=0}^{g=2r-1}\psi(g) = 0,$$

somit:

$$R = \frac{2}{k}\sum_{g=0}^{g=\frac{k}{2}-1}\varphi(g)$$

$$R = \frac{2}{k}\sum_{=0}^{g=\frac{k}{2}-1}\left[\frac{1}{2}l(1-2x\cos\frac{2g+1}{k}\pi+x^2)+\right.$$

$$\left.+\operatorname{cotg}\frac{2g+1}{2k}\pi\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sin\frac{2g+1}{k}\pi}{1-x\cos\frac{2g+1}{k}\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{k}l\prod_{g=0}^{g=\frac{k}{2}-1}(1-2x\cos\frac{2g+1}{k}\pi+x^2)+$$

$$+\frac{2}{k}\sum_{g=0}^{g=\frac{k}{2}-1}\operatorname{cotg}\frac{2g+1}{2k}\pi\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sin\frac{2g+1}{k}\pi}{1-x\cos\frac{2g+1}{k}\pi}$$

Nun ist für gerade k:

$$\prod_{g=0}^{g=\frac{k}{2}-1} (1-2x\cos\frac{2g+1}{k}\pi+x^2) = 1+x^k$$

also schliesslich für gerade k:

$$R = \frac{1}{k} l(1+x^k) +$$

$$+\frac{2}{k}\sum_{g=0}^{g=\frac{k}{2}-1} \operatorname{cotg}\frac{2g+1}{2k}\pi \operatorname{arc\,tg}\frac{x\sin\frac{2g+1}{k}\pi}{1-x\cos\frac{2g+1}{k}\pi} \qquad B)$$

Im Übrigen lässt sich das Resultat *A*) auf jenes von *B* zurückführen, was unmittelbar einleuchtend ist, da die Gleichung V allgemein für alle positiv ganzen k giltig ist.

Die Umformung ist einfach, wie hier zu ersehen, folgende:

$$R = \frac{1}{k} l(1+x^k) + \frac{2}{k}\sum_{g=1}^{g=\frac{k-1}{2}} \operatorname{tg}\frac{g\pi}{k} \operatorname{arc\,tg}\frac{x\sin\frac{2g\pi}{k}}{1+x\cos\frac{2g\pi}{k}} \qquad A)$$

$$L = \sum_{g=1}^{g=\frac{k-1}{2}} \operatorname{tg}\frac{g\pi}{k} \operatorname{arc\,tg}\frac{x\sin\frac{2g\pi}{k}}{1+x\cos\frac{2g\pi}{k}} =$$

$$= \sum_{g=\frac{k-1}{2}}^{g=1} \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{g\pi}{k}\right) \operatorname{arc\,tg}\frac{x\sin\left(\pi-\frac{2g\pi}{k}\right)}{1-x\cos\left(\pi-\frac{2g\pi}{k}\right)},$$

wenn man für g bei dieser Summe von $\frac{k-1}{2}$ angefangen in umgekehrter Ordnung substituirt, also:

$$L = \sum_{g=\frac{k-1}{2}}^{g=1} \operatorname{cotg} \frac{k-2g}{2k}\pi \operatorname{arc\,tg} \frac{x \sin \frac{k-2g}{k}\pi}{1-x\cos\frac{k-2g}{k}\pi} =$$

$$L = \sum_{g=0}^{g=\frac{k-1}{2}-1} \operatorname{cotg} \frac{2g+1}{2k}\pi \operatorname{arc\,tg} \frac{x \sin \frac{2g+1}{k}\pi}{1-x\cos\frac{2g+1}{k}\pi}$$

und diese Form stimmt mit der von *B* überein.

Es ist somit allgemein:

$$R = \frac{1}{k} l(1+x^k) + \frac{2}{k}\sum \operatorname{cotg} \frac{2g+1}{2k}\pi \operatorname{arc\,tg} \frac{x \sin \frac{2g+1}{k}\pi}{1-x\cos\frac{2g+1}{k}\pi} C$$

. . . . . .

wobei für gerade k statt g der Reihe nach die Zahlen 0, 1, 2, 3, . . . bis $\frac{k}{2}-1$ einzusetzen sind und für ungerade k ist: $g=0, 1, 2, 3, \ldots$ bis $\frac{k-1}{2}-1$.

Die Resultate von *A)*, *B)* und *C)* sind an die Bedingung gebunden $[x]<1$; im Übrigen gelten sie auch noch für $x=+1$ für welch' letzteren Fall *A)* und *B)* zu nachstehenden Ergebnissen führen:

$$A)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)+\ldots = l$$

$$= \frac{1}{n} l2 + \frac{2}{n} \sum_{g=1}^{g=\frac{n-1}{2}} \operatorname{tg}\frac{g\pi}{n} \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin\frac{2g\pi}{n}}{1+\cos\frac{2g\pi}{u}} =$$

$$= \frac{1}{n} l2 + \frac{2}{n} \sum_{g=1}^{g=\frac{n-1}{2}} \operatorname{tg}\frac{g\pi}{n} \cdot \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{g\pi}{n}\right);$$

also:

$$R' = \frac{1}{n} l2 + \frac{2\pi}{n^2} \sum_{g=1}^{g=\frac{n-1}{2}} g \operatorname{tg}\frac{g\pi}{n}; \qquad D)$$

giltig für ungerade n.

Aus B) ergibt sich durch Einsetzen von $x = 1$ für gerade n

$$R' = \frac{1}{n} l2 + \frac{2}{n} \sum_{g=0}^{g=\frac{n}{2}-1} \operatorname{cotg} \frac{2g+1}{2n}\pi \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin \frac{2g+1}{n}\pi}{1-\cos \frac{2g+1}{n}\pi}$$

$$= \frac{1}{n} l2 + \frac{2}{n} \sum_{g=0}^{g=\frac{n}{2}-1} \operatorname{cotg} \frac{2g+1}{2n}\pi \operatorname{arc\,tg} \left(\operatorname{cotg} \frac{2g+1}{2n}\pi\right)$$

nd weil:

$$\operatorname{arc\,tg} \left(\operatorname{cotg} \frac{2g+1}{2n}\pi\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{2g+1}{2n}\pi = \frac{n-2g-1}{2n}\pi \text{ und}$$

$$\operatorname{cotg} \frac{2g+1}{2n}\pi = \operatorname{tg} \frac{n-2g-1}{2n}\pi,$$

) folgt für R':

$$R' = \frac{1}{n} l2 + \frac{\pi}{n^2} \sum_{g=0}^{g=\frac{n}{2}-1} (n-2g-1) \operatorname{tg} \frac{n-2g-1}{2n}; \qquad E)$$

. . . . . .

Zweites Beispiel.

Es sei

$$f(x) = \frac{1}{2} l \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots; \quad -1 < x < 1,$$

ann ist nach VI):

$$+ \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2k-1}}{2k-1}\Big) - \Big(\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \frac{x^{2k+3}}{2k+3} + \ldots + \frac{x^{4k-1}}{4k-1}\Big) +$$

$$+ \Big(\frac{x^{4k+1}}{4k+1} + \ldots + \frac{x^{6k-1}}{6k-1}\Big) - \ldots = P$$

$$= -\frac{1}{4k} \sum_{g=0}^{g=2k-1} (1 + i \operatorname{cotg} \frac{2g+1}{4k}\pi)\, l \frac{1+xe^{\frac{2g+1}{2k}\pi i}}{1-xe^{\frac{2g+1}{2k}\pi i}}.$$

Nun ist:

$$l(1+xe^{\frac{2g+1}{2k}\pi i}) = l(1+x\cos\frac{2g+1}{2k}\pi+ix\sin\frac{2g+1}{2k}\pi) =$$

$$= \frac{1}{2}l(1+2x\cos\frac{2g+1}{2k}\pi+x^2)+i\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sin\frac{2g+1}{2k}\pi}{1+x\cos\frac{2g+1}{2k}\pi}$$

und ferner

$$l(1-xe^{\frac{2g+1}{2k}\pi i}) = \frac{1}{2}l(1-2x\cos\frac{2g+1}{2k}\pi+x^2)-$$

$$-i\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sin\frac{2g+1}{2k}\pi}{1-x\cos\frac{2g+1}{2k}\pi};$$

daher.

$$l\frac{1+xe^{\frac{2g+1}{2k}\pi i}}{1-xe^{\frac{2g+1}{2k}\pi i}} = \frac{1}{2}l\frac{1+2x\cos\frac{2g+1}{2k}\pi+x^2}{1-2x\cos\frac{2g+1}{2k}\pi+x^2}+$$

$$+i\operatorname{arc\,tg}\frac{2x\sin\frac{2g+1}{2k}\pi}{1-x^2}.$$

Zerlegt man wieder den Ausdruck hinter dem Summe zeichen in seinen reellen und imaginären Bestandtheil $\varphi(g)+i\psi(g$ so ist einleuchtend, dass $\sum_{g=0}^{g=2k-1}\psi(g)$ verschwinden muss und es i nachdem man für den Logarithmus den Werth eingesetzt hat:

$$P = -\frac{1}{4k}\sum_{g=0}^{g=2k-1}\varphi(g),$$

wobei $\varphi(g)$ zur Abkürzung den Ausdruck darstellt:

$$\varphi(g) = \frac{1}{2}l\frac{1+2x\cos\frac{2g+1}{2k}\pi+x^2}{1-2x\cos\frac{2g+1}{2k}\pi+x^2} - \operatorname{cotg}\frac{2g+1}{4k}\pi$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{2x\sin\frac{2g+1}{2k}\pi}{1-x^2}.$$

Es ist, wie im vorigen Beispiel:

$$\sum_{g=0}^{g=2k-1} \varphi(g) = \sum_{g=0}^{g=k-1} [\varphi(g)+\varphi(2k-g-1)]$$

und da $\varphi(2k-g-1) = \varphi(g)$ so folgt

$$\sum_{g=0}^{g=2k-1} \varphi(g) = 2 \sum_{g=0}^{g=k-1} \varphi(g), \text{ somit}$$

$$P = -\frac{1}{4k} \sum_{g=0}^{g=k-1} \left[l \frac{1+2x\cos\frac{2g+1}{2k}\pi+x^2}{1-2x\cos\frac{2g+1}{2k}\pi+x^2} - \right.$$

$$\left. - 2 \operatorname{cetg}\frac{2g+1}{4k}\pi \operatorname{arc\,tg}\frac{2x\sin\frac{2g+1}{2k}\pi}{1-x^2} \right]$$

$$\lambda = \sum_{g=0}^{g=k-1} l \frac{1+2x\cos\frac{2g+1}{2k}\pi+x^2}{1-2x\cos\frac{2g+1}{2k}\pi+x^2} =$$

$$= l \frac{\prod_{g=0}^{g=k-1} (1+2x\cos\frac{2g+1}{2k}\pi+x^2)}{\prod_{g=0}^{g=k-1} (1-2x\cos\frac{2g+1}{2k}\pi+x^2)}.$$

Es ist bekanntlich:

$$x^{2k}+1 = \prod_{g=0}^{g=k-1} (1-2x\cos\frac{2g+1}{2k}\pi+x^2) =$$

$$= \prod_{g=0}^{g=k-1} (1+2x\cos\frac{2g+1}{2k}\pi+x^2),$$

da sich die linke Seite der Gleichung nicht ändert, wenn man $-x$ für x einsetzt. Aus diesem Grunde ist $\lambda = 0$, daher

$$P = \frac{1}{2k} \sum_{g=0}^{g=k-1} \operatorname{cotg}\frac{2g+1}{4k}\pi \operatorname{arc\,tg}\frac{2x\sin\frac{2g+1}{2k}\pi}{1-x^2}; \qquad F)$$

diese Gleichung besteht für $-1 < x \lesseqgtr +1$.

Insbesondere erhält man für $x = 1$:

$$G) \quad \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2k-1}\right)-\left(\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+3}+\ldots+\frac{1}{4k-1}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{4k+1}+\ldots+\frac{1}{6k-1}\right)-\ldots = P'$$

$$= \frac{1}{2k}\sum_{g=0}^{g=k-1} \operatorname{cotg}\frac{2g+1}{4k}\pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4k}\sum_{g=0}^{g=k-1} \operatorname{cotg}\frac{2g+1}{4k}\pi;$$

. . . . . .

Der Ausdruck für P' lässt sich noch vereinfachen. Es sei k gerade:

$$P' = \frac{\pi}{4k}\left[\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4k}+\operatorname{cotg}\frac{3\pi}{4k}+\operatorname{cotg}\frac{5\pi}{4k}+\ldots+\operatorname{cotg}\frac{(2k-3)\pi}{4k}+\right.$$

$$\left.+\operatorname{cotg}\frac{2k-1}{4k}\pi\right].$$

Weil $\operatorname{cotg}\frac{2k-\mu}{4k}\pi = \operatorname{tg}\frac{\mu\pi}{4k}$ ist, so kann man stets zwei Glieder, welche vom ersten und letzten Gliede gleich weit abstehen, mit einander vereinigen, also:

$$\operatorname{cotg}\frac{\mu\pi}{4k}+\operatorname{cotg}\frac{2k-\mu}{4k}\pi = \operatorname{cotg}\frac{\mu\pi}{4k}+\operatorname{tg}\frac{\mu\pi}{4k} = \frac{2}{\sin\frac{\mu\pi}{2k}},$$

folglich geht P' für gerade k über in:

$$G\alpha) \quad P' = \frac{\pi}{2k}\left[\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2k}}+\frac{1}{\sin\frac{3\pi}{2k}}+\ldots+\frac{1}{\sin\frac{k-1}{2k}\pi}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2k}\sum_{g=0}^{g=\frac{k}{2}-1}\frac{1}{\sin\frac{2g+1}{2k}\pi};$$

für gerade k.

. . . . . .

k sei eine ungerade Zahl, so ist das Mittelglied: $\operatorname{cotg}\frac{k\pi}{4k} = 1$ und man erhält durch dieselbe Zusammenziehung, wie vor, für ungerade k:

$$P' = \frac{\pi}{2k}\left[\frac{1}{2} + \sum_{g=0}^{g=\frac{k-3}{2}} \frac{1}{\sin\frac{2g+1}{2k}\pi}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2k}\left[\frac{1}{2} + \sum_{g=1}^{g=\frac{k-1}{2}} \frac{1}{\sin\frac{2g-1}{2k}\pi}\right] \qquad G\beta)$$

. . . . . .

Für $k = 4$ gibt Gleichung: $G\alpha)$

$$\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \left(\frac{1}{19} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}\right) + \ldots =$$

$$= \frac{\pi}{8}\left[\frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}} + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{8}}\right] = \frac{\pi}{4}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

. . . . . .

und für $k = 5$ geht $G\beta)$ über in:

$$\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{9}\right) - \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \ldots + \frac{1}{19}\right) + \ldots =$$

$$= \frac{\pi}{10}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\sin\frac{\pi}{10}} + \frac{1}{\sin\frac{3\pi}{10}}\right] = \frac{\pi}{\sqrt{5}} + \frac{\pi}{20} = \frac{(1+4\sqrt{5})}{20}\pi$$

. . . . . .

Drittes Beispiel.

Es sei:

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}! + \frac{x^3}{3}! + \ldots;$$

gültig für alle x.

Aus Gleichung III) folgt für alle positiv ganzen k:

$$Q = \left[1 + x + \frac{x^2}{2}! + \ldots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)}!\right] -$$

$$- \left[\frac{x^k}{k}! + \frac{x^{k+1}}{(k+1)}! + \ldots + \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)}!\right] + \ldots =$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{g=0}^{g=k-1} (1 - i \operatorname{cotg} \frac{2g+1}{2k} \pi) \underbrace{e^{x (\cos \frac{2g+1}{k} \pi + i \sin \frac{2g+1}{k} \pi)}}_{\rho_g}.$$

Nun ist ρ_g vollständig entwickelt durch folgende Gleichung gegeben:

$$\rho_g = e^{x \cos \frac{2g+1}{k} \pi} \left[\cos (x \sin \frac{2g+1}{k} \pi) + i \sin (x \sin \frac{2g+1}{k} \pi)\right]$$

Bei der Entwicklung des Productes hinter dem Summenzeichen erhält man durch Trennung des reellen Bestandtheiles $(\varphi)g$ vom imaginären $i\psi(g)$:

$$Q = \frac{1}{k} \sum_{g=0}^{g=k-1} \varphi(g) + \frac{i}{k} \sum_{g=0}^{g=k-1} \psi(g),$$

wobei der letzte Theil verschwinden muss, und $\varphi(g)$ folgenden Werth hat:

$$\varphi(g) = \frac{e^{x \cos \frac{2g+1}{k} \pi}}{\sin \frac{2g+1}{k} \pi} \cdot \sin \left[\frac{2g+1}{2k} \pi + x \sin \frac{2g+1}{k} \pi\right].$$

Von nun an mögen zwei Fälle unterschieden werden:

α) für $k = 2r$ ist, wie vor:

$$\sum_{g=0}^{g=k-1} \varphi(g) = \sum_{g=0}^{g=r-1} [\varphi(g) + \varphi(k-g-1)].$$

Substituirt man abermals, um auf $\varphi(k-g-1)$ zu kommen statt g, $k-g-1$ in

$$\cos \frac{2g+1}{k} \pi, \quad \sin \frac{2g+1}{2k} \pi \quad \text{und in} \quad \sin \frac{2g+1}{k} \pi,$$

Aus dem LXXXVII. Bande der Sitzb. der k. Akad. der Wissensch. II. Abth. März-Heft Jahrg. 1883.

Über Potenzreihen, deren Glieder mit den aufeinanderfolgenden Gliedern einer arithmetischen Reihe r-ten Ranges multiplicirt oder durch letztere dividirt werden.

Von **Reinhard Mildner,**

Professor der Landes-Unterrealschule in Römerstadt.

(Vorgelegt in der Sitzung am 18. Jänner 1883.)

Es sei der Werth der endlichen Potenzreihe

1) $$A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots+A_nx^n=\varphi(x)$$

gegeben.

Man multiplicire die Glieder der Reihe 1) mit den aufeinanderfolgenden Gliedern einer arithmetischen Reihe r-ten Ranges und bestimme den Werth der auf diese Art abgeleiteten neuen Reihe:

$$A_0u_0+A_1u_1x+A_2u_2x^2+\ldots+A_nu_nx^n,$$

wobei $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n$ die besprochenen Glieder der arithmetischen Reihe r-ten Ranges bedeuten mögen. Es sei zunächst:

2) $$f(x,k)=A_0\Delta^k u_0+A_1\Delta^k u_1x+A_2\Delta^k u_2x^2+\ldots+A_n\Delta^k u_nx^n,$$

wobei stellt, wie in der Theorie der arithmetischen Reihen üblich, $\Delta^k u_g$ das $(g+1)$-te Glied der k-ten Differenzreihe von $u_0, u_1, u_2 \ldots u_n$ vor. Consequenter Weise wird die abgeleitete Reihe mit $f(x,0)$ bezeichnet werden müssen, so dass die Gleichung entspringt:

3) $$f(x,0)=A_0u_0+A_1u_1x+A_2u_2x^2+\ldots+A_nu_nx^n.$$

Es ist

$$f(x,r)=\Delta^r u_0\cdot\varphi(x),$$

da die Glieder der r-ten Differenzreihe einander gleich sind, ferner ist:

$$f(x, r-1) = A_0\Delta^{r-1}u_0 + A_1\Delta^{r-1}u_1 x + A_2\Delta^{r-1}u_2 x^2 + \ldots + A_n\Delta^{r-1}u_n x^n.$$

Nun ist aus der Theorie der Differenzreihen bekannt:

$$\Delta^{r-1}u_n = \Delta^{r-1}u_0 + n\Delta^r u_0;$$

dieser Ausdruck in die letzte Gleichung eingesetzt, gibt:

$$f(x, r-1) = \Delta^{r-1}u_0 \cdot \varphi(x) + (A_1 x + 2A_2 x^2 + 3A_3 x^3 + \ldots + nA_n x^n)\Delta^r u_0$$

$$= \Delta^{r-1}u_0 \cdot \varphi(x) + x\varphi'(x);$$

ferner ist:

$$f(x, r-2) = A_0\Delta^{r-2}u_0 + A_1\Delta^{r-2}u_1 x + A_2\Delta^{r-2}u_2 x^2 + \ldots + A_n\Delta^{r-2}u_n x^n$$

und

$$\Delta^{r-2}u_n = \Delta^{r-2}u_0 + \binom{n}{1}\Delta^{r-1}u_0 + \binom{n}{2}\Delta^r u_0.$$

Substituirt man in den Ausdruck für $\Delta^{r-2}u_n$ statt n die aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen 0, 1, 2, 3, ... bis n und entwickelt die einzelnen Glieder, so findet man:

$$f(x, r-2) = \Delta^{r-2}u_0\varphi(x) + \Delta^{r-1}u_0[A_1 x + 2A_2 x^2 + 3A_3 x^3 + \ldots + nA_n x_n] +$$

$$+ \Delta^r u_0 \left[A_2 x^2 + \binom{3}{2} A_3 x^3 + \binom{4}{2} A_4 x^4 + \ldots + \binom{n}{2} A_n x^n\right]$$

$$= \Delta^{r-2}u_0\varphi(x) + \Delta^{r-1}u_0 \cdot x\varphi'(x) + \frac{\Delta^r u_0}{2!} x^2[2A_2 + 2.3A_3 x + 3.4A_4 x^2 + \ldots + (n-1)nA_n x^{n-2}].$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer stellt den zweiten Differentialquotienten von $\varphi(x)$ vor, desswegen ist:

$$f(x, r-2) = \Delta^{r-2}u_0\varphi(x) + \Delta^{r-1}u_0 x\varphi'(x) + \frac{\Delta^r u_0}{2!} x^2 \cdot \varphi''(x).$$

Ähnlich wird $f(x, r-3)$ entwickelt:

$$f(x, r-3) = \Delta^{r-3}u_0 A_0 + A_1\Delta^{r-3}u_1 x + A_2\Delta^{r-3}u_2 x^2 + \ldots + A_n\Delta^{r-3}u_n x^n$$

$$\Delta^{r-3}u_n = \Delta^{r-3}u_0 + \binom{n}{1}\Delta^{r-2}u_0 + \binom{n}{2}\Delta^{r-1}u_0 + \binom{n}{3}\Delta^r u_0.$$

Setzt man in der letzten Gleichung $n = 1, 2, 3, \ldots . n$ und entwickelt mit Benützung des Ausdruckes für $\Delta^{r-3}u_n$ die Coëfficienten der vorletzten Gleichung, so erhält man nach kurzer Rechnung das einfache Resultat:

$$f(x, r-3) = \Delta^{r-3}u_0\varphi(x) + \Delta^{r-2}u_0\varphi'(x)\cdot\frac{x}{1}! + \Delta^{r-1}u_0\cdot\varphi''(x)\frac{x^2}{2}! + \Delta^r u_0\varphi'''(x)\frac{x^3}{3}!$$

Das Gesetz ist nunmehr klar ausgesprochen und ist der Werth der abgeleiteten Reihe durch nachstehende Summe gegeben:

I) $$f(x, 0) = u_0\varphi(x) + \Delta u_0\varphi'(x)\cdot\frac{x}{1!} + \Delta^2 u_0\varphi''(x)\frac{x^2}{2!} + \ldots + \Delta^r u_0\cdot\varphi^{(r)}(x)\frac{x^r}{r!}$$

. . . . . .

oder einfacher geschrieben:

I') $$f(x, 0) = \sum_{k=0}^{k=r}\frac{\Delta^k u_0}{k!}x^k\cdot\frac{d^k\varphi(x)}{dx^k}$$

. . . . . .

Als Beispiel möge die Reihe dienen:

$$\varphi(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}.$$

Man multiplicire die Glieder der geometrischen Progression ler Reihe nach mit

$$0, 1.2, 3.4, 5.6, 7.3 \ldots . (2n-3)(2n-2),$$

so ist:

$$f(x,0) = 1.2x + 3.4x^2 + 5.6x^3 + \ldots + (2n-3)(2n-2)x^{n-1}$$

$$\begin{array}{cccccc} 0, & 2, & 12, & 30, & 56 \\ & 2, & 10, & 18, & 24 \\ & & 8, & 8, & 8 \end{array}$$

Hier ist

$$r = 2, \quad u_0 = 0, \quad \Delta u_0 = 2, \quad \Delta^2 u_0 = 8$$

und

$$\alpha) \qquad f(x,0) = u_0\varphi(x) + \frac{\Delta u_0}{1!}\, x \cdot \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\Delta^2 u_0}{2!}\, x^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2}$$

$$\varphi = \frac{1-x^n}{1-x} \qquad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{(nx-x-n)x^{n-1}+1}{(1-x)^2}.$$

Der zweite Differentialquotient entwickelt, ist durch den Ausdruck gegeben:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{2-(n^2-n)x^{n-2}+(2n^2-4n)x^{n-1}-(n^2-3n+2)x^n}{(1-x)^3}.$$

Diese Werthe in Gleichung α) substituirt, geben schliesslich das Resultat:

$$1.2x + 3.4x^2 + 5.6x^3 + \ldots + (2n-3)(2n-2)x^{n-1} =$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{2x}{(1-x)^3}\{1+3x-x^{n-1}[n(2n-1)-(4n^2-6n-1)x+$$

$$+(2n^2-5n+3)x^2]\}.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Zu demselben Resultate wie in I) gelangt man, wenn die Glieder einer unendlichen Reihe mit den aufeinanderfolgenden Gliedern $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n$ einer arithmetischen Reihe n-ten Ranges multiplicirt werden. Man bezeichne mit $\varphi(x)$ den Werth der gegebenen unendlichen Reihe und mit $f(x,0)$, wie vorher, den Werth der abgeleiteten Reihe, so ist, wenn $\Delta^k u_r$ die frühere Bedeutung hat:

$$1) \qquad \varphi(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots\ldots$$

2) $$f(x,k) = A_0\Delta^k u_0 + A_1\Delta^k u_1 x + A_2\Delta^k u_2 x^2 + \ldots .$$

und

3) $$f(x,0) = A_0 u_0 + A_1 u_1 x + A_2 u_2 x^2 + A_3 u_3 x^3 + \ldots .$$

Die Reihe 1) convergirt für alle x, welche absolut genommen kleiner sind als $\frac{1}{a}$; wobei $a = \left[\lim \frac{A_n}{A_{n-1}}\right]$ also für $[x] < \frac{1}{a}$.

Es lässt sich nun, wie folgt, leicht zeigen, dass die abgeleitete Reihe 2) für alle ganzen k also auch die Reihe 3) für die nämlichen Werthe des x, wie 1) convergirt.

Der Einfachheit halber mögen die Glieder der Reihe 2) mit $U_0, U_1, \ldots U_n$ bezeichnet werden. Dann folgt:

$$\beta) \quad \left[\lim \frac{U_{n+1}}{U_n}\right] = \left[\lim \frac{A_n}{A_{n-1}} \cdot \frac{\Delta^k u_n}{\Delta^k u_{n-1}} \cdot x\right] =$$

$$= [x]\left[\lim \frac{A_n}{A_{n-1}} \cdot \frac{\Delta^k u_n}{\Delta^k u_{n-1}}\right].$$

Nun ist das allgemeine Glied der k-ten Differenzreihe durch den Ausdruck gegeben:

$$\Delta^k u_n = \Delta^k u_0 + \binom{n}{1}\Delta^{k+1} u_0 + \binom{n}{2}\Delta^{k+2} u_0 + \ldots + \binom{n}{r-k}\Delta^r u_0$$

und dessgleichen

$$\Delta^k u_{n-1} = \Delta^k u_0 + \binom{n-1}{1}\Delta^{k+1} u_0 + \binom{n-1}{2}\Delta^{k+2} u_0 + \ldots +$$
$$+ \binom{n-1}{r-k}\Delta^r u_0$$

also folgt durch Division:

$$\frac{\Delta^k u_n}{\Delta^k u_{n-1}} = \frac{\Delta^k u_0 + \binom{n}{1}\Delta^{k+1} u_0 + \binom{n}{2}\Delta^{k+2} u_0 + \ldots + \binom{n}{r-k}\Delta^r u_0}{\Delta^k u_0 + \binom{n-1}{1}\Delta^{k+1} u_0 + \binom{n-1}{2}\Delta^{k+2} u_0 + \ldots + \binom{n-1}{r-k}\Delta^r u_0}.$$

Entwickelt man Zähler und Nenner nach steigenden Potenzen von n, so hat der Quotient die Form:

$$\frac{\Delta^k u_n}{\Delta^k u_{n-1}} = \frac{b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + \ldots + b_{r-k} n^{r-k}}{c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + \ldots + c_{r-k} n^{r-k}}$$

und wenn n unendlich wird, folgt:

$$\lim \frac{\Delta^k u_n}{\Delta^k u_{n-1}} = \frac{b_{r-k}}{c_{r-k}} = 1;$$

weil

$$b_{r-k} = c_{r-k} = \frac{\Delta^r u_0}{(r-k)!}$$

ist.

Aus diesem Grunde geht die Gleichung β) über in:

$$\left[\lim \frac{U_{n+1}}{U_n}\right] = [x] . \left[\lim \frac{A_n}{A_{n-1}}\right] = [x] . a.$$

Es convergiren daher die Reihen 2) und 3) für alle x, welche der Relation entsprechen $[x] . a < 1$, das ist für $[x] < \frac{1}{a}$, wodurch die Behauptung gerechtfertigt erscheint.

Es ist ferner:

$$f(x, r) = \Delta^r u_0 . \varphi(x)$$

und

$$f(x, r-1) = A_0 \Delta^{r-1} u_0 + A_1 \Delta^{r-1} u_1 x + A_2 \Delta^{r-1} u_2 x^2 + \ldots .$$

Entwickelt man $\Delta^{r-1} u_1$, $\Delta^{r-1} u_2$, $\Delta^{r-1} u_3$ u. s. w. nach der bekannten Formel $\Delta^{r-1} u_n = \Delta^{r-1} u_0 + n \Delta^r u_0$ und substituirt die Werthe in den Ausdruck für $f(x, r-1)$, so folgt alsogleich:

$$\begin{aligned} f(x, r-1) &= \Delta^{r-1} u_0 \varphi(x) + \Delta^r u_0 (A_1 x + 2 A_2 x^2 + 3 A_3 x^3 + \ldots .) \\ &= \Delta^{r-1} u_0 . \varphi(x) + \Delta^r u_0 . x \varphi'(x) \\ f(x, r-2) &= A_0 \Delta^{r-2} u_0 + A_1 \Delta^{r-2} u_1 x + A_2 \Delta^{r-2} u_2 . x^2 + \\ &\quad + A_3 \Delta^{r-2} u_3 x^3 + \ldots . ; \end{aligned}$$

dabei hat man wieder:

$$\Delta^{r-2} u_n = \Delta^{r-2} u_0 + \binom{n}{1} \Delta^{r-1} u_0 + \binom{n}{2} \Delta^r u_0$$

Berechnet man die Coëfficienten der letzten Reihe nach der vorangehenden Formel und entwickelt die einzelnen Glieder, so ist:

$$\begin{aligned} f(x, r-2) &= \Delta^{r-2} u_0 . (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots .) + \\ &\quad + \frac{\Delta^{r-1} u_0}{1!} x (A_1 + 2 A_2 x + 3 A_3 x^2 + \ldots .) + \\ &\quad + \frac{\Delta^r u_0}{2!} x^2 (1.2 A_2 + 2.3 A_3 x + 3.4 A_4 x^2 + \ldots .) \end{aligned}$$

$$f(x, r-2) = \Delta^{r-2}u_0\varphi(x) + \frac{\Delta^{r-1}u_0}{1!}x.\varphi'(x) + \frac{\Delta^r u_0}{2!}x^2.\varphi''(x);$$

da die Ausdrücke in den Klammern $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ und $\varphi''(x)$ darstellen.

Ebenso leicht findet man:

$$f(x, r-3) = \Delta^{r-3}u_0\varphi(x) + \frac{\Delta^{r-2}u_0}{1!}x.\varphi'(x) +$$

$$+ \frac{\Delta^{r-1}u_0}{2!}x^2\varphi''(x) + \frac{\Delta^r u_0}{3!}x^3\varphi'''(x).$$

Das Gesetz ist auch hier ebenso klar, wie früher ausgesprochen, und es ist schliesslich:

II) $$f(x, 0) = A_0u_0 + A_1u_1x + A_2u_2x^2 + \ldots. =$$

$$= u_0\varphi(x) + \frac{\Delta u_0}{1!}x\varphi'(x) + \frac{\Delta^2 u_0}{2!}x^2\varphi''(x) + \ldots. +$$

$$+ \frac{\Delta^r u_0}{r!}x^r\varphi^{(r)}(x)$$

oder kürzer:

II') $$f(x, 0) = \sum_{k=0}^{k=r} \frac{\Delta^k u_0}{k!}x^k.\frac{d^k\varphi}{dx^k};$$

. . . . . .

dabei bedeutet $\frac{d^0\varphi}{dx^0}$ die Function $\varphi(x)$ selbst.

Beispiel 1.

Es sei in $\varphi(x)$

$$A_0 = A_1 = A_2 = \ldots. = 1,$$

also:

$$\varphi(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots.; \quad -1 < x < +1,$$

so ist nach II:

$$f(x) = u_0 + u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + \ldots. = \sum_{k=0}^{k=r} \frac{\Delta^k u_0}{k!}x^k\frac{d^k\varphi}{dx^k}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x) &= (1-x)^{-1} \\ \frac{d^k\varphi}{dx^k} &= \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \end{aligned}\right\}$$

dies in die letzte Gleichung substituirt gibt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=r} \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} \cdot \Delta^k u_0 = \frac{1}{1-x} \sum_{k=0}^{k=r} \left(\frac{x}{1-x}\right)^k \Delta^k u_0$$

oder:

$$a) \quad u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \ldots = \\ = \frac{1}{1-x}\left[\left(\frac{x}{1-x}\right)^r \Delta^r u_0 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^{r-1} \Delta^{r-1} u_0 + \ldots\right.$$

. . . . . .

$$\left. + \ldots + \frac{x}{1-x} \cdot \Delta u_0 + u_0\right] = f(x)$$

. . . . . .

dabei muss $-1 < x < +1$ sein.

Es sei beispielsweise:

$$f(x) = 1 + 9x + 25x^2 + 49x^3 + \ldots; \quad -1 < x < +1$$

dann erhält man für die ersten Glieder der aufeinanderfolgenden Differenzreihen:

$$u_0 = 1; \quad \Delta u_0 = 8; \quad \Delta^2 u_0 = 8;$$

daher für $f(x)$ nachstehenden Werth:

$$f(x) = \frac{1 + 6x + 7x^2}{(1-x)^3};$$

. . . . . .

ferner sei noch:

$$f(x) = 1.2.3 + 4.5.6x + 7.8.9x^2 + 10.11.12x^3 + \ldots; \\ -1 < x < +1.$$

Hier ist:

$$u_0 = 6, \quad \Delta u_0 = 114; \quad \Delta^2 u_0 = 270; \quad \Delta^3 u_0 = 162.$$

Nach geschehener Substitution in II) gelangt man zu dem Resultate:

$$f(x) = \frac{6(10x^2 + 16x + 1)}{(1-x)^4}; \quad [x] < 1.$$

Die Gleichung *a*) kann auf die Form gebracht werden:

$$a) \quad f(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \ldots = \\ = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{k=g+1} \left(\frac{x}{1-x}\right)^k \Delta^{k-1} u_0,$$

wenn g den Rang der arithmetischen Reihe $u_0, u_1, u_2, \ldots$ bedeutet.

Setzt man hier in *a*)

$$x = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

so geht die letzte Gleichung über in:

$$b) \quad f(r\cos\vartheta) + if(r\sin\vartheta) = \\ = \frac{1}{r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)} \sum_{k=1}^{k=g+1} \left(\frac{r\cos\vartheta + ir\sin\vartheta}{1 - r\cos\vartheta - ri\sin\vartheta}\right)^k \cdot \Delta^{k-1} u_0$$

$$\frac{r\cos\vartheta + ri\sin\vartheta}{1 - r\cos\vartheta - ri\sin\vartheta} = \frac{(1 - r\cos\vartheta + ir\sin\vartheta)(r\cos\vartheta + ir\sin\vartheta)}{1 - 2r\cos\vartheta + r^2} =$$

$$= \frac{r\cos\vartheta - r^2\cos^2\vartheta - r^2\sin^2\vartheta + i(r\sin\vartheta - r^2\sin\vartheta\cos\vartheta + r^2\sin\vartheta\cos\vartheta}{1 - 2r\cos\vartheta + r^2}$$

$$= \frac{r(\cos\vartheta - r + i\sin\vartheta)}{1 - 2r\cos\vartheta + r^2} = \frac{r}{J} \cdot R(\cos\omega + i\sin\omega);$$

dabei sind die Grössen J, R und ω durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\alpha) \quad J = 1 - 2r\cos\vartheta + r^2$$

$$R = \sqrt{J}$$

$$\beta) \quad \cos\omega = \frac{\cos\vartheta - r}{R}$$

$$\gamma) \quad \sin\omega = \frac{\sin\vartheta}{R}$$

dabei ist: $0 \leqq \omega \leqq 2\pi$.

Substituirt man in *b*) für den Bruch unter dem Summenzeichen den Werth $\frac{r}{\sqrt{J}}(\cos\omega + i\sin\omega)$, so nimmt die Gleichung *b*) die Form an:

$$f(r\cos\vartheta)+if(r\sin\vartheta)=\frac{1}{re^{\vartheta i}}\sum_{k=1}^{k=g+1}\frac{r^k}{\sqrt{J^k}}(\cos k\omega+i\sin k\omega)\Delta^{k-1}u_0$$

$$=\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{k=g+1}\frac{r^k}{\sqrt{J^k}}[\cos(k\omega-\vartheta)+i\sin(k\omega-\vartheta)]\Delta^{k-1}u_0.$$

Daraus folgt unmittelbar:

c) $$f(r\cos\vartheta)=u_0+u_1r\cos\vartheta+u_2r^2\cos 2\vartheta+u_3r^3\cos 3\vartheta+\ldots.=$$

$$=\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{k=g+1}\left(\frac{r}{\sqrt{J}}\right)^k\cos(k\omega-\vartheta)\Delta^{k-1}u_0$$

. . . . . .

d) $$f(r\sin\vartheta)=u_1r\sin\vartheta+u_2r^2\sin 2\vartheta+u_3r^3\sin 3\vartheta+\ldots.=$$

$$=\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{k=g+1}\left(\frac{r}{\sqrt{J}}\right)^k\sin(k\omega-\vartheta)\Delta^{k-1}u_0$$

. . . . . .

J und ω sind durch die Gleichungen α), β) und γ) definirt.

Als specielle Fälle sollen die folgenden bekannten Reihen behandelt werden:

$$f(x\cos\vartheta)=+r\cos\vartheta+2r^2\cos 2\vartheta+3r^3\cos 3\vartheta+\ldots.=$$

$$=\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{k=2}\frac{r^k}{\sqrt{J^k}}\cos(k\omega-\vartheta)\Delta^{k-1}u_0$$

$$f(x\sin\vartheta)=r\sin\vartheta+2r^2\sin 2\vartheta+3r^3\sin 3\vartheta+\ldots.=$$

$$=\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{k=2}\frac{x^k}{\sqrt{J^k}}\sin(k\omega-\vartheta)\Delta^{k-1}u_0.$$

Hier im vorliegenden Falle ist $u_0=0$, $\Delta u_0=1$, daher:

$$f(r\cos\vartheta)=\frac{r}{J}\cos(2\omega-\vartheta)=\frac{r}{J}(\cos 2\omega\cos\vartheta+\sin 2\omega\sin\vartheta)=$$

$$=\frac{r}{J}[(1-2\sin^2\omega)\cos\vartheta+2\sin\omega\cos\omega\sin\vartheta];$$

dabei ist:

$$\cos\omega=\frac{\cos\vartheta-r}{\sqrt{J}}\text{ und }\sin\omega=\frac{\sin\vartheta}{\sqrt{J}};$$

dies beachtend, ist der Werth der letzten Reihe:

$$r\cos\vartheta + 2r^2\cos 2\vartheta + 3r^3\cos 3\vartheta + \ldots = \frac{r[(1+r^2)\cos\vartheta - 2r]}{(1-2r\cos\vartheta+r^2)^2};\quad -1 < r < 1$$

. . . . . .

$$f(r\sin\vartheta) = \frac{r}{J}\sin(2\omega-\vartheta) = \frac{r}{J}(\sin 2\omega\cos\vartheta - \cos 2\omega\sin\vartheta)$$

$$= \frac{r}{J}[2\sin\omega\cos\vartheta\cos\omega - (1-2\sin^2\omega)\sin\vartheta]$$

$$= \frac{r(1-r^2)\sin\vartheta}{(1-2r\cos\vartheta+r^2)^2};$$

also:

$$r\sin\vartheta + 2r^2\sin 2\vartheta + 3r^3\sin 3\vartheta + \ldots = \frac{r(1-r^2)\sin\vartheta}{(1-2r\cos\vartheta+r^2)^2};$$
$$-1 < r < +1.$$

2. Beispiel.

$\varphi(x) = e^x$

$$f(x) = u_0 + \frac{u_1 x}{1!} + \frac{u_2 x^2}{2!} + \frac{u_3 x^3}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{k=r} \frac{\Delta^k u_0}{k!} x^k \cdot \frac{d\varphi^k}{dx^k}$$

$$\frac{d^k\varphi}{dx^k} = e^x;$$

daher folgt:

$$e) \qquad u_0 + \frac{u_1 x}{1!} + \frac{u_2 x^2}{2!} + \frac{u_3 x^3}{3!} + \ldots = e^x \sum_{k=0}^{k=r} \Delta^k u^0 \cdot \frac{x^k}{k!};$$

gültig für alle x.

. . . . . .

Es sei hier beispielsweise:

$$f(x) = \frac{1.2x}{1!} + \frac{3.4x^2}{2!} + \frac{5.6x^3}{3!} + \frac{7.8x^4}{4!} + \ldots;$$

dann hat man nach e);

$$f(x) = e^x \sum_{k=0}^{k=2} \Delta^k u_0 \cdot \frac{x^k}{k!} = e^x \left(u_0 + \Delta u_0 \cdot x + \Delta^2 u_0 \cdot \frac{x^2}{2!}\right)$$

$$\begin{array}{rrrrrll} 0, & 2, & 12, & 30, & 56 & \text{also} & u_0 = 0 \\ & 2, & 10, & 18, & 26 & & \Delta u_0 = 2 \\ & & 8, & 8, & 8 & & \Delta^2 u_0 = 8 \end{array}$$

$$f(x) = 2x(1+2x)e^x.$$

. . . . . .

Setzt man in Gleichung *e*) $x = \rho(\cos\omega + i\sin\omega)$, so geht selbe in die folgende über:

$$f(\rho\cos\omega) + if(\rho\sin\omega) = e^{\rho\cos\omega + i\rho\sin\omega} \sum_{k=0}^{k=r} \frac{\Delta^k u_0}{k!}(\cos k\omega + i\sin k\omega)$$

$$= e^{\rho\cos\omega} \cdot e^{i\rho\sin\omega} \cdot \sum_{k=0}^{k=r} \frac{\Delta^k u_0}{k!} e^{k\omega i}$$

$$= e^{\rho\cos\omega} \sum_{k=0}^{k=r} \frac{\Delta^k u_0}{k!} e^{(k\omega + \rho\sin\omega)i}$$

also ist:

$$f(\rho\cos\omega) = u_0 + \frac{u_1\rho\cos\omega}{1!} + \frac{u_2\rho^2\cos 2\omega}{2!} + \frac{u_3\rho^3\cos 3\omega}{3!} + \ldots. =$$

$$= e^{\rho\cos\omega} \cdot \sum_{k=0}^{k=r} \frac{\Delta^k u_0}{k!} \cos(k\omega + \rho\sin\omega);$$

. . . . . .

und

$$f(\rho\sin\omega) = \frac{u_1\rho\sin\omega}{1!} + \frac{u_2\rho^2\sin 2\omega}{2!} + \frac{u_3\rho^3\sin 3\omega}{3!} + \ldots. =$$

$$= e^{\rho\cos\omega} \sum_{k=0}^{k=r} \frac{\Delta^k u_0}{k!} \sin(k\omega + \rho\sin\omega$$

. . . . . .

3. Beispiel.

Es sei:

$$\varphi(x) = 1 + \binom{\lambda}{1} x + \binom{\lambda}{2} x^2 + \binom{\lambda}{3} x^3 + \ldots. = (1+x)^\lambda;$$

$$-1 < x < +1.$$

$$f(x) = u_0 + \binom{\lambda}{1} u_1 x + \binom{\lambda}{2} + u_2 x^2 \binom{\lambda}{3} u_3 x^3 + \ldots.; \quad -1 < x < 1.$$

Nach II) hat man:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=r} \Delta^k u_0 \cdot \frac{x^k}{k!} \frac{d^k \varphi}{dx^k}$$

$$\frac{d^k \varphi}{dx^k} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots.(\lambda-k+1)(1+x)^{\lambda-k}$$

dies eingesetzt gibt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=r} \Delta^k u_0 \cdot \frac{x^k}{k!} \lambda(\lambda-1)\ldots.(\lambda-k+1) \cdot \frac{(1+x)^\lambda}{(1+x)^k}$$

$$f(x) = (1+x)^\lambda \cdot \sum_{k=0}^{k=r} \binom{\lambda}{k} \Delta^k u_0 \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)^k; \quad -1 < x < +1$$

. . . . . .

Substituirt man für $x \ldots . \rho . e^{\varphi i}$, so geht die linke Seite über in $f(\rho\cos\varphi) + if(\rho\sin\varphi)$ und für den zweiten Theil der Gleichung erhält man:

$$(1+\rho\cos\varphi+i\rho\sin\varphi)^\lambda \sum_{k=0}^{k=r} \binom{\lambda}{k} \Delta^k u_0 \left(\frac{\rho\cos\varphi+i\rho\sin\varphi}{1+\rho\cos\varphi+i\rho\sin\varphi}\right)^k$$

$$\frac{\rho\cos\varphi+i\rho\sin\varphi}{1+\rho\cos\varphi+i\rho\sin\varphi} = \frac{(\rho+\cos\varphi+i\sin\varphi)\rho}{1+2\rho\cos\varphi+\rho^2} =$$

$$= \frac{\rho R}{1+2\rho\cos\varphi+\rho^2}(\cos\omega+i\sin\omega);$$

dabei ist:

$$\left.\begin{aligned} \cos\omega &= \frac{\rho+\cos\varphi}{R} \\ \sin\omega &= \frac{\sin\varphi}{R} \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqq \omega \leqq 2\pi \text{ und } R = \sqrt{1+2\rho\cos\varphi+\rho^2}$$

ebenso soll der Ausdruck vor dem Summenzeichen umgeformt werden:

$$1+\rho\cos\varphi+i\rho\sin\varphi = R'(\cos\vartheta+i\sin\vartheta) = R'e^{\vartheta i};$$

ϑ und R' sind durch die Gleichungen bestimmt:

$$\left.\begin{aligned}\cos\vartheta &= \frac{1+\rho\cos\varphi}{R'}\\ \sin\vartheta &= \frac{\rho\sin\varphi}{R'}\end{aligned}\right\} \quad 0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi \text{ und } R' = \sqrt{1+2\rho\cos\varphi+\rho^2} = R.$$

Dies beachtend, geht die rechte Seite der Gleichung über in:

$$R^\lambda e^{\lambda\vartheta i}\sum_{k=0}^{k=r}\binom{\lambda}{k}\Delta^k u_0\frac{\rho^k}{R^k}\cdot e^{ki\omega} = \sum_{k=0}^{k=r}\binom{\lambda}{k}\Delta^k u_0\frac{\rho^k}{R^{k-\lambda}}e^{(k\omega+\vartheta\lambda)i},$$

woraus folgt:

$$\left.\begin{aligned}f(\rho\cos\varphi) &= \sum_{k=0}^{k=r}\binom{\lambda}{k}\Delta^k u_0\cdot\frac{\rho^k}{R^{k-\lambda}}\cos(k\omega+\vartheta\lambda)\\ f(\rho\sin\beta) &= \sum_{k=r}^{k=r}\binom{\lambda}{k}\Delta^k u_0\frac{\rho^k}{R^{k-\lambda}}\cdot\sin(k\omega+\vartheta\lambda)\end{aligned}\right\}$$

die Werthe für R, ω und ϑ sind durch die obigen Gleichungen bestimmt.

4. Beispiel.

$$\varphi(z) = \frac{\arcsin\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{z}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{z^2}{5}+ \\ +\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{z^3}{7}+\ldots.; \quad -1<z<1$$

$$f(z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2^2z}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{4^2z^2}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{6^2z^3}{7}+\ldots; -1<z<1$$

$$= \frac{2}{3}z+\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{5}z^2+\frac{3.5}{2.4}\cdot\frac{6}{7}z^3+\frac{3.5.7}{2.4.6}\cdot\frac{8}{9}z^4+\ldots.$$

$$0,\quad 4,\quad 16,\quad 36$$
$$4,\quad 12.\quad 20$$
$$8,\quad 8$$

$$f(z) = \frac{z^2}{2!}\Delta^2 u_0\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\frac{z}{1!}\Delta u^0\frac{d\varphi}{dz}+u_0\varphi(z)$$

$$= 4z\left(z\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\frac{d\varphi}{dz}\right) = 4z\frac{d\left(z\frac{d\varphi}{dz}\right)}{dz}$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\sqrt{z} - \sqrt{1-z}\arcsin\sqrt{z}}{2z\sqrt{z}\sqrt{1-z}}$$

$$y = z\frac{d\varphi}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{1-z}} - \frac{\arcsin\sqrt{z}}{2\sqrt{z}}$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{4z}\left[\frac{2z-1}{(1-z)\sqrt{1-z}} + \frac{\arcsin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\right]$$

$$f(z) = \frac{2z-1}{(1-z)\sqrt{1-z}} + \frac{\arcsin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$$

$$\sqrt{z}f(z) = \frac{(2z-1)\sqrt{z}}{(1-z)\sqrt{1-z}} + \arcsin\sqrt{z};$$

setzt man $\sqrt{z} = x$ und addirt beiderseits x, so ist:

$$x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{5}x^5 + \frac{3.5}{2.4}\cdot\frac{6}{7}x^7 + \frac{3\ 5.7}{2.4.6}\cdot\frac{8}{9}x^9 + \ldots =$$

$$= x\left[\frac{2x^2-1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} + 1\right] + \arcsin x;\quad -1 < x < 1.$$

. . . . . .

Setzt man in der Reihe für $\varphi(x)$ allgemein $A_n = \frac{B_n}{u_n}$, so gehen die Reihen für $\varphi(x)$ und $f(x)$ in die folgenden über:

$$m) \qquad \varphi(x) = \frac{B_0}{u_0} + \frac{B_1}{u_1}x + \frac{B_2}{u_2}x^2 + \frac{B_3}{u_3}x^3 + \ldots.$$

$$n) \qquad f(x) = B_0 + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + \ldots. = \sum_{k=0}^{k=r} \frac{\Delta^k u_0}{k!}x^k\frac{d^k\varphi}{dx^k}.$$

Es könnte die umgekehrte Aufgabe vorliegen; gegeben $f(x)$, zu suchen der Werth der Reihe $\varphi(x)$. Es ist einleuchtend, dass $\varphi(x)$ ein bestimmtes particuläres Integral der Differentialgleichung $n)$ darstellt. In vielen Fällen gelingt es die lineare Differentialgleichung von specieller Form durch einen geschlossenen Ausdruck zu integriren. Dann ist die verlangte Reihe $\varphi(x)$ ausgewerthet. Es mögen hier einige Beispiele Platz finden.

1. Beispiel.

$$f(x) = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots .$$

$$\varphi(x) = \frac{B_0}{1.2.3} + \frac{B_1 x}{4.5.6} + \frac{B_2 x^2}{7.8.9} + \frac{B_3 x^3}{10.11.12} + \ldots .$$

6,	120,	504,	1320,	2730	$u_0 = 6$
	114,	384,	816,	1410	$\Delta u_0 = 114$
		270,	432,	594	$\Delta^2 u_0 = 270$
			162,	162	$\Delta^3 u_0 = 162.$

Die Differentialgleichung n) lautet daher, wenn man die Summe entwickelt, folgendermassen:

$$1) \qquad 9x^3 \frac{d^3\varphi}{dx^3} + 45x^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} + 38x \frac{d\varphi}{dx} + 2\varphi = \frac{1}{3} f(x).$$

Ein particuläres Integral der reducirten Differentialgleichung 1) hat die Form x^r und zur Bestimmung von r hat man bekanntermassen die Gleichung:

$$9r(r-1)(r-2) + 45r(r-1) + 38r + 2 = 0$$

oder einfacher:

$$9r^3 + 18r^2 + 11r + 2 = 0$$

und hier sind die Wurzeln der vorliegenden Gleichung:

$$r_1 = -1; \quad r_2 = -\frac{1}{3}; \quad r_3 = -\frac{2}{3}.$$

Das allgemeine Integral der reducirten Differentialgleichung ist demnach durch den Ausdruck gegeben:

$$C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + C_3\varphi_3 = C_1 x^{-1} + C_2 x^{-\frac{1}{3}} + C_3 x^{-\frac{2}{3}}$$

und das allgemeine Integral der Differentialgleichung 1) hat die Form:

$$\varphi = u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2 + u_3\varphi_3,$$

wobei u_1, u_2, u_3 Functionen von x sind und sich durch das Verfahren der Variation der Constanten bestimmen lassen. Dazu dienen die folgenden drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_1 \frac{du_1}{dx} + \varphi_2 \frac{du_2}{dx} + \varphi_3 \frac{du_3}{dx} = 0,\\
&\varphi_1' \frac{du_1}{dx} + \varphi_2' \frac{du_2}{dx} + \varphi_3' \frac{du_3}{dx} = 0,\\
&\varphi_1'' \frac{du_1}{dx} + \varphi_2'' \frac{du_2}{dx} + \varphi_3'' \frac{du_3}{dx} = \frac{1}{27x^3} f(x).
\end{aligned}\right\}$$

Setzt man für die Functionen φ_1, φ_2, φ_3 und ihre Differentialquotienten die Werthe ein, so hat man zur Bestimmung von u_1, u_2 und u_3 die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{du_1}{dx} + x^{\frac{2}{3}} \frac{du_2}{dx} + x^{\frac{1}{3}} \frac{du_3}{dx} = 0\\
&\frac{du_1}{dx} + \frac{1}{3} x^{\frac{2}{3}} \frac{du_2}{dx} + \frac{2}{3} x^{\frac{1}{3}} \frac{du_3}{dx} = 0\\
&\frac{du_1}{dx} + \frac{2}{9} x^{\frac{2}{3}} \frac{du_2}{dx} + \frac{5}{9} x^{\frac{1}{3}} \frac{du_3}{dx} = \frac{1}{54} f(x).
\end{aligned}\right\}$$

Diese Gleichungen geben nach $\frac{du_1}{dx}$, $\frac{du_2}{dx}$, $\frac{du_3}{dx}$ aufgelöst, folgende Werthe:

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{1}{6} f(x); \quad \frac{du_2}{dx} = \frac{1}{6} \cdot \frac{f(x)}{x^{\frac{2}{3}}}; \quad \frac{du_3}{dx} = -\frac{f(x)}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

und

$$u_1 = \frac{1}{6} \int f(x)\, dx; \quad u_2 = \frac{1}{6} \int \frac{f(x)\, dx}{x^{\frac{2}{3}}}; \quad u_3 = -\frac{1}{3} \int \frac{f(x) dx}{x^{\frac{1}{3}}}$$

. . . .

Es sei

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots; \quad -1 < x < 1$$

also:

$$\varphi(x) = \frac{1}{1.2.3} + \frac{x}{4.5.6} + \frac{x^2}{7.8.9} + \frac{x^3}{10.11.12} + \ldots;$$

Nach dem Vorhergehenden ist:

$$\varphi(x) = u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2 + u_3\varphi_3$$

$$= \frac{x^{-1}}{6}\left[\int f(x)\,dx\right] + \frac{x^{-\frac{1}{3}}}{6}\int\frac{f(x)\,dx}{x^{\frac{2}{3}}} - \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{3}\int\frac{f(x)dx}{x^{\frac{1}{3}}} +$$

$$+ K_1 x^{-1} + K_2 x^{-\frac{1}{3}} + K_3 x^{-\frac{2}{3}}$$

$$\int f(x)\,dx = \int\frac{dx}{1-x} = -l(1-x)$$

$$\int\frac{f(x)}{x^{\frac{2}{3}}}\,dx = \int\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}(1-x)} = \frac{1}{2}\,l(1-x) - \frac{3}{2}\,l(1-\sqrt[3]{x}) +$$

$$+\sqrt{3}\,\text{arc tg}\,\frac{2\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{3}}$$

$$\int\frac{f(x)}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx = \int\frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}(1-x)} = -\frac{3}{2}\,l(1-\sqrt[3]{x}) + \frac{1}{2}\,l(1-x) +$$

$$+\sqrt{3}\,\text{arc tg}\,\frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}.\sqrt{3}};$$

diese Ausdrücke für die Integrale eingesetzt geben:

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\sqrt[3]{x}}\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 1\right) l(1-\sqrt[3]{x}) -$$

$$- \frac{1}{12\sqrt[3]{x}}\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 1\right) l(1-x) +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt[3]{x}}\left[\text{arc tg}\,\frac{2\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\,\text{arc tg}\,\frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}.\sqrt[3]{x}}\right] +$$

$$+ \frac{K_1}{x} + \frac{K_2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{K_3}{\sqrt[3]{x^2}}$$

und wenn man x durch x^3 ersetzt und die Gleichung mit x^3 multiplicirt, so folgt:

$$x^3\varphi(x^3) = \frac{x}{4}(2-x)l(1-x) - \frac{1}{12}(2+2x-x^2)l(1-x^3) +$$

$$+ \frac{x}{2\sqrt{3}}\left[x\,\text{arc tg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - 2\,\text{arc tg}\,\frac{2+x}{x\sqrt{3}}\right] + K_1 + K_3 x + K_2 x^2.$$

Für $x = 0$ findet man alsogleich $K_1 = 0$.

Differenzirt man die letzte Gleichung zweimal nach x und setzt dann $x = 0$, so folgen für die Constanten nachstehende einfache Werthe:

$$K_3 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}; \quad K_2 = \frac{\pi}{12\sqrt{3}};$$

also ist:

$$\beta) \quad x^3\varphi(x^3) = \frac{x}{4}(2-x)l(1-x) - \frac{1}{12}(2+2x-x^2)l(1-x^3) +$$

$$+ \frac{x}{2\sqrt{3}}\left[x \operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - 2 \operatorname{arc\,tg}\frac{2+x}{x\sqrt{3}} + \pi\left(1-\frac{x}{6}\right)\right] =$$

$$= \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^6}{4.5.6} + \frac{x^9}{7.8.9} + \ldots; \quad -1 \lesseqgtr x \lesseqgtr +1;$$

. . . . . .

und

$$\varphi(x) = \frac{1}{1.2.3} + \frac{x}{4.5.6} + \frac{x^2}{7.8.9} = \frac{x^3}{10.11.12} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt[3]{x}}\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} = 1\right)l(1-\sqrt[3]{x}) - \frac{1}{12\sqrt[3]{x}}\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 1\right)l(1-x) +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt[3]{x}}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \operatorname{arc\,tg}\frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}.\sqrt[3]{x}} + \pi\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{6}\right)\right];$$

$$-1 \lesseqgtr x \lesseqgtr 1.$$

Für $x = 1$ folgt aus β):

$$\varphi(1) = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{7.8.9} + \frac{1}{10.11.12} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - l3\right)$$

. . . . . .

2. Beispiel.

$$\varphi(x) = \frac{B_0}{1.3.5} + \frac{B_1 x}{3.5.7} + \frac{B_2 x^2}{5.7.9} + \frac{B_3 x^3}{7.9.11} + \ldots$$

$$f(x) = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{k=3} \frac{x^k}{k!} \Delta^k u_0 \frac{d^k\varphi}{dx^k}.$$

Im vorliegenden Falle ist:

$$u_0 = 15;\ \Delta u_0 = 90;\ \Delta^2 u_0 = 120 \text{ und } \Delta^3 u_0 = 48$$

Die Summe entwickelt, gibt folgende Differentialgleichung zur Bestimmung der Function $\varphi(x)$:

$$\delta) \qquad 8x^3 \frac{d^3\varphi}{dx^3} + 60x^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} + 90x \frac{d\varphi}{dx} + 15\varphi = f(x).$$

Das allgemeine Integral der reducirten Differentialgleichung ist von der Form:

$$C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2} + C_3 x^{r_3};$$

wobei r_1, r_2 und r_3 durch nachstehende Gleichung bestimmt sind:

$$8r(r-1)(r-2) + 60r(r-1) + 90r + 15 = 0$$

oder

$$8r^3 + 36r^2 + 46r + 15 = 0;$$

daraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= -\frac{1}{2} \\ r_2 &= -\frac{3}{2} \\ r_3 &= -\frac{5}{2} \end{aligned}\right\}$$

Durch Variation der Constanten lässt sich die Differentialgleichung $\delta)$ integriren und ist das allgemeine Integral φ durch den Ausdruck gegeben:

$$\varphi = u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2 + u_3\varphi_3 = u_1 x^{-\frac{1}{2}} + u_2 x^{-\frac{3}{2}} + u_3 x^{-\frac{5}{2}}.$$

Zur Berechnung der Functionen u_1, u_2, u_3 dienen bekanntlich die drei Gleichungen:

$$\varphi_1 \frac{du_1}{dx} + \varphi_2 \frac{du_2}{dx} + \varphi_3 \frac{du_3}{dx} = 0$$

$$\varphi_1' \frac{du_1}{dx} + \varphi_2' \frac{du_2}{dx} + \varphi_3' \frac{du_3}{dx} = 0$$

$$\varphi_1'' \frac{du_1}{dx} + \varphi_2'' \frac{du_2}{dx} + \varphi_3'' \frac{du_3}{dx} = \frac{f(x)}{8x^3}.$$

Setzt man für die Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ und für ihre Differentialquotienten die Werthe ein, so gehen die vorigen Gleichungen in die folgenden über:

$$\left.\begin{aligned} x^2\frac{du_1}{dx} + x\frac{du_2}{dx} + \frac{du_3}{dx} &= 0 \\ x_2\frac{du_1}{dx} + 3x\frac{du_2}{dx} + 5\frac{du_3}{dx} &= 0 \\ 3x^2\frac{du_1}{dx} + 15x\frac{du_2}{dx} + 35\frac{du_3}{dx} &= \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}f(x). \end{aligned}\right\}$$

Für die Differentialquotienten ergeben sich die Werthe:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du_1}{dx} &= \frac{1}{16}\cdot\frac{f(x)}{\sqrt{x}} \\ \frac{du_2}{dx} &= -\frac{1}{8}\sqrt{x}f(x) \\ \frac{du_3}{dx} &= \frac{1}{16}x^{\frac{3}{2}}f(x); \end{aligned}\right\}$$

daher:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{16}\int\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx + K_1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ u_2 &= -\frac{1}{8}\int\sqrt{x}f(x)dx + K_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ u_3 &= \frac{1}{16}\int x^{\frac{3}{2}}f(x)\,dx + K_3 \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\}$$

und es ist desshalb schliesslich:

$$A) \qquad \varphi(x) = \frac{u_1}{\sqrt{x}} + \frac{u_2}{x\sqrt{x}} + \frac{u_3}{x^2\sqrt{x}}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Hier sind nur noch in jedem speciellen Falle die Constanten K_1, K_2 und K_3 zu ermitteln. Als eine Anwendung der letzten Formeln mögen folgende Fälle betrachtet werden:

1) $$f(x) = \cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \cdots;$$

dann ist:

$$\varphi(x) = \frac{1}{1.3.5} - \frac{1}{3.5.7} \cdot \frac{x}{2!} + \frac{1}{5.7.9} \cdot \frac{x^2}{4!} - \frac{1}{7.9.11} \cdot \frac{x^3}{6!} + \cdots$$

und

$$u_1 = \frac{1}{16}\int \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,dx + K_1 = \frac{1}{16}\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx + K_1$$

$$u_2 = -\frac{1}{8}\int \sqrt{x} f(x)\,dx = -\frac{1}{8}\int \sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,dx + K_2$$

$$u_3 = \frac{1}{16}\int x\sqrt{x} f(x)\,dx = \frac{1}{16}\int x\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,dx + K_3$$

Wird in diesen drei Integralen statt $\sqrt{x}$ die neue Veränderliche z eingeführt $z = \sqrt{x}$, so erhält man nach Auswerthung derselben für u_1, u_2 und u_3 die Ausdrücke:

$$u_1 = \frac{1}{8}\sin\sqrt{x} + K_1$$

$$u_2 = -\frac{1}{4}(x\sin\sqrt{x} + 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - 2\sin\sqrt{x}) + K_2$$

$$u_3 = \frac{1}{8}(x^2 - 12x + 24)\sin\sqrt{x} + \frac{1}{2}(x-6)\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + K_3$$

Diese Werthe in Gleichung *A*) eingesetzt, geben nach geschehener Reduction:

$$x^{\frac{5}{2}}\varphi(x) = (3-x)\sin\sqrt{x} - 3\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + K_1 x^2 + K_2 x + K_3$$

oder, wenn x durch x^2 ersetzt wird:

$$x^5\varphi(x^2) = (3-x^2)\sin x - 3x\cos x + K_1 x^4 + K_2 x^2 + K_3$$

und es ist für $x = 0$, $K_3 = 0$.

Diese Gleichung zweimal nach x differenzirt, gibt alsogleich für $x = 0$, $K_1 = K_2 = 0$; daher hat man schliesslich:

$$\varphi(x^2) = \frac{1}{1.3.5} - \frac{1}{3.5.7} \cdot \frac{x^2}{2!} + \frac{1}{5.7.9} \cdot \frac{x^4}{4!} - \ldots = $$

$$= \frac{(3-x^2)\sin x - 3x\cos x}{x^5} .$$

. . . . . .

$$2)\ f(x) = 1 - x + \frac{x^2}{3!} - \frac{x^3}{5!} + \frac{x^4}{7!} - \frac{x^5}{9!} + \ldots = 1 - \sqrt{x}.\sin\sqrt{x}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{1.3.5} - \frac{1}{3.5.7} \cdot x + \frac{1}{5.7.9} \cdot \frac{x^2}{3!} - \frac{1}{7.9.11} \cdot \frac{x^3}{5!} + \ldots$$

u_1, u_2 und u_3 sind abermals durch die Integrale gegeben:

$$u_1 = \frac{1}{16}\int \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{16}\int \frac{1-\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$u_2 = -\frac{1}{8}\int \sqrt{x} f(x)\,dx = -\frac{1}{8}\int (\sqrt{x} - x\sin\sqrt{x})\,dx$$

$$u_3 = \frac{1}{16}\int x^{\frac{3}{2}} f(x)dx = \frac{1}{16}\int (x\sqrt{x} - x^2)\sin\sqrt{x}\,dx$$

Durch Einführung der neuen Veränderlichen $\sqrt{x} = z$ in die drei Integrale erhält man für u_1, u_2 und u_3:

$$u_1 = \frac{1}{8}[\sqrt{x} + (\sqrt{x} - 1)\sin\sqrt{x}] + K_1$$

$$u_2 = -\frac{1}{12}x\sqrt{x} + \frac{1}{4}[\sqrt{x}(6-x)\cos\sqrt{x} + 3(x-2)\sin\sqrt{x}] + K_2$$

$$u_3 = \frac{1}{40}x^2\sqrt{x} - \frac{1}{8}[\sqrt{x}(-x^2 + 20x - 120)\cos\sqrt{x} +$$

$$+ 5(x^2 - 12x + 24)\sin\sqrt{x}] + K_3.$$

Diese Ausdrücke für u_1, u_2 und u_3 in die Gleichung A) substituirt, geben nach kurzer Rechnnng für die Function $\varphi(x)$ den Werth:

$$\varphi(x) = \frac{1}{15} + \left(\frac{15}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{8}\right)\cos\sqrt{x} +$$

$$+ \left(\frac{1}{8} + \frac{6}{x\sqrt{x}} - \frac{15}{x^2\sqrt{x}}\right)\sin\sqrt{x} + \frac{K_1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{K_2}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{K_3}{x^{\frac{5}{2}}}.$$

Wird hier x durch x^2 ersetzt, so folgt, wenn man nachträglich die Gleichung mit x^5 multiplicirt:

$$x^5\varphi(x^2) = \frac{1}{15}x^5 + \left(\frac{1}{8}x^5 + 6x^2 - 15\right)\sin x -$$

$$- \left(\frac{1}{8}x^5 + x^3 - 15x\right)\cos x + K_1x^4 + K_2x^2 + K_3$$

und für $x = 0$ ist $K_3 = 0$.

Diese Gleichung gibt zweimal nach x differenzirt und für $x = 0$ gesetzt: $K_1 = K_2 = 0$; daher:

$$\varphi(x^2) = \frac{1}{15} + \frac{1}{8}(\sin x - \cos x) + \frac{6x^2 - 15}{x^5}\sin x - \frac{x^2 - 15}{x^4}\cos x$$

$$\frac{\varphi(x^2)}{x} = \frac{1}{1.3.5}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{3.5.7}\cdot\frac{x}{1!} + \frac{1}{5.7.9}\cdot\frac{x^3}{3!} - \frac{1}{7.9\ 11}\cdot\frac{x^5}{5!} + \ldots$$

und

$$\frac{1}{3.5.7}\cdot\frac{x}{1!} - \frac{1}{5.7.9}\cdot\frac{x^3}{3!} + \frac{1}{7.9.11}\cdot\frac{x^5}{5!} - \ldots = \frac{1}{1.3.5}\cdot\frac{1}{x} -$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$- \frac{\varphi(x^2)}{x} = \frac{(x^5 + 8x^3 - 120x)\cos x - (x^5 + 48x^2 - 120)\sin x}{8x^6};$$

giltig für alle x.

Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

o sind die Substitutionsresultate in folgender Form gegeben:

$$\cos\frac{2(k-g-1)+1}{k}\pi = \cos\frac{2g+1}{k}\pi$$

$$\sin\frac{2(k-g-1)+1}{k}\pi = -\sin\frac{2g+1}{k}\pi$$

und: $$\sin\frac{2(k-g-1)+1}{2k}\pi = \sin\frac{2g+1}{2k}\pi$$

nd man hat desshalb:

$$(k-g-1) = \frac{e^{x\cos\frac{2g+1}{k}\pi}}{\sin\frac{2g+1}{2k}\pi}\sin\left[\pi - \frac{2g+1}{2k}\pi - x\sin\frac{2g+1}{k}\pi\right] = \varphi(g)$$

lso:

$$\sum_{g=0}^{g=k-1}\varphi(g) = 2\sum_{g=0}^{g=\frac{k}{2}-1}\varphi(g);$$

aher ist für gerade k:

$$Q = \frac{2}{k}\sum_{g=0}^{g=\frac{k}{2}-1}\frac{e^{g\cos\frac{2g+1}{k}\pi}}{\sin\frac{2g+1}{2k}}\cdot\sin\left(\frac{2g+1}{2k}\pi + x\sin\frac{2g+1}{k}\pi\right)$$

. . . . . .

β) für $k = 2r+1$ ist:

$$\sum_{g=0}^{g=k-1}\varphi(g) = \sum_{g=0}^{g=2r}\varphi(g) = \sum_{g=0}^{g=r-1}\varphi(g) + \varphi(r) + \sum_{g=0}^{g=r-1}\varphi(k-g-1)$$

$$= \varphi(r) + \sum_{g=0}^{g=r-1}[\varphi(g)+\varphi(k-g-1)] = \varphi(r) + 2\sum_{g=0}^{g=\frac{k-1}{2}-1}\varphi(g),$$

lso:

$$= \frac{2}{k}\left[\frac{e^{-x}}{2} + \sum_{g=0}^{g=\frac{k-1}{2}-1}\frac{e^{x\cos\frac{2g+1}{k}\pi}}{\sin\frac{2g+1}{2k}\pi}\cdot\sin\left(\frac{2g+1}{2k}\pi + x\sin\frac{2g+1}{k}\pi\right)\right]$$

oder für ungerade k:

$$Q = \frac{1}{k}\left[e^{-x} + 2\sum_{g=1}^{g=\frac{k-1}{2}} \frac{e^{x\cos\frac{2g-1}{k}\pi}}{\sin\frac{2g-1}{2k}\pi} \cdot \sin\left(\frac{2g-1}{2k}\pi + x\sin\frac{2g-1}{k}\pi\right)\right.$$

. . . . . .

Durch eine einfache Umformung kann man dem letzte Resultate die einfachere Form geben:

$$Q = \frac{2}{k}\left[\frac{1}{2}e^{-x} + \sum_{g=1}^{g=\frac{k-1}{2}} \frac{e^{-x\cos\frac{2g\pi}{k}}}{\cos\frac{g\pi}{k}} \cdot \cos\left(\frac{g\pi}{k} - x\sin\frac{2g\pi}{k}\right)\right]$$

giltig für $k = 2r+1$.

. . . . . .

Viertes Beispiel.

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3}! + \frac{x^5}{5}! + \ldots;$$

dann ist nach Gleichung VI) die abgeleitete Reihe:

$$R = \left[x + \frac{x^3}{3}! + \ldots + \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)}!\right] -$$

$$- \left[\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)}! + \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)}! + \ldots + \frac{x^{4k-1}}{(4k-1)}!\right] + \ldots =$$

$$= -\frac{1}{4k}\sum_{g=0}^{g=2k-1} (1 + i\,\mathrm{cotg}\,\frac{2g+1}{4k}\pi)\left[e^{xe^{\frac{2g+1}{2k}\pi i}} - e^{-xe^{\frac{2g+1}{2k}\pi i}}\right]$$

$$= -\frac{1}{4k}\sum_{g=0}^{g=2k-1} (1+i\,\mathrm{cotg}\,\frac{\lambda}{2})(e^{xe^{\lambda i}} - e^{-xe^{\lambda i}});$$

λ ist abkürzend für $\frac{2g+1}{2k}\pi$ gesetzt:

$$e^{xe^{\lambda i}} - e^{-xe^{\lambda i}} = e^{x(\cos\lambda + i\sin\lambda)} - e^{-x(\cos\lambda + i\sin\lambda)} =$$

$$= e^{x\cos\lambda}[\cos(x\sin\lambda) + i\sin(x\sin\lambda)] -$$
$$- e^{-x\cos\lambda}[\cos(x\sin\lambda) - i\sin(x\sin\lambda)]$$
$$= (e^{x\cos\lambda} - e^{-x\cos\lambda})\cos(x\sin\lambda) + i(e^{x\cos\lambda} + e^{-x\cos\lambda})\sin(x\sin\lambda).$$

Setzt man für die Differenz der zwei E-Potenzen hinter dem ummenzeichen den ausgerechneten Werth, zerlegt wieder das roduct in Reelles und Imaginäres und bezeichnet, wie sonst, den ellen Theil mit $\varphi(g)$, so findet man:

$$R = -\frac{1}{4k}\sum_{g=0}^{g=2k-1}\varphi(g),$$

obei $\varphi(g)$ folgenden Ausdruck darstellt:

$$\varphi(g) = (e^{x\cos\lambda} - e^{-x\cos\lambda})\cos(x\sin\lambda) - \operatorname{cotg}\frac{\lambda}{2}\sin(x\sin\lambda)$$
$$(e^{x\cos\lambda} + e^{-x\cos\lambda})$$
$$= [e^{x\cos\lambda}\sin(\frac{\lambda}{2} - x\sin\lambda) - e^{-x\cos\lambda}\sin(\frac{\lambda}{2} + x\sin\lambda)]\cdot\frac{1}{\sin\frac{\lambda}{2}};$$

ıd

$$\lambda = \frac{2g+1}{2k}\pi.$$

Nun ist wie in den früheren Beispielen gezeigt wurde:

$$\sum_{g=0}^{g=2k-1}\varphi(g) = \sum_{g=0}^{g=k-1}[\varphi(g) + \varphi(2k-g-1)].$$

Substituirt man in $\varphi(g)$ statt g, $2k-g-1$, so erhält man ch einer analogen Umformung, wie in den vorigen Beispielen

$$\varphi(2k-g-1) = \varphi(g);$$

a o:

$$\sum_{g=0}^{g=2k-1}\varphi(g) = 2\sum_{g=0}^{g=k-1}\varphi(g);$$

ıer:

$$R = \frac{1}{2k}\sum_{g=0}^{g=k-1}\left[e^{-x\cos\frac{2g+1}{2k}\pi}\cdot\sin\left(\frac{2g+1}{4k}\pi + x\sin\frac{2g+1}{2k}\pi\right) -\right.$$
$$\left. - e^{x\cos\frac{2g+1}{2k}\pi}\cdot\sin\left(\frac{2g+1}{4k}\pi - x\sin\frac{2g+1}{4k}\pi\right)\right]\cdot\frac{1}{\sin\frac{2g+1}{4k}\pi}$$

. . . . . .

Fünftes Beispiel.

Die ursprüngliche Reihe sei:

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2}! + \frac{x^4}{4}! + \frac{x^6}{6}! + \ldots;$$

so ist der Werth der abgeleiteten Reihe nach Gleichung V:

$$U = \left[1 + \frac{x^2}{2}! + \frac{x^4}{4}! + \ldots + \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)}!\right] -$$

$$- \left[\frac{x^{2k}}{(2k)}! + \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)}! + \ldots + \frac{x^{4k-2}}{(4k-2)}!\right] + \ldots =$$

$$= \frac{1}{4k} \sum_{g=0}^{g=2k-1} (1 - i \operatorname{cotg} \frac{2g+1}{4k} \pi) \left[e^{xe^{\frac{2g+1}{2k}\pi i}} + e^{-xe^{\frac{2g+1}{2k}\pi i}}\right]$$

$$= \frac{1}{4k} \sum_{g=0}^{g=2k-1} (1 - i \operatorname{cotg} \frac{\lambda}{2}) (e^{xe^{\lambda i}} + e^{-xe^{\lambda i}});$$

λ ist wie vor $\frac{2g+1}{2k} \pi$.

Es ist nun:

$$e^{xe^{\lambda i}} + e^{-xe^{\lambda i}} = (e^{x \cos \lambda} + e^{-x \cos \lambda}) \cos(x \sin \lambda) +$$
$$+ i(e^{x \cos \lambda} - e^{-x \cos \lambda}) . \sin(x \sin \lambda).$$

Setzt man für die Summe der E-Potenzen hinter dem Summenzeichen den soeben entwickelten Werth, zerlegt hernach das Product in seinen reellen und imaginären Bestandtheil, so ist, wenn der reelle Bestandtheil mit $\varphi(g)$ bezeichnet wird:

$$U = \frac{1}{4k} \sum_{g=0}^{g=2k-1} \varphi(g);$$

wobei $\varphi(g)$ den nachstehenden Ausdruck bedeutet:

$$\varphi(g) = (e^{x \cos \lambda} + e^{-x \cos \lambda}) \cos(x \sin \lambda) +$$
$$+ \operatorname{cotg} \frac{\lambda}{2} . (e^{x \cos \lambda} - e^{-x \cos \lambda}) . \sin(x \sin \lambda) =$$

$$= [e^{x \cos \lambda} \sin(\frac{\lambda}{2} + x \sin \lambda) + e^{-x \cos \lambda} . \sin(\frac{\lambda}{2} - x \sin \lambda)] . \frac{1}{\sin \frac{\lambda}{2}}.$$

Nun hat man:

$$\sum_{g=0}^{g=2k-1} \varphi(g) = \sum_{g=0}^{g=k-1} [\varphi(g) + \varphi(2k-g-1)]$$

und durch eine ähnliche Rechnung, wie früher, gelangt man zu dem Schlusse:

$$\varphi(2k-g-1) = \varphi(g);$$

also:

$$\sum_{g=0}^{g=2k-1} \varphi(g) = 2 \sum_{g=0}^{g=k-1} \varphi(g);$$

daher erhält man für U den Ausdruck:

$$U = \frac{1}{2k} \sum_{g=1}^{g=k-1} [e^{x \cos \frac{2g+1}{2k}\pi} \cdot \sin\left(\frac{2g+1}{4k}\pi + x \sin \frac{2g+1}{2k}\pi\right) +$$

$$+ e^{-x \cos \frac{2g+1}{2k}\pi} \cdot \sin\left(\frac{2g+1}{4k}\pi - x \sin \frac{2g+1}{2k}\pi\right) \cdot \frac{1}{\sin \frac{2g+1}{4k}\pi}].$$

. . . . . .

Sechstes Beispiel.

Als nachfolgendes Beispiel möge die Binomialreihe behandelt werden. Also:

$$f(x) = (1+x)^\lambda = 1 + \binom{\lambda}{1} x + \binom{\lambda}{2} x^2 + \binom{\lambda}{3} x^3 + \ldots;$$

$$-1 < x < +1.$$

Bezeichnet man nun die abgeleitete Reihe mit R, so ist für alle positiv ganzen k:

$$R = \left[1 + \binom{\lambda}{1} x + \binom{\lambda}{2} x^2 + \ldots + \binom{\lambda}{k-1} x^{k-1}\right] -$$

$$- \left[\binom{\lambda}{k} x^k + \binom{\lambda}{k+1} x^{k+1} + \ldots + \binom{\lambda}{2k-1} x^{2k-1}\right] + \ldots =$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{-0}^{g=k-1} \left(1 - i \operatorname{cotg} \frac{2g+1}{2k}\pi\right) \left(1 + x e^{\frac{2g+1}{k}\pi i}\right)^\lambda.$$

Man bringe die Basis der Potenz unter dem Summenzeichen auf die Normalform, alsdann ist:

$$1+xe^{\frac{2g+1}{k}\pi i} = 1+x\cos\frac{2g+1}{k}\pi+ix\sin\frac{2g+1}{k}\pi =$$

$$= \rho(\cos\vartheta+i\sin\vartheta), \text{ wobei}$$

$$\rho = \sqrt{1+2x\cos\frac{2g+1}{k}\pi+x^2}; \quad \vartheta = \operatorname{arc\,tg}\frac{x\sin\frac{2g+1}{k}\pi}{1+x\cos\frac{2g+1}{k}\pi};$$

daher folgt:

$$(1+xe^{\frac{2g+1}{k}\pi i})^\lambda = \rho^\lambda.(\cos\vartheta\lambda+i\sin\vartheta\lambda)$$

und es ist:

$$R = \frac{1}{k}\sum_{g=0}^{g=k-1}(1-i\operatorname{cotg}\frac{2g+1}{2k}\pi).\rho^\lambda(\cos\vartheta\lambda+i\sin\vartheta\lambda) =$$

$$= \frac{1}{k}\sum_{g=0}^{g=k-1}\varphi(g);$$

wenn $\varphi(g)$ den reellen Theil des entwickelten Ausdruckes hinter dem Summenzeichen vorstellt. Demnach hat man:

$$\varphi(g) = \rho^\lambda(\cos\vartheta\lambda+\operatorname{cotg}\frac{2g+1}{2k}\pi.\sin\vartheta\lambda) =$$

$$= \frac{\rho^\lambda}{\sin\frac{2g+1}{2k}\pi}.\sin\left(\frac{2g+1}{2k}\pi+\vartheta\lambda\right).$$

Angenommen, k sei eine gerade Zahl, so findet man wie vor, also für $k = 2r$

$$\sum_{g=0}^{g=k-1}\varphi(g) = \sum_{g=0}^{g=r-1}\varphi(g)+\varphi(k-g-1)]$$

und es ist, wie wieder leicht bewiesen werden kann:

$$\varphi(k-g-1) = \varphi(g);$$

desshalb folgt:

$$\sum_{g=0}^{g=k-1} \varphi(g) = 2 \sum_{g=0}^{g=\frac{k}{2}-1} \varphi(g);$$

folglich erhält man für die abgeleitete Reihe:

$$a) \quad R = \frac{2}{k} \sum_{g=0}^{g=\frac{k}{2}-1} \frac{(1+2x\cos\frac{2g+1}{k}\pi+x^2)^{\frac{\lambda}{2}}}{\sin\frac{2g+1}{2k}\pi} \cdot$$

$$\sin\left(\frac{2g+1}{2k}\pi+\lambda \operatorname{arc\,tg}\frac{x\sin\frac{2g+1}{k}\pi}{1+x\cos\frac{2g+1}{k}\pi}\right)$$

giltig für gerade k.

. . . . . .

b) k sei eine ungerade Zahl $2r+1$, so folgt:

$$\sum_{g-0}^{g=k-1} \varphi(g) = \sum_{g=0}^{g=r-1} \varphi(g)+\varphi(r)+\sum_{g=r+1}^{g=2r} \varphi(g) =$$

$$= \varphi(r)+\sum_{g=0}^{g=r-1} [\varphi(g)+\varphi(k-g-1)] = \varphi(r)+2\sum_{g=0}^{g=\frac{k-1}{2}-1} \varphi(g);$$

$$\varphi(r) = (1-x)^{\lambda};$$

daher:

$$\sum_{g=0}^{g=k-1} \varphi(g) = (1-x)^{\lambda}+2\sum_{g=0}^{g=\frac{k-1}{2}-1} \varphi(g).$$

Also erhält man für ungerade k:

$$b) \quad R = \frac{1}{k}\left[(1-x)^{\lambda}+2\sum_{g=0}^{g=\frac{k-1}{2}-1} \frac{(1+2x\cos\frac{2g+1}{k}\pi+x^2)^{\frac{\lambda}{2}}}{\sin\frac{2g+1}{2k}\pi}\right.$$

$$\left.\sin\left(\frac{2g+1}{2k}\pi+\lambda \operatorname{arc\,tg}\frac{x\sin\frac{2g+1}{2k}\pi}{1+x\cos\frac{2g+1}{k}\pi}\right)\right]$$

. . . . . .

Im Übrigen kann für ungerade k durch eine einfache Transformation R auf die Form gebracht werden:

$$c) \quad R = \frac{1}{k}\left[(1-x)^{\lambda} + 2\sum_{g=1}^{g=\frac{k-1}{2}} \frac{(1-2x\cos\frac{2g\pi}{k}+x^2)^{\frac{\lambda}{2}}}{\cos\frac{g\pi}{k}} \cos\left(\frac{g\pi}{k} - \lambda \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sin\frac{2g\pi}{k}}{1-x\cos\frac{2g\pi}{k}}\right)\right]$$

. . . . . .

Setzt man in Gleichung *a)* und *c)* statt x, $-x$ und an die Stelle von λ, $-\lambda$, so gehen diese zwei Gleichungen über in:

$$d) \quad \left[1 + \frac{\lambda}{1}.x + \frac{\lambda(\lambda+1)}{1.2}.x^2 + \ldots + \frac{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-2)}{1.2.\ldots.(k-1)}.x^{k-1}\right] -$$

$$-\left[\frac{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1)}{1.2.\ldots k}.x^{k-1} + \ldots + \frac{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+2k-2)}{1.2.\ldots.(2k-1)}.x^{2k-1}\right]$$

$$= Q = \frac{2}{k}\sum_{g=0}^{g=\frac{k}{2}-1} \frac{(1-2x\cos\frac{2g+1}{k}\pi+x^2)^{-\frac{\lambda}{2}}}{\sin\frac{2g+1}{2k}\pi} \cdot \sin\left(\frac{2g+1}{2k}\pi + \lambda \operatorname{arc\,tg}.\frac{x\sin\frac{2g+1}{k}\pi}{1-x\cos\frac{2g+1}{k}\pi}\right)$$

für gerade k.

. . . . . .

Für ungerade k hat man:

$$e) \quad Q = \frac{1}{k}\left[(1+x)^{-\lambda} + 2\sum_{g=1}^{g=\frac{k-1}{2}} \frac{(1+2x\cos\frac{2g\pi}{k}+x^2)^{-\frac{\lambda}{2}}}{\cos\frac{g\pi}{k}} \cdot \cos\left(\frac{g\pi}{k} - \lambda \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sin\frac{2g\pi}{k}}{1+x\cos\frac{2g\pi}{k}}\right)\right]$$

. . . . . .

Für $x = 1$ gibt die Gleichung *d)* nachstehendes Resultat:

$$Q = \frac{2}{k} \sum_{g=0}^{g=\frac{k}{2}-1} \frac{\sin\left[\frac{2g+1}{2k}\pi + \lambda \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{cotg}\frac{2g+1}{2k}\pi\right)\right]}{\left(2\sin\frac{2g+1}{2k}\pi\right)^{\lambda} \cdot \sin\frac{2g+1}{2k}\pi}$$

$$f) \quad Q = \frac{4}{k} \sum_{g=0}^{g=\frac{k}{2}-1} \frac{\sin\left[(2g+1)(1-\lambda) + k\lambda\right] \cdot \frac{\pi}{2k}}{\left(2\sin\frac{2g+1}{2k}\pi\right)^{\lambda+1}};$$

giltig für gerade k und $\lambda < 1$, wenn λ als positiv vorausgesetzt wird

. . . . . .

und Gleichung *e* gibt für $x = 1$ und ungerade k:

$$g) \quad Q = \frac{1}{k \cdot 2^{\lambda}}\left[1 + 2 \sum_{g=1}^{g=\frac{k-1}{2}} \frac{\cos(1-\lambda)\frac{g\pi}{k}}{\left(\cos\frac{g\pi}{k}\right)^{\lambda+1}}\right];$$

also giltig für ungerade k und $\lambda < 1$, wenn λ als positiv vorausgesetzt wird.

. . . . . .

Für $\lambda = \frac{1}{2}$ geben *f)* und *g)* folgende einfache Ausdrücke:

$$\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} + \ldots + \frac{1.3.\ldots.(2k-3)}{2.4.\ldots.(2k-2)}\right] -$$

$$- \left[\frac{1.3.\ldots.(2k-1)}{2.4.\ldots.2k} + \ldots + \frac{1.3.\ldots.(4k-3)}{2.4.\ldots.(4k-2)}\right] + \ldots = Q'$$

$$h) \quad Q' = \frac{4}{k} \sum_{g=0}^{g=\frac{k}{2}-1} \frac{\sin\frac{k+2g+1}{4k}\pi}{\left(2\sin\frac{2g+1}{2k}\pi\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{k} \sum_{g=0}^{g=\frac{k}{2}-1} \frac{\sin\frac{k+2g+1}{4k}\pi}{\left(\sin\frac{2g+1}{2k}\pi\right)^{3/2}};$$

giltig für gerade k.

. . . . . .

Für ungerade k ist:

$$i) \quad Q' = \frac{1}{k\sqrt{2}}\left[1 + 2\sum_{g=1}^{g=\frac{k-1}{2}} \frac{\cos\frac{g\pi}{k}}{\left(\cos\frac{g\pi}{k}\right)^{3/2}}\right];$$

. . . . . .

substituirt man in den letzten zwei Formeln für k, 2 und 3, sind die Werthe der speciellen Reihen durch folgende Ausdrücl gegeben:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\right) + \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} + \frac{1.3.\ldots.9}{2.4.\ldots.10}\right) - \ldots =$$

$$= \frac{2+\sqrt{2}}{2}; \text{ un}$$

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}\right) - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} + \frac{1.3.\ldots.9}{2.4.\ldots.10}\right) + \ldots =$$

$$= \frac{1}{6}(\sqrt{2} + 4\sqrt{3}).$$

. . . . . .

Siebentes Beispiel.

Es sei:

$$f(x) = -il(xi + \sqrt{1-x^2}) = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} +$$

$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots;$$

als ursprüngliche Reihe gegeben, so ist die abgeleitete Reihe:

$$R = \left[x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1.3\ldots(2k-3)}{2.4\ldots(2k-2)}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}\right] -$$

$$- \left[\frac{1.3.\ldots.(2k-1)}{2.4.\ldots.2k.}\cdot\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \frac{1.3.\ldots.(4k-3)}{2.4.\ldots.(4k-2)}\cdot\frac{x^{4k-1}}{4k-1}\right] + \ldots;$$

convergirt für $-1 \leqq x \leqq +1$.

Den Ausdruck für die abgeleitete Reihe findet man durch Gleichung VI. gegeben:

$$R = \frac{i}{2k} \sum_{g=0}^{g=2k-1} (1 + i \operatorname{cotg} \frac{2g+1}{4k} \pi) \, l \left[x i e^{\frac{2g+1}{2k} \pi i} + \sqrt{1 - x^2 e^{\frac{2g+1}{k} \pi i}} \right].$$

Zuerst möge die Wurzel hinter dem Logarithmenzeichen umgeformt werden:

$$\sqrt{1 - x^2 e^{\frac{2g+1}{k} \pi i}} = \sqrt{1 - x^2 \cos \frac{2g+1}{k} \pi - i x^2 \sin \frac{2g+1}{k} \pi} =$$

$$= \sqrt{\rho_g (\cos \omega_g - i \sin \omega_g)} = \sqrt{\rho_g} \left(\cos \frac{\omega_g}{2} - i \sin \frac{\omega_g}{2} \right)$$

dabei ist:

$$\rho_g = \sqrt{1 - 2x^2 \cos \frac{2g+1}{k} \pi + x^4}$$

und

$$\cos \omega_g = \frac{1 - x^2 \cos \frac{2g+1}{k} \pi}{\rho_g}$$

$$\sin \omega_g = \frac{x^2 \sin \frac{2g+1}{k} \pi}{\rho_g}$$

α) Nun hat man für $k = 2r$

$$\omega_g = \operatorname{arc\,tg} \frac{x^2 \sin \frac{2g+1}{k} \pi}{1 - x^2 \cos \frac{2g+1}{k} \pi} = \omega$$

für $g = 0$ bis $g = r-1$

und für:

$$g = 2r \text{ bis } g = 3r-1$$

$$\omega_g = 2\pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{x^2 \sin \frac{2g+1}{k} \pi}{1 - x^2 \cos \frac{2g+1}{k} \pi} = 2\pi + \omega$$

für $g = r$ bis $g = 2r-1$

und für

$$g = 3r \text{ bis } g = 4r-1.$$

Substituirt man den Werth für die Quadratwurzel, so erhä man für den Logarithmus:

$$l\left[\sqrt{\rho_g}\cos\frac{\omega_g}{2} - x\sin\frac{2g+1}{2k}\pi + i\left(x\cos\frac{2g+1}{2k}\pi - \sqrt{\rho_g}\sin\frac{\omega_g}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}l\left[x^2+\rho_g-2x\sqrt{\rho_g}\,.\,\sin\left(\frac{\omega_g}{2}+\frac{2g+1}{2k}\pi\right)\right] +$$

$$+ i\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x\cos\frac{2g+1}{2k}\pi - \sqrt{\rho_g}\,.\sin\frac{\omega_g}{2}}{\sqrt{\rho_g}\sin\frac{\omega_g}{2} - x\sin\frac{2g+1}{2k}\pi}$$

Entwickelt man den Ausdruck hinter dem Summenzeiche und setzt den reellen Theil, wie früher gleich $\varphi(g, \omega_g)$, so folgt

$$R' = \frac{1}{2k}\sum_{g=0}^{g=2k-1}\varphi(g, w_g),$$

wobei $\varphi(g, \omega_g)$ durch folgende Gleichung bestimmt ist:

$$\varphi(g, \omega_g) = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{\sqrt{\rho_g}\sin\frac{\omega_g}{2} - x\cos\frac{2g+1}{2k}\pi}{\sqrt{\rho_g}\cos\frac{\omega_g}{2} - x\sin\frac{2g+1}{2k}\pi} -$$

$$- \frac{1}{2}\,\mathrm{cotg}\frac{2g+1}{4k}\pi l\left[x^2+\rho_g-2x\sqrt{\rho_g}\sin\left(\frac{\omega_g}{2}+\frac{2g+1}{2k}\pi\right)\right]$$

$$\varphi(g, \omega_g) = \varphi(g, \omega) \left\{ \begin{array}{c} \text{für } g = 0 \text{ bis } g = r-1 \\ \text{und} \\ \text{für } g = 2r \text{ bis } g = 3r-1; \end{array} \right.$$

also ist:

$$\sum_{g=0}^{g=r-1}\varphi(g, \omega_g) + \sum_{g=2r}^{g=3r-1}\varphi(g, \omega_g) = 2\sum_{g=0}^{g=r-1}\varphi(g, \omega_g) = 2\sum_{g=0}^{g=r-1}\varphi(g, \omega);$$

weil diese Function für $g = 2r$ bis $g = 3r-1$ genau dieselben Werthe liefert, wie für $g = 0$ bis $g = r-1$. Aus demselben Grunde ist nun:

$$\sum_{g=\nu}^{g=2r-1} \varphi(g, \omega_g) + \sum_{g=3r}^{g=4r-1} \varphi(g, \omega_g) = \sum_{g=r}^{g=2r-1} \varphi(g, \omega+2\pi) +$$

$$+ \sum_{g=3r}^{g=4r-1} \varphi(g, 2\pi+\omega) = 2 \sum_{g=r}^{g=2r-1} \varphi(g, 2\pi+\omega);$$

desshalb hat man:

$$\sum_{g=0}^{g=2k-1} \varphi(g, \omega_g) = 2 \sum_{g=0}^{g=r-1} \varphi(g, \omega) + 2 \cdot \sum_{g=r}^{g=2r-1} \varphi(g, 2\pi+\omega)$$

$$\varphi(g, 2\pi+\omega) = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{\rho_g} \sin \frac{\omega}{2} + x \cos \frac{2g+1}{2k}\pi}{\sqrt{\rho_g} \cos \frac{\omega}{2} + x \sin \frac{2g+1}{2k}\pi} -$$

$$- \frac{1}{2} ctg \frac{2g+1}{4k} \pi l \left[x^2 + \rho_g + 2x \sqrt{\rho_g} \cdot \sin \left(\frac{w}{2} + \frac{2g+1}{2k} \pi \right) \right] = \psi(g).$$

Nun weiss man, wie aus den vorigen Beispielen zu ersehen ist:

$$\sum_{g=2r-1}^{g=r} \psi(g) = \sum_{g=0}^{g=r-1} \psi(2r-g-1) = \sum_{g=0}^{g=r-} \psi(k--g-1)$$

daher:

$$\sum_{g=0}^{g=2k-1} \varphi(g, \omega_g) = 2 \sum_{g=0}^{g=r-1} [\varphi(g, \omega) + \psi(k-g-1)].$$

Setzt man, um auf $\psi(k-g-1)$ zu kommen, $k-g-1$ anstatt g, so hat man diese Substitution in den trigonometrischen Functionen auszuführen und die Substitutionsresultate sind demnach:

$$\sin \frac{2(k-g-1)+1}{k} \pi = -\sin \frac{2g+1}{k} \pi$$

$$\cos \frac{2(k-g-1)+1}{k} \pi = \cos \frac{2g+1}{k} \pi$$

$$\sin \frac{2(k-g-1)+1}{2k} \pi = \sin \frac{2g+1}{k} \pi$$

$$\cos \frac{2(k-g-1)+1}{2k} \pi = -\cos \frac{2g+1}{2k} \pi$$

und

$$\operatorname{cotg}\frac{2(k-g-1)+1}{4k}\pi = \operatorname{tg}\frac{2g+1}{4k}\pi$$

Dies beachtend, folgt:

$$\psi(k-g-1) = \operatorname{arc\,tg}\frac{-\sqrt{\rho_g}\sin\frac{\omega}{2} - x\cos\frac{2g+1}{2k}\pi}{\sqrt{\rho_g}\cos\frac{\omega}{2} + x\sin\frac{2g+1}{2k}\pi} -$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{2g+1}{4k}\pi l\left[x^2+\rho_g+2x\sqrt{\rho_g}\sin\left(\frac{\omega}{2}+\frac{2g+1}{2k}\pi\right)\right].$$

Setzt man vorläufig:

$$m = \frac{\sqrt{\rho_g}\sin\frac{\omega}{2} - x\cos\frac{2g+1}{2k}\pi}{\sqrt{\rho_g}\cos\frac{\omega}{2} - x\sin\frac{2g+1}{2k}\pi}$$

und

$$n = \frac{\sqrt{\rho_g}\sin\frac{\omega}{2} + x\cos\frac{2g+1}{2k}\pi}{\sqrt{\rho_g}\cos\frac{\omega}{2} + x\sin\frac{2g+1}{2k}\pi};$$

ferner:

$$\lambda_g = \frac{\omega}{2} + \frac{2g+1}{2k}\pi,$$

so ist die Summe der Functionen:

$$\varphi(g,\omega)+\psi(k-g-1) = \operatorname{arc\,tg} m - \operatorname{arc\,tg} n -$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{2g+1}{4k}\pi l(x^2+\rho_g-2x\sqrt{\rho_g}\sin\lambda_g) -$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{2g+1}{4k}\pi l(x^2+\rho_g+2x\sqrt{\rho_g}\sin\lambda_g).$$

Es ist aber ferner:

$$\operatorname{arc\,tg} m - \operatorname{arc\,tg} n = \operatorname{arc\,tg}\frac{m-n}{1+mn} =$$

$$= \operatorname{arc\,tg}\frac{2x\sqrt{\rho_g}\cos\left(\frac{\omega}{2}+\frac{2g+1}{2k}\pi\right)}{x^2-\rho_g} =$$

$$= \operatorname{arc\,tg}\frac{2x\sqrt{\rho_g\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\omega+\frac{2g+1}{k}\pi\right)\right]}}{x^2-\rho_g}$$

nd wenn man den cos der Summe entwickelt und die Gleichungen eachtet:

$$\cos\omega = \frac{1-x^2\cos\frac{2g+1}{k}\pi}{\rho_g}$$

nd

$$\sin\omega = \frac{x^2\sin\frac{2g+1}{k}\pi}{\rho_g},$$

o resultirt für die Differenz der Bögen der einfachere Ausdruck:

$$\text{arc tg}\,m - \text{arc tg}\,n = \text{arc tg}\,\frac{x\sqrt{2}\sqrt{\rho_g - x^2 - \cos\frac{2g+1}{k}\pi}}{x^2-\rho_g}.$$

Nun lässt sich der Ausdruck hinter dem Logarithmenzeichen n der Function $\varphi(g, \omega)$ auf folgende Weise umformen:

$$Z = x^2 + \rho_g - 2x\sqrt{\rho_g}\sin\lambda_g = \frac{(x^2+\rho_g)^2 - 4x^2\rho_g\sin^2\lambda_g}{x^2+\rho_g+2x\sqrt{\rho_g}\sin\lambda_g};$$

$$\lambda_g = \frac{\omega}{2} + \frac{2g+1}{2k}\pi$$

$$= \frac{x^4+2\rho_g x^2+\rho_g^2-2x^2\rho_g(1-\cos 2\lambda_g)}{N};$$

$$= \frac{x^4+\rho_g^2+2x^2\rho_g\cos\left(\omega+\frac{2g+1}{k}\pi\right)}{N}.$$

wobei

$$N = x^2+\rho_g+2x\sqrt{\rho_g}\sin\lambda_g$$

vorstellt.

Entwickelt man den cos im Zähler und setzt für $\sin\omega$ und $\cos\omega$ die Werthe ein, so geht der Zähler in die Einheit über und es ist:

$$Z = \frac{1}{N};$$

dies berücksichtigt, hat man für die Summe der Functionen unter dem Summenzeichen:

$$n)\ \varphi(g,\omega)+\psi(k-g-1) = \operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}\sqrt{\rho_g - x^2+\cos\frac{2g+1}{k}\pi}}{x^2-\rho_g} +$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\left(\frac{2g+1}{4k}\pi\right) l(x^2+\rho_g+2x\sqrt{\rho_g}\sin\lambda_g) -$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{2g+1}{4k}\pi l(x^2+\rho_g+2x\sqrt{\rho_g}\sin\lambda_g) =$$

$$= \operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}\sqrt{\rho_g - x^2+\cos\frac{2g+1}{k}\pi}}{x^2-\rho_g} +$$

$$+\operatorname{cotg}\frac{2g+1}{2k}\pi l(x^2+\rho_g+2x\sqrt{\rho_g}\sin\lambda_g).$$

Jetzt soll $\sqrt{\rho_g}\sin\lambda_g$ durch die ursprünglich gegebenen Grössen ausgedrückt werden. Es ist:

$$\sqrt{\rho_g}\cdot\sin\lambda_g = \sqrt{\frac{\rho_g}{2}(1-\cos 2\lambda_g)} = \sqrt{\frac{\rho_g}{2}\left[1-\cos\left(\omega+\frac{2g+1}{k}\pi\right)\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left(\rho_g+x^2-\cos\frac{2g+1}{k}\pi\right)},$$

welch letzterer Ausdruck aus dem vorhergehenden entsteht, wenn $\cos\left(\omega+\frac{2g+1}{k}\right)$ entwickelt wird und man wieder für $\cos\omega$ und $\sin\omega$ ihre Werthe einsetzt. Daher findet man für R das Resultat:

$$R = \frac{1}{k}\sum_{g=0}^{g=\frac{k}{2}-1}\left[\operatorname{cotg}\frac{2g+1}{2k}\pi l(x^2+\rho_g+x\sqrt{2}\sqrt{x^2+\rho_g-\cos\frac{2g+1}{k}}) -\right.$$

$$\left. -\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}\sqrt{\rho_g - x^2+\cos\frac{2g+1}{k}\pi}}{\rho_g-x^2}\right].$$

Nun lässt sich der arc tg in einen arc cos auf folgende Art umformen: Es ist bekanntlich, wie leicht gezeigt werden kann:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{l} = 2\operatorname{arc}\cos\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{l}{\sqrt{a^2+l^2}}};$$

liese Gleichung geht für $l = \rho_g - x^2$ und für

$$a = x\sqrt{2}\sqrt{\rho_g - x^2 + \cos\frac{2g+1}{k}\pi}$$

iber in die folgende:

$$\text{arc tg}\,\frac{x\sqrt{2}\sqrt{\rho_g - x^2 + \cos\frac{2g+1}{k}\pi}}{\rho_g - x^2} = 2\arccos\sqrt{\frac{1-x^2+\rho_g}{2}}$$

oder

$$= 2\arcsin\sqrt{\frac{1+x^2-\rho_g}{2}}.$$

Dies in R eingesetzt, gibt das Resultat in seiner einfachsten Form:

$$R = \frac{1}{k}\sum_{g=0}^{g=\frac{k}{2}-1}\left[\operatorname{cotg}\frac{2g+1}{2k}\pi\right.$$

$$\left.(x^2+\rho_g+x\sqrt{2}\sqrt{x^2+\rho_g-\cos\frac{2g+1}{k}\pi}) - 2\arcsin\sqrt{\frac{1+x^2-\rho_g}{2}}\right]$$

. . . . . .

k ist hier gerade und

$$\rho_g = \sqrt{1-2x^2\cos\frac{2g+1}{k}\pi+x^4}$$

für $x = 1$ ist

$$\rho_g = \sqrt{2-2\cos\frac{2g+1}{k}\pi} = 2\sin\frac{2g+1}{2k}\pi,$$

also folgt für R:

$$R = \frac{1}{k}\sum_{g=0}^{g=\frac{k}{2}-1}\left[\operatorname{cotg}\frac{2g+1}{2k}\pi\right.$$

$$\underbrace{l(1+2\sin\frac{2g+1}{2k}\pi+\sqrt{2}.\sqrt{1-\cos\frac{2g+1}{k}\pi+2\sin\frac{2g+1}{2k}\pi})}_{\sigma} -$$

$$\left.-2\arcsin\sqrt{1-\sin\frac{2g+1}{2k}\pi}\right]$$

$$l\sigma = l\left[1+2\sin\frac{2g+1}{2k}\pi+2\sqrt{(1+\sin\frac{2g+1}{2k}\pi)\sin\frac{2g+1}{2k}\pi}\right] =$$

$$= l\left(\sqrt{1+\sin\frac{2g+1}{2k}\pi}+\sqrt{\sin\frac{2g+1}{2k}\pi}\right)^2$$

und

$$\arcsin\sqrt{1-\sin\frac{2g+1}{2k}\pi} = \arccos\sqrt{\sin\frac{2g+1}{2k}\pi};$$

daher ist das Schlussresultat:

$$\alpha')\ R' = \frac{2}{k}\sum_{g=0}^{g=\frac{k}{2}-1}\left[\operatorname{cotg}\frac{2g+1}{2k}\pi\, l\left(\sqrt{1+\sin\frac{2g+1}{2k}\pi}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sqrt{\sin\frac{2g+1}{2k}\pi}\right)-\arccos\sqrt{\sin\frac{2g+1}{2k}\pi}\right]$$

giltig für gerade k.

. . . . . .

$\beta)$ k sei eine ungerade Zahl $2r+1$; in diesem Falle erhält man:

$$R = \frac{i}{2k}\sum_{g=0}^{g=4r+1}\left(1+i\operatorname{cotg}\frac{2g+1}{4k}\pi\right) l\left[xie^{\frac{2g+1}{2k}\pi i}+\sqrt{1-x^2e^{\frac{2g+1}{k}\pi i}}\right]$$

$$= \frac{1}{2k}\sum_{g=0}^{g=4r-1}\varphi(g,\omega_g);$$

wobei ω_g, wie für gerade k, durch den Ausdruck bestimmt wird:

$$\omega_g = \operatorname{arc\,tg}\frac{x^2\sin\frac{2g+1}{k}\pi}{1-x^2\cos\frac{2g+1}{k}\pi} = \omega \quad \left\{\begin{array}{c}\text{für } g=0 \text{ bis } g=r\\ \text{und}\\ \text{für } g=2r+1 \text{ bis } g=3r\end{array}\right.$$

$$w_g = 2\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2\sin\frac{2g+1}{k}\pi}{1-x^2\cos\frac{2g+1}{k}\pi} = 2\pi+\omega \quad \left\{\begin{array}{c}\text{für } g=r+1 \text{ bis}\\ g=2r \text{ und}\\ \text{für } g=3r+1 \text{ bis}\\ g=4r+1\end{array}\right.$$

Durch die erstere Substitution geht $\varphi(g, w_g)$ über in $\varphi(g,\omega)$ und durch die letztere in $\varphi(g, 2\pi+\omega) = \psi(g)$.

Nun stimmen die Substitutionsresultate von $\varphi(g, \omega)$ für $g = 0$ bis $g = r$ mit denen für $g = 2r+1$ bis $g = 3r$ überein, ebenso verhält es sich mit $\psi(g)$, wenn man für g die Zahlen $r+1$ bis $2r$ und dann die Zahlen von $3r+1$ bis $4r+1$ einsetzt, daher lässt sich die ursprüngliche Summe also zerlegen:

$$\sum_{g=0}^{g=4r+1} \varphi(g, \omega_g) = 2 \sum_{g=0}^{g=r-1} \varphi(g, \omega) + 2 \sum_{g=r+1}^{g=2r} \psi(g).$$

Bei dieser Zerlegung wurde beachtet, dass $\varphi(g, \omega_g)$ für $g = r$ verschwindet und ebenso wird $\psi(g)$ für $g = 3r+1$ gleich Null, wie man sich durch Substitution in die betreffenden Functionen φ und ψ leicht überzeugen kann.

Nun ist ferner:

$$\sum_{g=r+1}^{g=2r} \psi(g) = \sum_{g=0}^{g=r-1} \psi(k-g-1)$$

also

$$\sum_{g=0}^{g=4r+1} \varphi(g, \omega_g) = 2 \sum_{g=0}^{g=\frac{k-3}{2}} [\varphi(g, \omega) + \psi(k-g-1)],$$

so dass das Resultat für ungerade k mit dem früheren übereinstimmt, wenn $\varphi(g, \omega)$ und $\psi(g)$ die Bedeutung von vor haben.

Es ist daher für $k = 2r+1$

$$R = \frac{1}{k} \sum_{g=0}^{g=\frac{k-3}{2}} \left[\operatorname{cotg} \frac{2g+1}{2k} \pi l\left(x^2 + \rho_g + x\sqrt{2}\sqrt{x^2 + \rho_g - \cos\frac{2g+1}{k}\pi}\right) - \right.$$
$$\left. - 2 \arcsin \sqrt{\frac{1 + x^2 - \rho_\rho}{2}} \right]$$

. . . . . .

Ebenso erhält man für $x = 1$ das vorige Resultat:

$$R' = \frac{2}{k} \sum_{g=0}^{g=\frac{k-3}{2}} \left[\operatorname{cotg} \frac{2g+1}{2k} \pi l\left(\sqrt{1 + \sin\frac{2g+1}{2k}\pi} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sqrt{\sin\frac{2g+1}{2k}\pi} \right), - \arccos \sqrt{\sin\frac{2g+1}{2k}\pi} \right]$$

gültig für ungerade k.

. . . . . .

Dabei ist:

$$\rho_g = \sqrt{1 - 2x^2 \cos\frac{2g+1}{k}\pi + x^4}\,.$$

Specielle Fälle:

für $k = 2$ gibt Formel α)

$$Q = \left(x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\right) - \left(\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1.3\ldots7}{2.4\ldots8}\frac{x^9}{9} + \frac{1.3\ldots9}{2.4\ldots10}\cdot\frac{x^{11}}{11}\right) - \ldots\ldots =$$

$$= \frac{1}{2}\left[l\sqrt{x^2+\rho_0}\,(x\sqrt{2} + \sqrt{x^2+\rho_0}) - 2\arcsin\sqrt{\frac{1+x^2-\sqrt{1+x^4}}{2}}\right];$$

$$\rho_0 = \sqrt{1+x^4}$$

. . . . . .

für $k = 3$ gibt Formel β)

$$Q' = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\,l\left(x^2 + \rho_0 + x\sqrt{2}\,\sqrt{x^2+\rho_0-\frac{1}{2}}\right) -\right.$$

$$\left. - 2\arcsin\sqrt{\frac{1+x^2-\rho_0}{2}}\right]$$

und

$$\rho_0 = \sqrt{1-x^2+x^4}$$

und wenn man für Q' die specielle Reihe schreibt, so folgt:

für $k = 2$ und $k = 3$

$$\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1.3\ldots7}{2.4\ldots8}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1.3\ldots9}{2.4\ldots10}\cdot\frac{1}{11}\right) - \ldots\ldots =$$

$$= \frac{1}{2}\left[l(1+\sqrt{2}+\sqrt{2+2\sqrt{2}}) - 2\arcsin\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\right]$$

. . . . . .

und

$$\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}\right)-$$

$$-\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1.3\ldots7}{2.4\ldots8}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1.3\ldots9}{2.4\ldots10}\cdot\frac{1}{11}\right)+\ldots\ldots=$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\,l(2+\sqrt{3})-\frac{\pi}{2}\right].$$

8. Beispiel.

Als letztes Beispiel möge die Anwendung der Formel IX) und X) dienen. Die ursprüngliche Reihe sei wieder die Logarithmenreihe:

$$f(x)=-l(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots\ldots;\quad -1<x<+1$$

so sind die abgeleiteten Reihen:

$$m)\quad R=\left[x\cos\varphi+\frac{x^2}{2}\cos 2\varphi+\ldots+\frac{x^k}{k}\cos k\varphi\right]-$$

$$-\left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\cos(k+1)\varphi+\ldots+\frac{x^{2k}}{2k}\cos 2k\varphi\right]+\ldots\ldots$$

und

$$n)\quad R'=\left[x\sin\varphi+\frac{x^2}{2}\sin 2\varphi+\ldots+\frac{x^k}{k}\sin k\varphi\right]-$$

$$-\left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\sin(k+1)\varphi+\ldots+\frac{x^{2k}}{2k}\sin 2k\varphi\right]+\ldots\ldots$$

und nach IX) und X) daher durch folgende Functionen gegeben:

$$R=\frac{1}{k}\sum_{g=0}^{g=k-1}\left[\operatorname{cotg}\frac{2g+1}{2k}\,\pi\psi(g)-w(g)\right]$$

und

$$R'=-\frac{1}{k}\sum_{g=0}^{g=k-1}\left[\psi(g)+\operatorname{cotg}\frac{2g+1}{2k}\,\pi\,.\,w(g)\right],$$

wobei die reellen Functionen $\psi(g)$ und $\omega(g)$ durch die nach stehende Gleichung gegeben sind:

$$\beta) \qquad f[xe^{(\varphi+\frac{2g+1}{k}\pi)i}] = \omega(g)+i\psi(g).$$

Für unseren Fall ist:

$$f\left[xe^{(\varphi+\frac{2g+1}{k}\pi)i}\right] = -l\left[1-xe^{(\varphi+\frac{2g+1}{k}\pi)i}\right] =$$

$$= -\left\{\frac{1}{2}l[1-2x\cos(\varphi+\frac{2g+1}{k}\pi)+x^2]-\right.$$

$$\left.-i \operatorname{arc\,tg}\frac{x\sin(\varphi+\frac{2g+1}{k}\pi)}{1-x\cos(\varphi+\frac{2g+1}{k}\pi)}\right\}$$

$$\omega(g) = -\frac{1}{2}l[1-2x\cos(\varphi+\frac{2g+1}{k}\pi)+x^2]$$

$$\psi(g) = \operatorname{arc\,tg}\frac{x\sin(\varphi+\frac{2g+1}{k}\pi)}{1-x\cos(\varphi+\frac{2g+1}{k}\pi)}.$$

Dies beachtend, findet man:

$$R = \frac{1}{k}\sum_{g=0}^{g=k-1}\left[\frac{1}{2}l\{1-2x\cos(\varphi+\frac{2g+1}{k}\pi)+x^2\}+\right.$$

$$\left.+\operatorname{cotg}\frac{2g+1}{2k}\pi.\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sin(\varphi+\frac{2g+1}{k}\pi)}{1-x\cos(\varphi+\frac{2g+1}{k}\pi)}\right]$$

$$\sum_{g=0}^{g=k-1} l\{1-2x\cos(\varphi+\frac{2g+1}{k}\pi)+x^2\} =$$

$$= l\prod_{g=0}^{g=k-1}[1-2x\cos(\varphi+\frac{2g+1}{k}\pi)+x^2].$$

Es handelt sich nur um die Auswerthung des zuletzt angezeigten Productes, welche man auf folgende höchst einfache Art bewerkstelligen kann. Aus der Theorie der binonischen Gleichungen ist bekannt:

$$x^k + e^{k\varphi i} = \prod_{g=0}^{g=k-1} \left[x - e^{(\varphi + \frac{2g+1}{k}\pi)i}\right]$$

und

$$x^k + e^{-k\varphi i} = \prod_{g=0}^{g=k-1} \left[x - e^{-(\varphi + \frac{2g+1}{k}\pi)i}\right];$$

---

woraus sich durch Multiplication ergibt:

$$x^{2k} + 2x^k \cos k\varphi + 1 = \prod_{g=0}^{g=k-1} [x^2 - 2x \cos(\varphi + \frac{2g+1}{k}\pi) + 1];$$

dies in den Ausdruck für R gesetzt, gibt:

$$R = \frac{1}{k} \sum_{g=0}^{g=k-1} \left[\operatorname{cotg} \frac{2g+1}{2k}\pi \operatorname{arc\,tg} \frac{x \sin(\varphi + \frac{2g+1}{k}\pi)}{1 - x \cos \frac{2g+1}{k}\pi} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2k} l(x^{2k} + 2x^k \cos k\varphi + 1)\right]$$

$p)$ $$R = \frac{1}{2k}\left[l(1 + 2x^k \cos k\varphi + x^{2k}) + \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{g=9}^{g=k-1} \operatorname{cotg} \frac{2g+1}{2k}\pi \operatorname{arc\,tg} \frac{x \sin(\varphi + \frac{2g+1}{k}\pi)}{1 - x \cos(\varphi + \frac{2g+1}{k}\pi)}\right]$$

giltig für alle positiven ganzen k

. . . . . .

$q)$ $$R' = \frac{1}{k} \sum_{g=0}^{g=k-1} \left[\frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{2g+1}{2k}\pi l[1 - 2x \cos(\varphi + \frac{2g+1}{k}\pi) + x^2] - \right.$$

$$\left. - \operatorname{arc\,tg} \frac{x \sin(\varphi + \frac{2g+1}{k}\pi)}{1 - x \cos(\varphi + \frac{2g+1}{k}\pi)}\right]$$

ebenfalls giltig für alle positiven ganzen k.

. . . . . .

Für $x = 1$ erhält man für R

$$R = \frac{1}{2k}\left[l\left(4\cos^2\frac{k\varphi}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{g=0}^{g=k-1} \operatorname{cotg}\frac{2g+1}{2k}\pi \operatorname{arc\,tg}\left\{\operatorname{cotg}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{2g+1}{2k}\pi\right)\right\}\right].$$

Ist

$$\lambda(g) = \operatorname{cotg}\frac{2g+1}{2k}\pi \operatorname{arc\,tg}\left[\operatorname{cotg}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{2g+1}{2k}\pi\right)\right],$$

so folgt, wie bei den früheren Beispielen, für gerade k:

$$\sum_{g=0}^{g=k-1}\lambda(g) = \sum_{g=0}^{g=\frac{k}{2}-1}[\lambda(g)+\lambda(k-g-1)]$$

$$\lambda(g) = \operatorname{cotg}\frac{2g+1}{2k}\pi \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} - \frac{2g+1}{2k}\pi\right);$$

wenn $\varphi < \frac{\pi}{k}$ ist:

$$\lambda(k-g-1) = -\operatorname{cotg}\frac{2g+1}{2k}\pi \operatorname{arc\,tg}\left[\operatorname{cotg}\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{2g+1}{2k}\pi\right)\right]$$

$$= \operatorname{cotg}\frac{2g+1}{2k}\pi \operatorname{arc\,tg}\left[\operatorname{cotg}\left(\frac{2g+1}{2k}\pi - \frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2g+1}{2k}\pi + \frac{\varphi}{2}\right)\operatorname{cotg}\frac{2g+1}{2k}\pi,$$

dies berücksichtigt, geht R über in:

$$R = \frac{1}{2k}\left[l\left(4\cos^2\frac{k\varphi}{2}\right) + 2\sum_{g=0}^{g=\frac{k}{2}-1}\frac{k-2g-1}{k}\pi\operatorname{cotg}\frac{2g+1}{2k}\pi\right]$$

$$\operatorname{cotg}\frac{2g+1}{2k}\pi = \operatorname{tg}\frac{k-2g-1}{2k}\pi$$

also ist:

$$R = \frac{1}{2k}\left[l\left(4\cos^2\frac{k\varphi}{2}\right) + 2\sum_{g=0}^{g=\frac{k}{2}-1}\frac{2g+1}{k}\pi\,\mathrm{tg}\,\frac{2g+1}{2k}\pi\right]$$

. . . . . .

Demnach hat man für gerade k:

$$A)\left[\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{3}\cos 3\varphi + \ldots + \frac{1}{n}\cos n\varphi\right] -$$

$$-\left[\frac{1}{n+1}\cos(n+1)\varphi + \frac{1}{n+2}\cos(n+2)\varphi + \ldots + \frac{1}{2n}\cos 2n\varphi\right] + \ldots = L$$

$$L = \frac{1}{2k}\left[l\left(4\cos^2\frac{k\varphi}{2}\right) + \frac{2\pi}{k}\sum_{g=0}^{g=\frac{k}{2}-1}(2g+1)\,\mathrm{tg}\,\frac{2g+1}{2k}\pi\right]$$

. . . . . .

Nach Beispiel 2) Formel ε) ist:

$$B)\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k}\right] - \left[\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k}\right] + \ldots =$$

$$= \frac{1}{k}l2 + \frac{\pi}{k^2}\sum_{g=0}^{g=\frac{k}{2}-1}(k-2g-1).\,\mathrm{tg}\,\frac{k-2g-1}{2k}\pi$$

$$= \frac{1}{k}l2 + \frac{\pi}{k^2}\sum_{g=0}^{g=\frac{k}{2}-1}(2g+1)\,\mathrm{tg}\,\frac{2g+1}{2k}\pi.$$

Subtrahirt man von Gleichung A) Gleichung B), so gelangt man zu dem einfachen Resultate, nachdem man vorerst für $\frac{\varphi}{2}$, φ setzt:

$$\alpha)\left[\sin^2\varphi + \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi + \frac{1}{3}\sin^2 3\varphi + \ldots + \frac{1}{k}\sin^2 k\varphi\right] -$$

$$-\left[\frac{1}{k+1}\sin^2(k+1)\varphi + \ldots + \frac{1}{2k}\sin^2 2k\varphi\right] + \ldots = \frac{1}{4k}l\frac{1}{\cos^2 k\varphi};$$

giltig für gerade k und $\varphi < \frac{\pi}{k}$.

. . . . . .

Substituirt man in R' für $x = 1$, so ist:

$$\left[\sin\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \ldots + \frac{1}{k}\sin k\varphi\right] -$$

$$- \left[\frac{1}{k+1}\sin(k+1)\varphi + \ldots \quad \frac{1}{2k}\sin 2k\varphi\right] + \ldots =$$

$$Q = \frac{1}{k}\sum_{g=0}^{g=k-1}\left[\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{2g+1}{2k}\pi\, l\left\{4\sin^2\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{2g+1}{2k}\pi\right)\right\} -\right.$$

$$\left. - \operatorname{arc\,tg}\left\{\operatorname{cotg}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{2g+1}{2k}\pi\right)\right\}\right].$$

Es sei

$$\mu(g) = \operatorname{arc\,tg}\left\{\operatorname{cotg}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{2g+1}{2k}\pi\right)\right\}$$

dann ist für gerade k

$$\sum_{g=0}^{g=k-1}\mu(g) = \sum_{g=0}^{g=\frac{k}{2}-1}[\mu(g) + \mu(k-g-1)]$$

$$\mu(g) = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} - \frac{2g+1}{2k}\pi$$

$$\mu(k-g-1) = \operatorname{arc\,tg}\left\{\operatorname{cotg}\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{2g+1}{2k}\pi\right)\right\} =$$

$$= - \operatorname{arc\,tg}\left\{\operatorname{cotg}\left(\frac{2g+1}{2k}\pi - \frac{\varphi}{2}\right)\right\}$$

$$= -\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2g+1}{2k}\pi + \frac{\varphi}{2}\right);$$

also

$$\mu(g) + \mu(k-g-1) = -\varphi$$

und daher:

$$\sum_{g=0}^{g=k-1}\mu(g) = -\frac{\varphi k}{2};$$

folglich gelangt man für Q zu folgendem Resultate:

$$\beta)\quad Q = \frac{1}{k}\sum_{g=0}^{g=k-1}\left[\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{2g+1}{2k}\pi l\left\{4\sin^2\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{2g+1}{2k}\pi\right)\right\} + \frac{\varphi k}{2}\right]$$

$$= \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2k} \sum_{g=0}^{g=r-1} \operatorname{cotg} \frac{2g+1}{2k} \pi l \left[4 \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{2g+1}{2k} \pi \right) \right];$$

ltig für gerade k und $\varphi < \frac{\pi}{k}$.

. . . . . .

Durch Umformung kann man die Resultate für R und R' in und q) für ungerade k auf folgende Form bringen:

$$R = \frac{1}{2k} l(x^{2k} + 2x^k \cos k\varphi + 1) +$$

$$+ \frac{1}{k} \sum_{g=0}^{g=k-1} \operatorname{tg} \frac{g\pi}{k} \operatorname{arc\,tg} \frac{x \sin \left(\varphi + \frac{2g\pi}{k} \right)}{1 + x \cos \left(\varphi + \frac{2g\pi}{k} \right)}$$

. . . . . .

$$R' = \frac{1}{k} \sum_{g=0}^{g=k-1} \left\{ \operatorname{arc\,tg} \frac{x \sin \left(\varphi + \frac{2g\pi}{k} \right)}{1 + x \cos \left(\varphi + \frac{2g\pi}{k} \right)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{g\pi}{k} l \left[1 + 2x \cos \left(\varphi + \frac{2g\pi}{k} \right) + x^2 \right] \right\}$$

. . . . . .

Durch eine ähnliche Rechnung, wie für gerade k, erhält man ungerade k und $x = 1$ nachstehende Resultate:

$$\left[\cos \varphi + \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \ldots + \frac{1}{k} \cos k\varphi \right] -$$

$$- \left[\frac{1}{k+1} \cos (k+1)\varphi + \ldots + \frac{1}{2k} \cos 2k\varphi \right] + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2k} l \left(4 \cos^2 \frac{k\varphi}{2} \right) + \frac{2\pi}{k^2} \sum_{g=1}^{g=\frac{k-1}{2}} g \operatorname{tg} \frac{g\pi}{k};$$

ungerade k und $\varphi < \frac{\pi}{k}$

. . . . . .

$$\eta)\quad [\sin\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi+\ldots+\frac{1}{k}\sin k\varphi]-$$

$$-\left[\frac{1}{k+1}\sin(k+1)\varphi+\ldots+\frac{1}{2k}\sin 2k\varphi\right]+\ldots=$$

$$=\frac{\varphi}{2}-\frac{1}{2k}\sum_{g=1}^{g=k-1}\operatorname{tg}\frac{g\pi}{k}\,l\left[4\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{g\pi}{k}\right)\right];$$

für ungerade k und $\varphi<\frac{\pi}{k}$

. . . . . .

Nun ist nach Beispiel 1) und Formel *D*) für ungerade k:

$$\xi)\quad \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}\right)-\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}\right)+$$

$$=\frac{1}{k}\,l2+\frac{2\pi}{k^2}\sum_{g=1}^{g=\frac{k-1}{2}} g\operatorname{tg}\frac{g\pi}{k}.$$

Subtrahirt man jetzt von Gleichung ξ) die Gleichung ε), so gelangt man zu dem schönen Resultate, nachdem vorher φ für $\frac{\varphi}{2}$ gesetzt worden:

$$[\sin^2\varphi+\frac{1}{2}\sin^2 2\varphi+\frac{1}{3}\sin^2 3\varphi+\ldots+\frac{1}{k}\sin^2 k\varphi]-$$

$$-\left[\frac{1}{k+1}\sin^2(k+1)\varphi+\ldots+\frac{1}{2k}\sin^2 2k\varphi\right]+\ldots=\frac{1}{4k}\,l\frac{1}{\cos^2 k\varphi};$$

. . . . . .

Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

Programm

des

Fürstl. Gymnasiums zu Arnstadt,

womit zu der

öffentlichen Prüfung der Schüler

am 31. März 1898

ergebenst einladet

der Direktor Dr. Kroschel,

Geheimer Schulrat, Inhaber des Fürstl. Schwarzb. Ehrenkreuzes II. Kl.

Inhalt:

1. Bestimmung der Koeffizienten in der Potenzreihe, die durch Umkehrung einer gegebenen Potenzreihe entsteht (mit Anwendungen). Zweiter Teil. Vom Oberlehrer Dr. Mohrmann.
2. Nachrichten über das vergangene Schuljahr. Vom Direktor.

ARNSTADT,

Fürstl. Hofbuchdruckerei von Emil Frotscher.

898. Progr.-Nr. 758.

Bestimmung der Koeffizienten in Potenzreihen, die durch Umkehrung gegebener Potenzreihen entstehen.

(Zweiter Teil).

Die Methode, nach der im ersten Teile*) die Koeffizienten der inversen Reihen bestimmt wurden, beruhte auf den Elementen der Residuentheorie, ging also über das Gebiet der Elementarmathematik ziemlich weit hinaus. Praktische Anwendung fand die Methode, indem mit ihrer Hülfe die sämtlichen Wurzeln und die Potenzen der Wurzeln gegebener trinomischer Gleichungen in Form konvergenter unendlicher Reihen gefunden wurden, und zwar ohne dass man erst einen Näherungswert der Unbekannten zu kennen brauchte. Der Versuch, dasselbe Verfahren auch auf die Inversion anderer Reihen anzuwenden, würde zeigen, dass sich hier ganz erhebliche Schwierigkeiten einstellen, die zu tiefgreifenden Änderungen der Methode zwingen.

Im folgenden soll nun eine zweite Methode gegeben werden, die Koeffizienten der inversen Reihen in independenter Form darzustellen. Dies neue Verfahren setzt keine Prinzipien der höheren Mathematik voraus, sondern kann ganz elementar genannt werden. Bei seiner Anwendung tritt der Koeffizient $b_{n,1}$ — die Bezeichnungsweise bleibt dieselbe wie im ersten Teil — als Unbekannte in einem Systeme von n linearen Gleichungen auf.

Um die praktische Brauchbarkeit der Methode zu zeigen, behandele ich die Umkehrung der Exponentialreihe, ferner die Umkehrung der binomischen Reihe für ganze positive Exponenten, endlich die Umkehrung der Sinus-Reihe. Ich habe absichtlich diese einfachen Beispiele gewählt, weil ich der Ansicht bin, das durchaus elementare Verfahren der Koeffizientenbestimmung eignet sich auch für die Schulen, selbstverständlich nur für diejenigen, welche die Entwicklung der logarithmischen, der allgemeinen binomischen und der arcsin-Reihe in den Kreis ihrer Betrachtung ziehen können, also etwa solche Schulen, für die der dritte Teil der Holzmüllerschen Elementarmathematik bestimmt ist. In den Schulbüchern werden bei der Reihenentwicklung des log. und des arcsin. entweder Rekursionsformeln für die Koeffizienten abgeleitet oder die Methoden der Infinitesimalrechnung angewandt, freilich unter sorgfältiger Umgehung der Ausdrucksweise der Differential- und Integralrechnung. Die Rekursionsformeln haben nun den Übelstand, dass die Induktion, durch welche die allgemeine Form der Koeffizienten gefunden wird, entweder nicht strenge genug ist oder für die Schule zu umständlich wird. Daher haben rekurrierende Koeffizientenformeln in den Schulbüchern nur sehr beschränkte Aufnahme gefunden, während sich die Rechnung mit unendlich kleinen Grössen in den erwähnten Beispielen sehr grosser Verbreitung erfreut. Wer nun auf dem Standpunkte steht, dass die Anwendung der Infinitesimalrechnung in der Schule überall zu vermeiden ist, wo es irgend angeht, für den dürften die folgenden Entwicklungen ein gewisses Interesse und einen gewissen Wert haben. Die Bestimmung der Reihenkoeffizienten erfolgt, wie gesagt, auf ganz elemen-

*) S. Programm des Fürstl. Gymnasiums zu Arnstadt Ostern 1897.

tarem Wege und zwar in der Hauptsache durch fortgesetzte Anwendung des binomischen Satzes für ganze positive Exponenten. Dass die Schüler mit diesem algebraischen Fundamentalsatze noch inniger vertraut werden, würde sich somit noch als ein Nebenvorteil beim Gebrauch der Methode ergeben.

Ob man das zweite Beispiel, nämlich die binomische Reihe für gebrochene Exponenten, in der Schule nach derselben Methode behandeln, oder bei dem üblichen Verfahren bleiben will, muss dem Ermessen des Einzelnen überlassen bleiben. Jedenfalls ist auch bei dem zweiten Beispiele — ebenso wie bei den andern — gerade mit Rücksicht auf etwaige Anwendung der Methode im Schulunterrichte für das erhaltene lineare Gleichungssystem ein Lösungsverfahren mitangegeben, das von der Kenntnis der Determinanten absieht. Bei Anwendung von Determinanten findet man in allen drei Fällen den Wert des Koeffizienten $b_{n,1}$ sehr schnell, und zwar mit Hülfe der allereinfachsten Determinantensätze. Doch dürften auch die ohne Determinanten bewerkstelligten Auflösungen an Kürze kaum zu wünschen übrig lassen.

Schliesslich bemerke ich noch, dass ich bei Anwendung der Methode im Schulunterrichte es für unpraktisch halten würde, erst das allgemeine Verfahren durchzunehmen und dann zu den Beispielen überzugehen. Vielmehr würde ich gleich mit den Beispielen beginnen, um so mehr, als die allgemeine Methode in allen Beispielen noch ganz erhebliche Kürzungen erfährt.

Sei die Potenzreihe vorgelegt

$$y = x \cdot \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots . a_n x^n + \ldots . \right). \tag{1}$$

Es ist dann die Aufgabe dieser Arbeit, die Koeffizienten der inversen Reihe

$$x = y \cdot \left(b_{0,1} + b_{1,1} y + b_{2,1} y^2 + \ldots . b_{n,1} y^n + \ldots \right) \tag{2}$$

in indepenter Weise zu finden.

Man kann, wie im ersten Teil ausführlicher gezeigt ist, die Gleichung aufstellen:

$$x^k = y^k \cdot \left(b_{0,k} + b_{1,k} y + b_{2,k} y^2 + \ldots . \right). \tag{3}$$

Setzt man jetzt in (1) auf der rechten Seite für die einzelnen Potenzen von x ihre Werte aus (3) ein, so entsteht folgende Gleichung:

$$y = a_0 \cdot \left(b_{0,1} y + b_{1,1} y^2 + b_{2,1} y^3 + \ldots \right) + a_1 \left(b_{0,2} y^2 + b_{1,2} y^3 + b_{2,2} y^4 + \ldots \right) + a_2 \left(b_{0,3} y^3 + \ldots \right.$$
$$\left. + \ldots \ldots \right.$$

Hieraus ergeben sich sofort folgende Relationen:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= a_0 \cdot b_{0,1} \\ 0 &= a_0 \cdot b_{1,1} + a_1 \cdot b_{0,2} \\ 0 &= a_0 \cdot b_{2,1} + a_1 \cdot b_{1,2} + a_2 \cdot b_{0,3} \\ &\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ 0 &= a_0 \cdot b_{k,1} + a_1 \cdot b_{k-1,2} + a_2 \cdot b_{k-2,3} + \ldots + a_k \cdot b_{0,k+1} \cdot \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Aus diesem System folgt zunächst, dass $b_{0,1} = \frac{1}{a_0}$ ist. Allgemein wird man deshalb erhalten:

$$b_{0,n+1} = \frac{1}{a_0^{\,n+1}}. \tag{6}$$

Ferner folgt aus dem System (5): Wenn n eine beliebige ganze Zahl ≥ 1 bezeichnet, so gilt stets die Gleichung:

$$0 = a_0 \cdot b_{n,1} + a_1 \cdot b_{n-1,2} + a_2 \cdot b_{n-2,3} + \ldots + a_n \cdot b_{0,n+1}. \qquad (n \geq 1) \quad \textbf{(7)}$$

Gleichung enthält, da $b_{0,n+1}$ nach (6) als bekannt angesehen werden darf, noch n Unnte. Um diese zu bestimmen, soll gezeigt werden, dass man zwischen denselben Unnten im ganzen n lineare Gleichungen aufstellen kann, aus denen sich die n Unbekannten im allgemeinen in eindeutiger Weise ergeben.

Um die noch erforderlichen n—1 Gleichungen zu erhalten, soll folgendes Verfahren einagen werden: Wenn man die Gleichung (1) mit sich selbst multipliziert, so erhält man:

$$= \left(a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \ldots\right) \cdot \left(a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \ldots\right)$$

$$a_0 \cdot a_0 x^2 + \left(a_0 \cdot a_1 + a_1 \cdot a_0\right) x^3 + \ldots + \left(a_0 \cdot a_{r-1} + a_1 \cdot a_{r-2} + \ldots + a_{r-1} \cdot a_0\right) x^{r+1} + \ldots \quad \textbf{(8)}$$

jetzt $t_{1,1}$ einen ganz beliebigen Faktor bedeutet, so wird nach (1):

$$t_{1,1}\, y = t_{1,1}\, a_0\, x + t_{1,1}\, a_1\, x^2 + \ldots\ldots + t_{1,1}\, a_r\, x^{r+1} + \ldots\ldots$$

rt man hierzu die Gleichung (8), so wird auf der rechten Seite der Faktor von x^{r+1} — ge mit $f_1(a_r)$ bezeichnet werden —:

$$f_1(a_r) = t_{1,1} \cdot a_r + a_0 \cdot a_{r-1} + a_1 \cdot a_{r-2} + \ldots + a_{r-1} \cdot a_0 \cdot$$

giebt die verlangte Addition das Resultat:

$$t_{1,1}\, y + y^2 = f_1(a_0)\, x + f_1(a_1)\, x^2 + f_1(a_2)\, x^3 + \ldots + f_1(a_r)\, x^{r+1} + \ldots \qquad \textbf{(9)}$$

man rechts an Stelle der einzelnen Potenzen von x ihre Werte aus (3) ein, so wird

$$+ y^2 = f_1(a_0)\left(b_{0,1}\, y + b_{1,1}\, y^2 + b_{2,1}\, y^3 + \ldots\right) + f_1(a_1)\left(b_{0,2}\, y^2 + b_{1,2}\, y^3 + \ldots\right) + f_1(a_2)\left(b_{0,3}\, y^3 + \ldots\right)$$

ergleiche man die Koeffizienten von y^{n+1} links und rechts. Dann wird für jedes $n + 1 \geq 3$, ir jedes $n \geq 2$:

$$f_1(a_0) \cdot b_{n,1} + f_1(a_1) \cdot b_{n-1,2} + f_1(a_2) \cdot b_{n-2,3} + \ldots + f_1(a_n) \cdot b_{0,n+1}. \qquad (n \geq 2)$$

st die zweite der gesuchten n Gleichungen. Genau in derselben Weise kann man nun gehen, um die fehlenden Gleichungen zu erhalten. Es soll wenigstens der nächste Schritt nit einiger Ausführlichkeit gethan werden.

Wenn man die Gleichungen (1) und (9) mit einander multipliziert, so ergiebt sich:

$$^2 + y^3 = \left(a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \ldots\right) \cdot \left(f_1(a_0)\, x + f_1(a_1)\, x^2 + f_1(a_2)\, x^3 + \ldots\ldots\right)$$

$$+ y^3 = a_0 \cdot f_1(a_0)\, x^2 + \left[a_0 \cdot f_1(a_1) + a_1 \cdot f_1(a_0)\right] x^3 + \ldots + \left[a_0 \cdot f_1(a_{r-1}) + a_1 \cdot f_1(a_{r-2}) + \ldots + a_{r-1} \cdot f_1(a_0)\right] x^{r+1} + \ldots$$

t man hierzu die mit einem beliebigen Faktor $t_{1,2}$ multiplizierte Gleichung (1) und die iem andern beliebigen Faktor $t_{2,2}$ multiplizierte Gleichung (9), so wird auf der rechten ler Faktor von x^{r+1} — er möge mit $f_2(a_r)$ bezeichnet werden —:

$$f_2(a_r) = t_{1,2} \cdot a_{r,1} + t_{2,2} \cdot f_1(a_r) + a_0 \cdot f_1(a_{r-1}) + a_1 f_1(a_{r-2}) + \ldots + a_{r-1} \cdot f_1(a_0).$$

iebt die verlangte Addition das Resultat:

$$t_{1,2}\, y + t_{2,2}\left(t_{1,1}\, y + y^2\right) + t_{1,1}\, y^2 + y^3 = f_2(a_0)\, x + \ldots\ldots + f_2(a_r)\, x^{r+1} \ldots\ldots$$

etzt man wieder rechts an Stelle der einzelnen Potenzen von x ihre Werte aus (3) und cht dann die Koeffizienten von y^{n+1} links und rechts. Dann wird für jedes $n + 1 \geq 4$, r jedes $n \geq 3$:

$$= f_2(a_0) \cdot b_{n,1} + f_2(a_1) \cdot b_{n-1,2} + f_2(a_2) \cdot b_{n-2,3} + \ldots\ldots + f_2(a_n) \cdot b_{n+1}. \qquad (n \geq 3)$$

Es ist klar, dass man, in genau derselben Weise fortfahrend, zu einer allgemeinen kommen wird:

$$0 = f_k(a_0) \cdot b_{n,1} + f_k(a_1) \cdot b_{n-1,2} + f_k(a_2) \cdot b_{n-2,3} + \cdots\cdots f_k(a_n) \cdot b_{0,n+1} \cdot$$

Das heisst aber: Es muss ein System von n linearen Gleichungen existieren:

$$\begin{aligned}
0 &= a_0 \cdot b_{n,1} + a_1 \cdot b_{n-1,2} + a_2 \cdot b_{n-2,3} + \cdots + a_n \cdot b_{0,n} \\
0 &= f_1(a_0) \cdot b_{n,1} + f_1(a_1) \cdot b_{n-1,2} + f_1(a_2) \cdot b_{n-2,3} + \cdots + f_1(a_n) \cdot b_{0,n} \\
0 &= f_2(a_0) \cdot b_{n,1} + f_2(a_1) \cdot b_{n-1,2} + f_2(a_2) \cdot b_{n-2,3} + \cdots + f_2(a_n) \cdot b_{0,n} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 &= f_{n-1}(a_0) \cdot b_{n,1} + f_{n-1}(a_1) \cdot b_{n-1,2} + f_{n-1}(a_2) \cdot b_{n-2,3} + \cdots + f_{n-1}(a_n) \cdot b_{0,n}
\end{aligned}$$

Somit ist das verlangte Gleichungssystem aufgestellt, und man sieht, dass bei Aufstel selben eine gewisse Willkür waltet, insofern als die im vorhergehenden auftretenden t beliebig gewählt werden können. Wie diese Faktoren am vorteilhaftesten zu wählen hängt durchaus von der Natur der zur Inversion vorgelegten Reihe ab, und allgemeine Vo werden kaum gegeben werden können. Jedenfalls wird sich aus den folgenden I ergeben, dass es keineswegs immer am vorteilhaftesten ist, die sämtlich Null gleich zu setzen. Auch die wirkliche Auflösung des Systems (10) nach d kannten $b_{n,1}$ hängt ganz von der Natur der vorgelegten Reihe ab. Es ist zwar in je möglich, den Wert von $b_{n,1}$ als Quotienten zweier Determinanten hinzuschreiben. A sächlich hat dies im allgemeinen Falle bloss eine formale Bedeutung, während sic folgenden Beispielen zeigen wird, dass diese Determinantenquotienten nach geringen tionen zu sehr einfachen Resultaten führen.

Beispiel I: Die Umkehrung der Exponentialreihe.*)

Die vorgelegte Reihe sei:

$$y = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\cdots$$

also

$$y + 1 = e^x.$$

Es werden die Grössen b gesucht, welche der Gleichung genügen:

$$x = y \cdot \left(b_{0,1} + b_{1,1}\, y + b_{2,1}\, y^2 + \cdots\cdots\right),$$

oder da $x = \log(y + 1)$ ist: Es wird die Entwicklung von $\log(1 + y)$ in eine Pot von y gesucht.

Die allgemeine Methode lässt hier ganz erhebliche Kürzungen zu: Wenn man die Gl (11) in die k-te Potenz erhebt, so ergiebt sich, wenn die Binomialkoeffizienten in der i Abkürzung geschrieben werden:

$$y^k + (k)_1\, y^{k-1} + (k)_2\, y^{k-2} + \cdots + 1 = e^{kx}$$

$$= 1 + kx + \frac{k^2 x^2}{2!} + \frac{k^3 x^3}{3!} + \cdots\cdots + \frac{k^n x^n}{n!} + \cdots$$

*) Dieses Beispiel für die Inversion einer Reihe brachte Herr Prof. Dr. M. Krause - Dresden meiner Studienzeit in seinen Vorlesungen. Wenngleich seine Methode von der hier entwickelten in Punkten abwich, so bleibe ich ihm doch für die mir erteilte Anregung zu grösstem Danke verpflichtet.

man hierin für die einzelnen Potenzen von x ihre Werte aus (3) ein, so ergiebt sich:

$$(k)_1 y^{k-1} + \ldots + 1 = 1 + k\left(b_{0,1}y + b_{1,1}y^2 + \ldots\right) + \frac{k^2}{2!}\left(b_{0,2}y^2 + b_{1,2}y^3 + \ldots\right) + \ldots + \frac{k^n}{n!}\left(b_{0,n}y^n + \ldots\right)$$

man in dieser Gleichung die Koeffizienten von y^{n+1} links und rechts einander gleich, so für jedes $n+1$, das $\geq k+1$ ist, d. h. für jedes n, das $\geq k$ ist:

$$0 = k \cdot b_{n,1} + \frac{k^2}{2!} \cdot b_{n-1,2} + \frac{k^3}{3!} b_{n-2,3} + \ldots\ldots + \frac{k^{n+1}}{(n+1)!} b_{0,n+1} \cdot \qquad (n \geq k).$$

man in dieser Gleichung an Stelle von k der Reihe nach alle erlaubten ganzzahligen , also die Zahlen von 1 bis n, einsetzt, hat man mit einem Schlage das verlangte Glei- ssystem:

$$\left.\begin{aligned}
0 &= b_{n,1} + \frac{1}{2!} b_{n-1,2} + \frac{1}{3!} b_{n-2,3} + \ldots\ldots + \frac{1}{(n+1)!} b_{0,n+1} \cdot \\
0 &= 2b_{n,1} + \frac{2^2}{2!} b_{n-1,2} + \frac{2^3}{3!} b_{n-2,3} + \ldots\ldots + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} b_{0,n+1} \cdot \\
0 &= 3b_{n,1} + \frac{3^2}{2!} b_{n-1,2} + \frac{3^3}{3!} b_{n-2,3} + \ldots\ldots + \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} b_{0,n+1} \cdot \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= nb_{n,1} + \frac{n^2}{2!} b_{n-1,2} + \frac{n^3}{3!} b_{n-2,3} + \ldots\ldots + \frac{n^{n+1}}{(n+1)!} b_{0,n+1} \cdot
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Auflösung des Systems (13).

A. Mit Determinanten.

(6) ist jedenfalls

$$b_{0,n+1} = 1. \qquad (14)$$

man diesen Wert in das System (13) ein, so ergiebt sich für die Unbekannte $b_{n,1}$ fol- Wert:

$$b_{n,1} = \begin{vmatrix} \frac{-1}{(n+1)!}, & \frac{1}{2!}, & \frac{1}{3!}, & \ldots\ldots, & \frac{1}{n!} \\ \frac{-2^{n+1}}{(n+1)!}, & \frac{2^2}{2!}, & \frac{2^3}{3!}, & \ldots\ldots, & \frac{2^n}{n!} \\ \frac{-3^{n+1}}{(n+1)!}, & \frac{3^2}{2!}, & \frac{3^3}{3!}, & \ldots\ldots, & \frac{3^n}{n!} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{-n^{n+1}}{(n+1)!}, & \frac{n^2}{2!}, & \frac{n^3}{3!}, & \ldots\ldots, & \frac{n^n}{n!} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1, & \frac{1}{2!}, & \frac{1}{3!}, & \ldots\ldots, & \frac{1}{n!} \\ 2, & \frac{2^2}{2!}, & \frac{2^3}{3!}, & \ldots\ldots, & \frac{2^n}{n!} \\ 3, & \frac{3^2}{2!}, & \frac{3^3}{3!}, & \ldots\ldots, & \frac{3^n}{n!} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n, & \frac{n^2}{2!}, & \frac{n^3}{3!}, & \ldots\ldots, & \frac{n^n}{n!} \end{vmatrix}$$

Jetzt hebe man in der Zählerdeterminante aus den Vertikalreihen der Reihe nach ktoren $\frac{-1}{(n+1)!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \ldots\ldots \frac{1}{n!}$ heraus und aus den Horizontalreihen der Reihe nach ktoren 1, 2, 3, ... n. Ganz ähnlich hebe man in der Nennerdeterminante aus den alen der Reihe nach die Faktoren $1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \ldots\ldots \frac{1}{n!}$. Dann werden sich die beiden neu- ndenen Determinanten, wie man ohne weiteres übersieht, nur noch durch die Reihenfolge ertikalreihen unterscheiden. Dadurch erhält man leicht:

$$b_{n,1} = \frac{-1}{(n+1)!} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot (-1)^{n-1} = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Daraus ergiebt sich die bekannte Reihe:

$$\log (1+y) = y\left(1 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}y^2 - \frac{1}{4}y^3 + \ldots - \ldots\right).$$

B. Ohne Determinanten.

Wenn man in dem System (13) neue Unbekannte einführt, wenn man nämlich

$$\frac{1}{(r+1)!} b_{n-r,\,r+1} = x_{r+1}$$

setzt, wenn man ferner die Gleichungen des Systems (13) der Reihe nach durch 1, 2, 3, . dividiert, so entsteht folgendes neue Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_{n+1} \\ 0 &= x_1 + 2x_2 + 2^2 x_3 + \ldots\ldots + 2^n x_{n+1} \\ 0 &= x_1 + 3x_2 + 3^2 x_3 + \ldots\ldots + 3^n x_{n+1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 &= x_1 + nx_2 + n^2 x_3 + \ldots\ldots + n^n x_{n+1} \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Nun ist jedenfalls identisch:

$$(1-e^x)^n = 1 - (n)_1 e^x + (n)_2 e^{2x} - \ldots + \ldots \quad + (-1)^n e^{nx}.$$

Hierin sollen überall für die Exponentialfunktionen die Potenzreihen gesetzt werden. So giebt sich links:

$$(1-e^x)^n = (-1)^n \cdot \left(x + \frac{x^2}{2!} + \ldots\right)^n.$$

Also die niedrigste Potenz von x wird x^n, und ihr Faktor lautet: $(-1)^n$. Für die rec Seite von (18) erhält man:

$$1 - (n)_1 \cdot \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots\right) + (n)_2 \cdot \left(1 + 2x + 2^2 \cdot \frac{x^2}{2!} + \ldots\right) + \ldots + (-1)^n \left(1 + nx + n^2\right.$$

Jetzt mögen die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x auf der linken und rechten S von (18) einander gleichgesetzt werden. So ergeben sich folgende Gleichungen:

$$-(n)_1 + (n)_2 - (n)_3 + \ldots - \ldots + (-1)^{n-1}(n)_{n-1} + (-1)^n = -1$$

$$-(n)_1 + (n)_2\, 2^k - (n)_3\, 3^k + \ldots - \ldots \quad \ldots\ldots\ldots + (-1)^n n^k = 0; \quad k = 1,2,3,\ldots n-1$$

$$\frac{1}{n!}\left[-(n)_1 + (n)_2\, 2^n - (n)_3\, 3^n + \ldots - \ldots \quad \ldots\ldots\ldots + (-1)^n n^n\right] = (-1)^n.$$

Nach dieser Hilfsbetrachtung lässt sich das System (17) leicht lösen. Multipliziert man nä lich die Gleichungen dieses Systems der Reihe nach mit $-(n)_1, (n)_2, -(n)_3 \ldots, (-1)^{n-1}(n)_n$ $(-1)^n$ und addiert nach erfolgter Multiplikation das ganze System, so wird der Faktor v x_1: $-(n)_1 + (n)_2 - (n)_3 + \ldots - \ldots + (-1)^n$. Das ist aber nach (19a) gleich -1. Faktoren aller folgenden Unbekannten von x_2 bis x_n werden nach (19b) sämtlich der Null glei Der Faktor endlich von x_{n+1} wird nach (19c) gleich $(-1)^n \cdot n!$ Man erhält also durch A führung der verlangten Addition das Resultat:

$$0 = -x_1 + (-1)^n \cdot n!\, x_{n+1}.$$

tzt man hierin für x_1 und x_{n+1} ihre Werte $b_{n,1}$ und $\frac{1}{(n+1)!} \cdot b_{0,n+1}$, so wird sich für $b_{n,1}$ ederum der in (15) gefundene Wert ergeben.

Beispiel. Die Umkehrung der binomischen Reihe für ganze positive Exponenten.

Die vorgelegte Reihe sei

$$y = (r)_1 x + (r)_2 x^2 + (r)_3 x^3 + \ldots + (r)_n x^n + \ldots,$$

o $$y + 1 = (1+x)^r. \qquad \textbf{(20)}$$

erbei möge r eine ganze Zahl bedeuten. Es werden die Grössen b gesucht, welche der eichung genügen:

$$x = y \cdot \left(b_{0,1} + b_{1,1}\, y + b_{2,1}\, y^2 + \ldots\right),$$

er da $x = \sqrt[r]{1+y} - 1$ ist: Es wird die Entwicklung von $\sqrt[r]{1+y}$ in eine Potenzreihe von gesucht.

Man verfahre ganz ähnlich wie im vorhergehenden Beispiele. Wenn man die Gleichung) in die k-te Potenz erhebt, so ergiebt sich:

$$y^k + (k)_1\, y^{k-1} + (k)_2\, y^{k-2} + \ldots + 1 = (1+x)^{kr} \qquad \textbf{(21)}$$
$$= 1 + (kr)_1\, x + (kr)_2\, x^2 + (kr)_3\, x^3 + \ldots + x^{kr}.$$

zt man hierin für die einzelnen Potenzen von x ihre Werte aus (3) ein, so ergiebt sich:

$$y^k + (k)_1\, y^{k-1} + (k)_2\, y^{k-2} + \ldots + 1 = 1 + (kr)_1 \left(b_{0,1}\, y + b_{1,1}\, y^2 + b_{2,1}\, y^3 + \ldots\right)$$
$$+ (kr)_2 \left(b_{0,2}\, y^2 + b_{1,2}\, y^3 + \ldots\right) + \ldots + (kr)_s \left(b_{0,s}\, y^s + \ldots\right) + \ldots$$

zt man in dieser Gleichung die Koeffizienten von y^{n+1} links und rechts einander gleich, so gt für jedes $n+1$, das $\geqq k+1$ ist, d. h. für jedes n, das $\geqq k$ ist:

$$= (kr)_1 \cdot b_{n,1} + (kr)_2 \cdot b_{n-1,2} + (kr)_3 \cdot b_{n-2,3} + \ldots + (kr)_{n+1} \cdot b_{0,n+1}. \qquad (n \geqq k)$$

lem man in dieser Gleichung an Stelle von k der Reihe nach alle erlaubten ganzzahligen erte, also die Zahlen von 1 bis n, einsetzt, hat man mit einem Schlage das verlangte Glei-ungssystem:

$$\left.\begin{aligned}
0 &= (r)_1\, b_{n,1} + (r)_2\, b_{n-1,2} + (r)_3\, b_{n-2,3} + \ldots + (r)_{n+1}\, b_{0,n+1},\\
0 &= (2r)_1\, b_{n,1} + (2r)_2\, b_{n-1,2} + (2r)_3\, b_{n-2,3} + \ldots + (2r)_{n+1}\, b_{0,n+1},\\
0 &= (3r)_1\, b_{n,1} + (3r)_2\, b_{n-1,2} + (3r)_3\, b_{n-2,3} + \ldots + (3r)_{n+1}\, b_{0,n+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
0 &= (nr)_1\, b_{n,1} + (nr)_2\, b_{n-1,2} + (nr)_3\, b_{n-2,3} + \ldots + (nr)_{n+1}\, b_{0,n+1}.
\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(22)}$$

Auflösung des Systems (22).

A. Mit Determinanten.

Nach (6) ist jedenfalls

$$b_{0,n+1} = -\frac{1}{r^{n+1}}. \qquad \textbf{(23)}$$

Setzt man diesen Wert in das System (22) ein, so ergiebt sich für die Unbekannte $b_{n,1}$ folgender Wert:

$$b_{n,1} = \frac{-1}{r^{n+1}} \begin{vmatrix} (r)_{n+1}, & (r)_2, & (r)_3, & \ldots, & (r)_n \\ (2r)_{n+1}, & (2r)_2, & (2r)_3, & \ldots, & (2r)_n \\ (3r)_{n+1}, & (3r)_2, & (3r)_3, & \ldots, & (3r)_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (nr)_{n+1}, & (nr)_2, & (nr)_3, & \ldots, & (nr)_n \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} (r)_1, & (r)_2, & (r)_3, & \ldots, & (r)_n \\ (2r)_1, & (2r)_2, & (2r)_3, & \ldots, & (2r)_n \\ (3r)_1, & (3r)_2, & (3r)_3, & \ldots, & (3r)_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (nr)_1, & (nr)_2, & (nr)_3, & \ldots, & (nr)_n \end{vmatrix} \quad (2$$

Hebt man in der ersten Determinante aus den einzelnen Horizontalreihen die Faktoren r(r—1), 2r . (2r—1), 3r . (3r—1), ..., nr . (nr—1) und aus den einzelnen Vertikalreihen die Faktoren $\frac{1}{(n+1) \cdot n}, \frac{1}{2.1}, \frac{1}{3.2}, \ldots \frac{1}{n(n-1)}$, so nimmt der Dividend des Quotienten in (24) folgenden Wert an:

$$\frac{-1}{r^{n1+}} \cdot \frac{r(r-1).2r.(2r-1).3r.(3r-1)\ldots.nr.(nr-1)}{(n+1).n.2.1.3.2.4.3\ldots\ldots.n(n-1)} \cdot \begin{vmatrix} (r-2)_{n-1}, 1, & (r-2)_1, & \ldots, & (r- \\ (2r-2)_{n-1}, 1, & (2r-2)_1 & \ldots. & (2r- \\ (3r-2)_{n-1}, 1, & (3r-2)_1, & \ldots, & (3r- \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (nr-2)_{n-1}, 1, & (nr-2)_1, & \ldots, & (nr- \end{vmatrix}$$

Ganz ähnlich findet man, dass die zweite Determinante in (24) gleich folgendem Ausdrucke ist

$$\frac{r \cdot 2r \cdot 3r \ldots\ldots nr}{1 \cdot 2 \ldots\ldots\ldots n} \cdot \begin{vmatrix} 1, & (r-1)_1, & (r-1)_2, & \ldots, & (r-1)_{n-1} \\ 1, & (2r-1)_1, & (2r-1)_2, & \ldots. & (2r-1)_{n-1} \\ 1, & (3r-1)_1, & (3r-1)_2 & \ldots. & (3r-1)_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & (nr-1)_1, & (nr-1)_2, & \ldots. & (nr-1)_{n-1} \end{vmatrix}$$

Nun ist aber nach einer bekannten Relation der Binomialkoeffizienten

$$(kr-1)_s = (kr-2+1)_s = (kr-2)_s + (kr-2)_{s-1}.$$

Wendet man diese Formel auf die letzte Determinante an, so folgt, dass dieselbe auch folgendermassen geschrieben werden kann:

$$\begin{vmatrix} 1, & (r-2)_1 + 1, & (r-2)_2 + (r-2)_1, & \ldots., & (r-2)_{n-1} + (r-2)_{n-2} \\ 1, & (2r-2)_1 + 1, & (2r-2)_2 + (2r-2)_1, & \ldots., & (2r-2)_{n-1} + (2r-2)_{n-2} \\ 1, & (3r-2)_1 + 1, & (3r-2)_2 + (3r-2)_1, & \ldots., & (3r-2)_{n-1} + (3r-2)_{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & (nr-2)_1 + 1, & (nr-2)_2 + (nr-2)_1, & \ldots., & (nr-2)_{n-1} + (nr-2)_{n-2} \end{vmatrix} \quad (2$$

Subtrahiert man in dieser Determinante die erste Vertikale von der zweiten, die neu entstandene zweite von der dritten, die neu entstandene dritte von der vierten u. s. w., so sieht man ohne weiteres, dass (26) in eine Determinante übergeht, die sich von der Determinante in (25) nur durch die Reihenfolge der Vertikalreihen unterscheidet. Dadurch erhält man leicht:

$$b_{n,1} = \frac{-1}{r^{n+1}} \cdot \frac{r \cdot (r-1) \cdot 2r \cdot (2r-1) \ldots nr \cdot (nr-1)}{(n+1) \cdot n \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \ldots n \cdot (n-1)} \cdot (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{r \cdot 2r \cdot 3r \ldots nr}$$

$$= \frac{(-1)^n}{r^{n+1}} \cdot \frac{(r-1) \cdot (2r-1) \cdot (3r-1) \ldots (nr-1)}{(n+1) \cdot n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)} = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(1 - \frac{1}{r}\right)\left(2 - \frac{1}{r}\right)\left(3 - \frac{1}{r}\right) \cdot$$

$$b_{n,1} = \left(\frac{1}{r}\right)_{n+1}. \qquad (27)$$

raus ergiebt sich die bekannte Reihe:

$$\sqrt[r]{1+y} - 1 = y \cdot \left[\left(\frac{1}{r}\right)_1 + \left(\frac{1}{r}\right)_2 y + \left(\frac{1}{r}\right)_3 y^2 + \ldots \right].$$

B. Ohne Determinanten.

Der Versuch, jetzt genau so vorzugehn, wie im vorigen Beispiele, nämlich auszugehen n der Identität — vergl. Gleichung (18) —

$$\left[1-(1+x)^r\right]^n = 1-(n)_1\,(1+x)^r + (n)_2\,(1+x)^{2r} - \ldots + \ldots,$$

gt sehr bald, dass hier eine eigentümliche Schwierigkeit entsteht, die durch folgende Modiation des früheren Verfahrens beseitigt wird:

Wenn man in dem System (22) neue Unbekannte einführt, wenn man nämlich

$$b_{n,1} = x_1 \text{ und von } k = 2 \text{ an } \frac{1}{(k-1)\,k}\, b_{n-k+1,k} = x_k \qquad (28)$$

zt, wenn man ferner die Gleichungen des Systems (22) der Reihe nach durch $r \cdot (r-1)$, $2 \cdot (2r-1)$, $3r \cdot (3r-1) \ldots$, $nr \cdot (nr-1)$ dividiert, so entsteht folgendes neue Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned}
0 &= \frac{x_1}{r-1} + x_2 + (r-2)_1\, x_3 + (r-2)_2\, x_4 + \ldots (r-2)_{n-1}\, x_{n+1},\\
0 &= \frac{x_1}{2r-1} + x_2 + (2r-2)_1\, x_3 + (2r-2)_2\, x_4 + \ldots (2r-2)_{n-1}\, x_{n+1},\\
0 &= \frac{x_1}{3r-1} + x_2 + (3r-2)_1\, x_3 + (3r-2)_2\, x_4 + \ldots (3r-2)_{n-1}\, x_{n+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
0 &= \frac{x_1}{nr-1} + x_2 + (nr-2)_1\, x_3 + (nr-2)_2\, x_4 + \ldots (nr-2)_{n-1}\, x_{n+1}.
\end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

n ist jedenfalls identisch:

$$(1+x)^{r-2} \cdot \left[1-(1+x)^r\right]^{n-1} = (1+x)^{r-2} - (n-1)_1\,(1+x)^{2r-2} + (n-1)_2\,(1+x)^{3r-2} - \ldots + \ldots + (-1)^{n-1}\,(1+x)^{nr-2} \qquad (30)$$

zt sollen beide Seiten nach Potenzen von x entwickelt werden. So ergiebt sich links:

$$(1+x)^{r-2}\left[1-(1+x)^r\right]^{n-1} = (1+x)^{r-2} \cdot (-1)^{n-1} \cdot \left[rx + (r)_2\, x^2 + \ldots\right]^{n-1}.$$

o die niedrigste Potenz von x wird x^{n-1}, und ihr Faktor lautet: $(-1)^{n-1} \cdot r^{n-1}$. Für die hte Seite von (30) erhält man:

$$\left[1+(r-2)_1\, x + (r-2)_2\, x^2 + \ldots\right] - (n-1)_1\left[1+(2r-2)_1\, x + (2r-2)_2\, x^2 + \ldots\right] + (n-1)_2\left[1+(3r-2)_1\, x + \ldots\right] - \ldots + \ldots$$

n mögen die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x auf der linken und rechten Seite d (30) einander gleichgesetzt werden. So ergeben sich folgende Gleichungen:

$$(r-2)_k - (n-1)_1\,(2r-2)_k + (n-1)_2\,(3r-2)_k - \ldots + \ldots + (-1)^{n-1}\,(nr-2)_k = 0; \quad k = 0, 1, 2 \ldots n-2.$$

egen für $k = n-1$ ergiebt sich:

$$(r-2)_{n-1} - (n-1)_1\,(2r-2)_{n-1} + (n-1)_2\,(3r-2)_{n-1} - \ldots + \ldots + (-1)^{n-1}\,(nr-2)_{n-1} = (-$$

Nach dieser Hilfsbetrachtung lässt sich das System (29) leicht lösen. Multipliziert man nämlich die Gleichungen dieses Systems der Reihe nach mit $1, -(n-1)_1, (n-1)_2, -(n-1)_3, \ldots . (-1)^{n-1}$ und addiert nach erfolgter Multiplikation das ganze System, so wird der Faktor von x_1:

$$\frac{1}{r-1} - \frac{(n-1)_1}{2r-1} + \frac{(n-1)_2}{3r-1} - \ldots + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{nr-1}.$$

Die Faktoren aller folgenden Unbekannten von x_2 bis x_n werden nach (31a) sämtlich der Null gleich. Der Faktor endlich von x_{n+1} wird nach (31b) gleich $(-1)^{n-1} \cdot r^{n-1}$. Man erhält also durch Ausführung der verlangten Addition, wenn man noch für x_1 und x_{n+1} ihre Werte aus (28) einsetzt und (23) anwendet, das Resultat:

$$0 = \left[\frac{1}{r-1} - \frac{(n-1)_1}{2r-1} + \frac{(n-1)_2}{3r-1} - \ldots + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{nr-1}\right] b_{n,1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n\,.\,(n+1)\,.\,r^2} \qquad (32)$$

Der hieraus folgende Wert von $b_{n,1}$ weicht scheinbar von dem in (27) gefundenen durchaus ab. Die Zurückführung auf die Form (27) geschieht auf folgende Weise: Der Faktor von $b_{n,1}$ in (32) ist eine Summe von ungleichnamigen Brüchen. Macht man diese Brüche gleichnamig, so kann man ansetzen:

$$\frac{1}{r-1} - \frac{(n-1)_1}{2r-1} + \frac{(n-1)_2}{3r-1} - \ldots + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{nr-1} = \frac{f(r)}{(r-1)\,(2r-1)\,(3r-1)\,\ldots\,(nr-1)}.$$

Hierbei bedeutet $f(r)$, wie man ohne weiteres übersieht, eine ganze rationale Funktion n—1-ten Grades von r. Multipliziert man jetzt (33) mit dem Nenner der rechten Seite, so ergiebt sich rechts $f(r)$, links dagegen eine Summe von Produkten, die aus je n—1, inbezug auf r linearen, Faktoren zusammengesetzt sind. In der so entstandenen Gleichung soll r der Reihe nach die n Werte $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}$ annehmen. Man erkennt, dass für $r = \frac{1}{k}$ alle Produkte auf der linken Seite verschwinden müssen bis auf das eine, in dem der Faktor $(kr-1)$ überhaupt nicht vorkommt. Folglich wird

$$f\left(\frac{1}{k}\right) = (-1)^{k-1} \cdot (n-1)_{k-1} \cdot \left(\frac{1}{k}-1\right)\left(\frac{2}{k}-1\right)\ldots\left(\frac{k-1}{k}-1\right)\left(\frac{k+1}{k}-1\right)\ldots\left(\frac{n}{k}-1\right)$$

$$= \frac{(n-1)_{k-1}}{k^{n-1}} \cdot (k-1)\,(k-2)\,\ldots\,2\,.\,1\,.\;\;1\,.\,2\,\ldots\,(n-k)$$

$$= \frac{(n-1)\,.\,(n-2)\,\ldots\,(n-k+1)}{k^{n-1}\,.\,(k-1)\,.\,(k-2)\ldots 1}\,.\,(k-1)\,.\,(k-2)\ldots 2\,.\,1\,.\;\;1\,.\,2\,\ldots\,(n-k) = \frac{(n-1)!}{k^{n-1}}.$$

Aus dieser, für n verschiedene Werte von k gültigen, Relation

$$f\left(\frac{1}{k}\right) = (n-1)!\left(\frac{1}{k}\right)^{n-1}$$

folgt nun nach einem bekannten Satze,*) dass die Funktion n—1-ten Grades $f(r)$ mit der Funktion $(n-1)!\;r^{n-1}$ vollkommen identisch sein muss. Es gilt also u. z. für beliebige r die Gleichung:

*) Dieser Satz über die Identität zweier ganzen rationalen Funktionen dürfte über das Pensum der in Betracht kommenden Schulen nicht hinausgehn. Holzmüller stellt ihn sogar an die Spitze des Kapitels: Die ganzen rationalen Funktionen. Vergl. Holzmüller, Method. Lehrbuch der Elementarmathematik, dritter Teil, S. 120.

$$\frac{1}{r-1} - \frac{(n-1)_1}{2r-1} + \frac{(n-1)_2}{3r-1} - \ldots + \ldots + (-1)^{k-1} \frac{(n-1)_{k-1}}{kr-1} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{nr-1}$$

$$= \frac{(n-1)!\, r^{n-1}}{(r-1)\,.\,(2r-1)\,.\,(3r-1)\ldots(nr-1)} \qquad (34)$$

Wendet man diese Beziehung in (32) an, so ergiebt sich für $b_{n,1}$ wieder der in (27) gefundene Wert.

III. Beispiel. Die Umkehrung der Sinusreihe.

Die vorgelegte Reihe sei

$$y = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \ldots + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \ldots\ldots,$$

also $y = \sin x$. Es werden die Grössen b gesucht, welche der Gleichung genügen:

$$x = y \,.\, \left(b_{0,1} + b_{1,1}\, y + b_{2,1}\, y^2 + \ldots\right),$$

oder, da $x = \arcsin y$: Es wird die Entwicklung von arcsin y in eine Potenzreihe von y gesucht.

Zunächst ist zu zeigen, dess die Grössen $b_{2k+1,r}$ sämtlich der Null gleich sind. Der Beweis ist eigentlich schon durch die Bemerkung geliefert, dass arcsin eine ungerade Funktion ist. Ausführlicher kann man ihn in folgender Weise geben: Sei allgemein vorgelegt:

$$y = a_0\, x + a_2\, x^3 + a_4\, x^5 + \ldots a_{2k}\, x^{2k+1} + \ldots,$$

und sei

$$x = y \,.\, \left(b_{0,1} + b_{1,1}\, y + b_{2,1}\, y^2 + \ldots\right),$$

so wird vermöge der Gleichung (3):

$$y = a_0 \left(b_{0,1}\, y + b_{1,1}\, y^2 + b_{2,1}\, y^3 + \ldots\right) + a_2 \left(b_{0,3} y^3 + b_{1,3}\, y^4 + \ldots\right) + a_4 \left(b_{0,5}\, y^5 + \ldots\right) + \ldots \qquad (\ldots)$$

Hieraus folgen die Gleichungen:

$$1 = a_0 \,.\, b_{0,1} \qquad \text{und} \qquad 0 = a_0 \,.\, b_{1,1}.$$

Also wird $b_{1,1} = 0$. Dann kann aber auch in $\left(b_{0,1} + b_{2,1}\, y^2 + \ldots\right)^3$ kein Glied vorkommen, das y in der ersten Potenz enthält; folglich wird auch

$$b_{1,3} = 0.$$

Andererseits aber ist nach (35)

$$0 = a_0 \,.\, b_{3,1} + a_2 \,.\, b_{1,3}$$

Daraus folgt wegen $b_{1,3} = 0$ auch

$$b_{3,1} = 0.$$

Genau so ergiebt sich, dass auch $b_{5,1} = 0$, $b_{7,1} = 0$ u. s. w. ist. Dass dann aber auch dasselbe für die Grössen $b_{2k+1,r}$ gilt, liegt auf der Hand.

Entsprechend dieser Eigenschaft der Koeffizienten b muss in diesem Beispiele die allgemeine Methode eine Modifikation erfahren. Das aufzustellende Gleichungssystem darf nicht, wie bisher, die Unbekannten $b_{n,1}$, $b_{n-1,2}$, u. s. w. enthalten, sondern es werden neue Unbekannte gewählt werden müssen. Welche Unbekannte das sind, ersieht man aus dem System (39).

Es ist jedenfalls:

$$\sin(2k-1)\,x = c_{2\,k-1} \sin^{2\,k-1} x + c_{2\,k-3} \sin^{2\,k-3} x + c_{2\,k-5} \sin^{2\,k-5} x + \ldots + c_1 \sin x, \qquad (\ldots)$$

wobei die c von x unabhängige Konstante bedeuten.

Anmerkung 1: Die Bestimmung dieser Konstanten ist überflüssig, man braucht den Schülern nur die Möglichkeit des Ansatzes darzuthun. Dies kann auf verschiedene Weise geschehen, z. B. durch folgende bekannte Betrachtung: Es ist:

$$(\cos x + i \sin x)^{2k-1} = \cos^{2k-1} x + i\,(2k-1)_1 \cos^{2k-2} x \cdot \sin x - (2k-1)_2 \cos^{2k-3} x \cdot \sin^2 x - i\,(2k-1)_3 \cos^{2k-4} x \cdot s$$

Nach dem Moivreschen Satze ergiebt sich aber für die linke Seite der Wert: $\cos(2k-1)\,x + i \sin(2k-1)\,x$. Setzt man jetzt das Imaginäre links und rechts einander gleich, so wird

$$\sin(2k-1)\,x = (2k-1)_1 \cos^{2k-2} x \cdot \sin x - (2k-1)_3 \cos^{2k-4} x \cdot \sin^3 x + \ldots - \ldots + (-1)^{r-1} (2k-1)_{2r-1} \cdot \cos^{2k-2r} x \cdot si$$

Jetzt ist aber

$$\cos^{2k-2r} x = (1-\sin x)^{k-r}.$$

Die Potenzen von $\cos x$ können also in (37) durch Potenzen von $\sin^2 x$ ersetzt werden. Dadurch ergiebt sich leicht, dass auf der rechten Seite von (37) nur ungerade Potenzen von $\sin x$ auftreten können, dass also der Ansatz (36) thatsächlich richtig ist.

Dasselbe Resultat kann man auch durch den Schluss von r auf r+1 erhalten. Angenommen, bis zu einem bestimmten Werte von k sei die Relation (36) als gültig erwiesen; es sei etwa

$$\sin(2k-3)\,x = d_{2k-3} \sin^{2k-3} x + d_{2k-5} \sin^{2k-5} x + \ldots + d_1 \sin x. \qquad (38)$$

Man multipliziere diese Gleichung mit der bekannten Identität

$$2 - 2\cos 2x = 4 \sin^2 x.$$

Dann ergiebt sich links:

$$2\sin(2k-3)\,x - 2\sin(2k-3)\,x \cdot \cos 2x = 2\sin(2k-3)\,x - \sin(2k-1)\,x - \sin(2k-5)\,x.$$

Rechts dagegen erhält man eine nach ungeraden Potenzen von $\sin x$ fortschreitende Reihe, die mit $4 d_{2k-3} \sin^{2k-1} x$ beginnt. Indem man nun zu der Gleichung

$$2\sin(2k-3)\,x - \sin(2k-1)\,x - \sin(2k-5)\,x = 4 d_{2k-3} \sin^{2k-1} x + \ldots\ldots + 4 d_1 \sin^3 x$$

die beiden Gleichungen addiert

$$-2\sin(2k-3)\,x = -2 d_{2k-3} \sin^{2k-3} x - 2 d_{2k-5} \sin^{2k-5} x - \ldots\ldots - 2 d_1 \sin x$$
$$\sin(2k-5)\,x = e_{2k-5} \sin^{2k-5} x + e_{2k-7} \sin^{2k-7} x + \ldots\ldots + e_1 \sin x,$$

erhält man das gewünschte Resultat.

Vertauscht man die beiden Seiten der Gleichung (36) und setzt y anstatt $\sin x$, so erhält man:

$$c_{2k-1} y^{2k-1} + c_{2k-3} y^{2k-3} + \ldots + c_1 y = \sin(2k-1)\,x$$
$$= (2k-1)\,x - \frac{(2k-1)^3}{3!} x^3 + \frac{(2k-5)^5}{5!} x^5 - \ldots + \ldots$$

Setzt man hierin für die einzelnen Potenzen von x ihre Werte aus (3) ein, so ergiebt sich:

$$c_{2k-1} y^{2k-1} + \ldots + c_1 y = (2k-1)(b_{0,1} y + b_{2,1} y^3 + b_{4,1} y^5 + \ldots) - \frac{(2k-1)^3}{3!}(b_{0,3} y^3 + b_{2,3} y^$$
$$+ \frac{(2k-1)^5}{5!}(b_{0,5} y^5 + \ldots) + \ldots$$

Setzt man in dieser Gleichung die Koeffizienten von y^{2n+1} links und rechts einander gleich, so folgt für jedes $2n+1$, welches $\geq 2k+1$ ist, d. h. für jedes n, welches $\geq k$ ist:

$$0 = (2k-1)\, b_{2n,1} - \frac{(2k-1)^3}{3!} b_{2n-2,3} + \frac{(2k-1)^5}{5!} b_{2n-4,5} - \ldots + \ldots + (-1)^n \frac{(2k-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} b_{0,2}$$

Indem man in dieser Gleichung an Stelle von k der Reihe nach alle erlaubten ganzzahligen Werte, also die Zahlen von 1 bis n, setzt, hat man mit einem Schlage das verlangte Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
(= \quad & b_{2n,1} - \frac{1}{3!} b_{2n-2,3} + \frac{1}{5!} b_{2n-4,5} - \cdots + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} b_{0,2n+1}, \\
(= \quad & 3 b_{2n,1} - \frac{3^3}{3!} b_{2n-2,3} + \frac{3^5}{5!} b_{2n-4,5} - \cdots + \cdots + (-1)^n \frac{3^{2n+1}}{(2n+1)!} b_{0,2n+1}, \\
(= \quad & 5 b_{2n,1} - \frac{5^3}{3!} b_{2n-2,3} + \frac{5^5}{5!} b_{2n-4,5} - \cdots + \cdots + (-1)^n \frac{5^{2n+1}}{(2n+1)!} b_{0,2n+1}, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(= (2n-1) & b_{2n,1} - \frac{(2n-1)^3}{3!} b_{2n-2,3} + \frac{(2n-1)^5}{5!} b_{2n-4,5} - \cdots + \cdots + (-1)^n \frac{(2n-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} b_{0,2n+1}.
\end{aligned}
$$

Auflösung des Systems (39).

A. Mit Determinanten.

Nach (6) ist jedenfalls

$$b_{0,2n+1} = 1. \qquad (40)$$

Setzt man diesen Wert in das System (39) ein, so ergiebt sich für die Unbekannten $b_{2n,1}$ folgender Wert:

$$
b_{2n,1} = \frac{\begin{vmatrix}
\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)!}, & \frac{-1}{3!}, & \frac{1}{5!}, & \cdots, & \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \\
\frac{(-1)^{n-1} \cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!}, & \frac{-3^3}{3!}, & \frac{3^5}{5!}, & \cdots, & \frac{(-1)^{n-1} \cdot 3^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
\frac{(-1)^{n-1} \cdot 5^{2n+1}}{(2n+1)!}, & \frac{-5^3}{3!}, & \frac{5^5}{5!}, & \cdots, & \frac{(-1)^{n-1} \cdot 5^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\
\frac{(-1)^{n-1} \cdot (2n-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}, & \frac{-(2n-1)^3}{3!}, & \frac{(2n-1)^5}{5!}, & \cdots & \frac{(-1)^{n-1} (2n-1)^{2n-1}}{(2n-1)!}
\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}
1, & \frac{-1}{3!}, & \frac{1}{5!}, & \cdots, & \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \\
3, & \frac{-3^3}{3!}, & \frac{3^5}{5!}, & \cdots, & \frac{(-1)^{n-1} \cdot 3^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
5, & \frac{-5^3}{3!}, & \frac{5^5}{5!}, & \cdots & \frac{(-1)^{n-1} \cdot 5^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\
(2n-1), & \frac{-(2n-1)^3}{3!}, & \frac{(2n-1)^5}{5!}, & \cdots & \frac{(-1)^{n-1} (2n-1)^{2n-1}}{(2n-1)!}
\end{vmatrix}}
$$

Setzt hebe man in der Zählerdeterminante aus den Vertikalreihen der Reihe nach die Faktoren $\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)!}, \frac{-1}{3!}, \frac{1}{5!}, \ldots\ldots \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}$ heraus und aus den Horizontalreihen der Reihe nach die Faktoren $1, 3^2, 5^2, \ldots (2n-1)^2$. Ganz ähnlich hebe man in der Nennerdeterminante aus den Vertikalen der Reihe nach die Faktoren $1, \frac{-1}{3!}, \frac{1}{5!}, \ldots \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}$. Dann

werden sich die beiden neu entstandenen Determinanten, wie man ohne weiteres übersieht, n noch durch die Reihenfolge der Vertikalreihen unterscheiden. Dadurch erhält man:

$$b_{2n,1} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)!} \cdot 1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \ldots (2n-1)^2 = \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \ldots (2n-1)^2}{(2n+1)!}. \quad (4$$

Daraus ergiebt sich die bekannte Reihe:

$$\arcsin y = y + \frac{1^2}{3!} y^3 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{5!} y^5 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{7!} y^7 + \ldots.$$

B. Ohne Determinanten.

Das Verfahren ist ganz ähnlich wie im zweiten Beispiele.

Wenn man die Gleichungen des Systems (39) der Reihe nach durch 1^2, 3^2, 5^2, . $(2n-1)^2$ dividiert und neue Unbekannte einführt, indem man

$$\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} b_{2n-2k,\ 2k+1} = x_{k+1} \quad (4$$

setzt, so entsteht folgendes neue Gleichungssystem:

$$\left.\begin{array}{rrrrr}
x_1 + & x_2 + & x_3 + \ldots + & x_{n+1} = 0 \\
\frac{1}{3} x_1 + & 3 x_2 + & 3^3 x_3 + \ldots + & 3^{2n-1} x_{n+1} = 0 \\
\frac{1}{5} x_1 + & 5 x_2 + & 5^3 x_3 + \ldots + & 5^{2n-1} x_{n+1} = 0 \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\frac{1}{2n-1} x_1 + & (2n-1) x_2 + & (2n-1)^3 x_3 + \ldots + & (2n-1)^{2n-1} x_{n+1} = 0.
\end{array}\right\} \quad (43)$$

Nun ist jedenfalls identisch:

$$2^{2n-2} \cdot \sin^{2n-1} x = (2n-1)_{n-1} \sin x - (2n-1)_{n-2} \sin 3x + (2n-1)_{n-3} \sin 5x - \ldots + \ldots + (-1)^{n-1} \sin (2n-1) x. \quad (44$$

Anmerkung 2: Diese bekannte Gleichung erhält man, indem man die Eulersche Formel

$$2 i \sin x = e^{ix} - e^{-ix}$$

in die (2n—1)-te Potenz erhebt. Darf indessen die Kenntnis dieser Formel nicht vorausgesetzt werde so empfiehlt sich folgender Weg: Setzt man

$$u = \cos x + i \sin x,$$

so wird bekanntlich $\frac{1}{u} = \cos x - i \sin x$, also

$$u - \frac{1}{u} = 2 i \sin x. \quad (45$$

Nach dem Moivreschen Satze ist aber

$$u^k = \cos kx + i \sin kx \quad ; \quad \frac{1}{u^k} = \cos kx - i \sin kx,$$

folglich

$$u^k - \frac{1}{u^k} = 2 i \sin kx. \quad (46$$

Wenn man nun $\left(u - \frac{1}{u}\right)^{2n-1}$ bildet, so wird nach dem binomischen Satze:

$$\left(\frac{1}{u}\right)^{2n-1} = u^{2n-1} - (2n-1)_1\, u^{2n-3} + (2n-1)_2\, u^{2n-5} - \ldots + \ldots (-1)^{n-1} (2n-1)_{n-1}\, u + (-1)^n (2n-1)_n \frac{1}{u}$$

$$+ \ldots - \frac{1}{u^{2n-1}}$$

er jedenfalls $(2n-1)_{n-1+k} = (2n-1)_{n-k}$ ist, so lässt sich die vorige Gleichung schreiben:

$$\left(\frac{1}{u}\right)^{2n-1} = \left(u^{2n-1} - \frac{1}{u^{2n-1}}\right) - (2n-1)_1 \left(u^{2n-3} - \frac{1}{u^{2n-3}}\right) + (2n-1)_2 \left(u^{2n-5} - \frac{1}{u^{2n-5}}\right) - \ldots + (-1)^{n-1} (2n-1)_{n-1} \left(u - \right.$$

man für die in Klammern stehenden Funktionen ihre Werte aus (45) und (46) ein, so erhält man die ang (44).

sollen beide Seiten von (44) nach Potenzen von x entwickelt werden. So ergiebt sich s:

$$2^{2n-2} \cdot \sin^{2n-1} x = 2^{2n-2}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)^{2n-1}.$$

die niedrigste Potenz von x wird x^{2n-1}, und ihr Faktor lautet: 2^{2n-2}. Für die rechte von (44) erhält man:

$$-1)_{n-1}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \ldots\right) - (2n-1)_{n-2}\left(3x - \frac{3^3 x^3}{3!} + \frac{3^5 x^5}{5!} - \ldots + \ldots\right)$$

$$+ (2n-1)_{n-3}\left(5x - \frac{5^3 x^3}{3!} + \ldots\right) - \ldots + (-1)^{n-1}\left((2n-1)x - \ldots\right)$$

nögen die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x auf der linken und rechten Seite 44) einander gleichgesetzt wersen. So ergeben sich folgende Gleichungen:

$$)_{n-1} - (2n-1)_{n-2}\, 3^{2k+1} + (2n-1)_{n-3}\, 5^{2k+1} - \ldots + \ldots + (-1)^{n-1} (2n-1)^{2k+1} = 0; \qquad \textbf{(47a)}$$

$$k = 0, 1, 2 \ldots, n-2.$$

en für $k = n-1$ ergiebt sich:

$$-1)! \left[(2n-1)_{n-1} - (2n-1)_{n-2}\, 3^{2n-1} + (2n-1)_{n-3}\, 5^{2n-1} - \ldots + \ldots + (-1)^{n-1} (2n-1)^{2n-1}\right] = 2^{2n-2} \quad \textbf{(4}$$

Nach dieser Hilfsbetrachtnng lässt sich das System (43) leicht lösen. Multipliziert man h die Gleichungen dieses Systems der Reihe nach mit $(2n-1)_{n-1}$, $-(2n-1)_{n-2}$, $(2n-1)_{n-3}$ $-1)^{n-1}$ und addiert nach erfolgter Multiplikation das ganze System, so wird der Faktor, :

$$(2n-1)_{n-1} - \frac{(2n-1)_{n-2}}{3} + \frac{(2n-1)_{n-3}}{5} - \ldots + \ldots \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

ktoren aller folgenden Unbekannten von x_2 bis x_n werden nach (47a) sämtlich der Null Der Faktor endlich von x_{n+1} wird nach (47b) gleich $(-1)^{n-1} \cdot (2n-1)!\, 2^{2n-2}$. Man also durch Ausführung der verlangten Addition, wenn man noch für x_1 und x_{n+1} ihre aus (42) einsetzt und (40) anwendet, das Resultat:

$$_{2n,1}\left[(2n-1)_{n-1} - \frac{(2n-1)_{n-2}}{3} + \frac{(2n-1)_{n-3}}{5} - \ldots + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right] - \frac{2^{2n-2}}{2n \cdot (2n+1)}. \qquad \textbf{(48)}$$

eraus folgende Wert von $b_{2n,1}$ weicht scheinbar von dem in (41) gefundenen durchaus ie Zurückführung auf die Form (41) geschieht auf folgende Weise: Es soll in Formel ie, wie oben bemerkt, für beliebige r Gültigkeit besitzt, 2n an Stelle von n gesetzt n. So erhält man:

$$\frac{1}{r-1} - \frac{(2n-1)_1}{2r-1} + \frac{(2n-1)_2}{3r-1} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-1)_{n-1}}{nr-1} + (-1)^n \frac{(2n-1)_n}{(n+1)r-1} + \ldots -$$
$$= \frac{(2n-1)!\ \ r^{2n-1}}{(r-1)(2r-1)(3r-1)\ldots\ (2nr-1)}$$

In dieser Gleichung möge für r der Wert $\frac{2}{2n+1}$ gesetzt werden, so wird der Nenner

$$kr-1 = \frac{2k}{2n+1} - 1 = -\frac{2n-2k+1}{2n+1}$$
$$= \frac{2k-2n-1}{2n+1}.$$

Also wird z. B.

$$\begin{array}{l|l} r-1 = -\frac{2n-1}{2n+1}, & 2nr-1 = \frac{2n-1}{2n+1}, \\ 2r-1 = -\frac{2n-3}{2n+1}, & (2n-1)r-1 = \frac{2n-3}{2n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ nr-1 = -\frac{1}{2n+1}, & (n+1)r-1 = \frac{1}{2n+1}, \end{array}$$

Wenn man jetzt noch die so umgeformte Gleichung (49) mit dem Faktor $\frac{1}{2n+1}$ multiplizi

so nimmt sie folgende Gestalt an:

$$\frac{-1}{2n-1} + \frac{(2n-1)_1}{2n-3} - \frac{(2n-1)_2}{2n-5} + \ldots - \ldots (-1)^n \frac{(2n-1)_{n-1}}{1} + (-1)^n \frac{(2n-1)_n}{1} + \ldots -$$
$$= \frac{(2n-1)!\ \ 2^{2n-1}}{(-1)^n \cdot (2n-1)^2 \cdot (2n-3)^2 \ldots 1^2}.$$

Da aber $(2n-1)_{n-1+k} = (2n-1)_{n-k}$ ist, so lässt sich die linke Seite dieser Gleichung n

erheblich vereinfachen durch Zusammenziehung von je zwei Gliedern; man erhält:

$$-\frac{1}{2n-1} + \frac{(2n-1)_1}{2n-3} - \frac{(2n-1)_2}{2n-5} + \ldots - \ldots + (-1)^n \frac{(2n-1)_{n-1}}{1} = \frac{(2n-1)!\ \ 2^{2n-1}}{(-1)^n \cdot (2n-1)^2 \cdot (2n-}$$

Diese Gleichung wäre nur noch mit $(-1)^n$ zu multiplizieren, damit ihre linke Seite gleich d

Faktor von $b_{2n,1}$ in (48) wird. Setzt man für diesen Faktor den eben gefundenen Wert

so erhält man $b_{2n,1}$ wieder in derselben Form, wie in (41).

Schulnachrichten

über den Zeitraum von Ostern 1897 bis Ostern 1898.

A. Chronik.

Das gegenwärtige Schuljahr wurde am 26. April in der herkömmlichen Weise eröffnet. seinem Verlauf brachte es der Anstalt viel Erfreuliches, war aber nicht frei von Heim-hungen und Verlust. Auch erlitt der Unterrichtsbetrieb verschiedene Störungen.

Bald nach Beginn des neuen Schuljahres, am 25. Mai, wurde uns ein lieber und streb-ner Schüler, der zu schönen Hoffnungen berechtigte, der Obertertianer Alfred Rösch, ein n des Herrn Oberförster Rösch in Sitzendorf, im Alter von 13 Jahren durch den Tod ent-en. Dem so früh Heimgegangenen gaben alle Lehrer und Schüler unseres Gymnasiums letzte Geleit. Auch wurden drei unserer Schüler ernster Erkrankungen halber genötigt, hrere Monate der Schule fern zu bleiben. Von ansteckenden Krankheiten blieben wir schont.

Während der Monate August und September war Herr Oberlehrer Dr. Bühring im ftrage des Fürstlichen Ministeriums mit der Einrichtung und Katalogisierung des hiesigen stlichen Archivs beschäftigt und erteilte in dieser Zeit nur den Geschichtsunterricht in der ma; seine übrigen Unterrichtsstunden wurden bis zum Schluss des Sommerhalbjahrs Herrn ndidaten Otto Pröschold übertragen, der die ihm gestellte Aufgabe mit Geschicklichkeit l Erfolg löste.

Am 26. Oktober erkrankte Herr Professor Lederer so schwer, dass er nach einer r in Wiesbaden erst am 31. Januar wieder einzutreten imstande war. Seine Vertretung rnahmen die Kollegen.

Am 16. Mai und 31. Oktober feierten die Lehrer nebst ihren Angehörigen und die ein-egneten Schüler gemeinsam das heilige Abendmahl.

Die Pfingstferien dauerten vom 5. bis 12. Juni, die Sommerferien vom 3. bis 31. Juli.

Den Geburtstag Seiner Durchlaucht des Fürsten in gewohnter feierlicher Weise zu be-en, vereinigten wir uns am 7. August in der reich geschmückten Aula. Die Festrede des rn Professor Dr. Grosse lieh zunächst den Empfindungen der Freude und des Dankes und ern innigen Wünschen für das ungetrübte Wohlsein Seiner Durchlaucht Ausdruck und ver-itete sich dann über Zeus-Juppiter in der Mythologie und dessen hauptsächlichste Darstellungen ler griechischen und griechisch-römischen Kunst. An die Rede schlossen sich deklamatorische träge von Schülern aus allen Klassen. Die Festgesänge wurden vom Chor der Anstalt vor-agen.

Den Jahrestag der Schlacht von Sedan feierten wir in der seit 1872 üblichen Weise, Vorabend durch einen Fackelzug und am 2. September durch einen öffentlichen Schulaktus; diesem entwarf der Primaner Engelmann in freiem Vortrage ein Lebensbild des Frei-rn vom Stein.

Die Herbstferien währten vom 27. September bis 9. Oktober, die Weihnachtsferien vom Dezember bis 6. Januar.

Bei der allgemeinen Gedächtnisfeier für die Wohlthäter unseres Gymnasiums am 25. N vember hielt Herr Oberlehrer Hallensleben die Rede über das Thema: Die Entwicklu des deutschen Kirchenliedes bis auf Luthers Zeit. Zu den Vorträgen der Schüler gehörte Gedicht des Primaners Bachmann. Bei dieser Feier werden die Schüler genannt, denen Stipendien verliehen wurden. Die jährlich zu verteilende Summe beträgt 675 M.

Eine besondere Gedächtnisfeier findet alle zwei Jahre am 1. Dezember nachmitta statt für den Kaiserlich Russischen Geheimrat von Beck. Dieser grosse Wohlthäter unse Anstalt wurde in Arnstadt am 10. März 1768 geboren und erhielt seine Gymnasialbildung hi in den Jahren 1778 bis 1788. Das Andenken an ihn und an seine Tochter, Frau Staatsminist von Brock in Petersburg, welche bei ihrer Anwesenheit in Arnstadt am 13. September 18 die Stiftung ihres Vaters noch um 1000 M. erhöhte, erneuerte Herr Professor Falke in sein Rede über die Kant-Laplacesche Hypothese von der Entstehung des Weltsystems.

Am 27. Januar wurde der Geburtstag Seiner Majestät des Kaisers Wilhelm II. dur einen öffentlichen Festaktus gefeiert. Nach einleitendem Gesange schilderte der Primaner J hannes Müller in freier Rede die Entwicklung der heutigen deutschen Marine seit 18 Nach der Rede wurden zwei dramatische Scenen aus Wildenbruchs König Heinrich vorgefü und einige vaterländische Gedichte vorgetragen. Den Schluss der Feier bildete der Vortr des Sanges an Aegir.

Am 16. September und am 15. März fand unter dem Vorsitz des Herrn Oberkonsistori rat Helm die mündliche Prüfung der Abiturienten statt.

Durch die Ministerialverordnung vom 19. Februar 1898 sind für den Besuch der Gy nasien folgende Schulgeldsätze festgestellt.

Beim Eintritt in ein Gymnasium des Fürstentums ist ein Eintrittsgeld von sechs Ma zu entrichten.

Das Schuljahr beginnt mit dem 1. April. An Schulgeld ist jährlich zu entrichten f den Besuch

a. der Prima 78 M.
b. der Sekunda 72 „
c. der Tertia 66 „
d. der Quarta 60 „
e. der Quinta 54 „
f. der Sexta 48 „

Für diejenigen Schüler der drei oberen Klassen, welche nicht die Staatsangehörigkeit im Fü stentum Schwarzburg-Sondershausen besitzen, oder deren Eltern nicht ihren dauernden Aufentha in einem Orte des Fürstentums genommen haben, erhöht sich das jährliche Schulgeld um 12

Das Eintrittsgeld und Schulgeld ist praenumerando, das letztere in vierteljährlich Fristen und gleichen Anteilen zu entrichten.

Schüler, deren Vater an der von ihnen besuchten Anstalt als Lehrer wirkt, sind unt Voraussetzung der Würdigkeit von der Zahlung des Schulgeldes befreit; auch bleibt unt derselben Voraussetzung, wenn drei oder mehr Brüder gleichzeitig ein Gymnasium besuche einer derselben von der Zahlung des Schulgeldes befreit.

Bei bescheinigter Bedürftigkeit kann Erlass des Schulgeldes für Schüler bewilligt werde wenn sie sich einer solchen Vergünstigung durch Anlagen, Fleiss und gutes Betragen dauer würdig erweisen.

Die Anzahl der Freischüler, abgesehen von den Söhnen der an derselben Anstalt wirkenden Lehrer, darf zehn Prozent der Schülerzahl der betreffenden Anstalt nicht übersteigen. Die Gesuche um Schulgelderlass sind für jedes Schuljahr und zwar spätestens bis zum Beginn desselben bei dem Leiter der Anstalt anzubringen.

Am Schluss des Schuljahres wird Herr Oberlehrer Dr. Mohrmann nach dreijähriger Wirksamkeit unsere Anstalt verlassen, um eine Oberlehrerstelle am Stadtgymnasium in Halle zu übernehmen. Der scheidende Kollege, der mit vielseitigem und gründlichem Wissen eine würdige Auffassung seines Berufs und volle Hingebung verbindet, verstand es das Interesse der Schüler zu wecken und ihre Ausbildung in erfreulicher Weise zu fördern.

In die erledigte Stelle ist Herr Oberlehrer Dr. Rudolphi aus Oberstein a. d. Nahe berufen, der mit Beginn des neuen Schuljahres eintritt.

Am 22. März verschied ein hochangesehener früherer Schüler unserer Anstalt, der ihr eine unveränderte Anhänglichkeit bis an sein Lebensende bewahrt hat, der Kaiserliche Gesandte in Teheran Dr. jur. Karl Wilhelm Günther Freiherr von Gärtner-Griebenow, im Alter von 42 Jahren. Geboren zu Berlin am 7. April 1857 besuchte er in den Jahren von 1868 bis 1875 unser Gymnasium von der Quarta ab bis zum Abiturientenexamen, widmete sich dann nach beendigtem Studium der Rechte der diplomatischen Laufbahn. Nachdem er von 1890 an erst im Haag, später in Madrid als Legationsrat thätig gewesen war, wurde er 1894 zum Kaiserlichen Generalkonsul in Kalkutta ernannt. Im Dezember 1895 erfolgte seine Ernennung zum Kaiserlichen Gesandten in Teheran. Sein früher Tod erfüllt uns alle mit tiefer Wehmut.

B. Behandelte Lehrgegenstände.

Prima. Klassenlehrer: Der Direktor.

Religionslehre 2 St. Behandlung des Johannesevangeliums unter Zugrundelegung des griechischen Textes; Kirchengeschichte nach Holzweissig; Wiederholung der 5 Hauptstücke des Katechismus und der früher gelernten Kirchenlieder; in jedem Halbjahr eine schriftliche Arbeit. Weise.

Deutsch 3 St. Litterarturgeschichte von Martin Opitz bis Schiller und Göthe. Lektüre und Privatlektüre aus Schiller und Göthe. Freie Vorträge. Aufsätze über folgende Themen: 1. Der Ruhm der Vorfahren ist der Hort der Enkel. 2. Wie kommt in Schillers „Räubern“ der umsturzsüchtige Geist der Zeit zum Ausdruck? 3. Seit das Paradies verloren, ist die Arbeit schenlos, doch wird aus der Arbeit Schoss die Zufriedenheit geboren (Klassenarbeit). 4. Die Freundschaft zwischen Don Karlos und dem Marquis Posa. 5. „Das Leben ist kurz“ spricht der Weise, spricht der Thor. 6. Wo viel Freiheit, ist viel Irrtum, doch sicher ist der schmale Weg der Pflicht. 7. Wo kann der Mensch Trost in seinem Leiden finden? 8. Das Heldentum der Iphigenie. — Das Thema für die Abiturienten lautete bei der Michaelisprüfung: Warum erscheint uns in Schillers „Don Karlos“ das Los Philipps beweinenswert? Ostern: Was unten tief dem Erdensohne das wechselnde Verhängnis bringt, das schlägt an die metallne Krone, die erbaulich weiter klingt. Lederer (Grosse).

Latein. Im Sommer 8, im Winter 7 St. Horaz Od. III u. IV. Epod. 1 u. 2, Epist. 1—10. Cicero Tuscul. disput. I. u. V. Tacitus, Germania. Besprechung der Privatlektür Ciceros Briefe (nach Aly) und Tacit. Dialogus de oratoribus. Übungen im unvorbereitete Übersetzen. Grammatisches und Stilistisches. Kleinere lateinische Aufsätze im Anschluss a die Lektüre. Wöchentlich ein Extemporale. Kroschel.

Griechisch. Im Sommer 6, im Winter 7 St. Homer Ilias (2. Hälfte). Sophokle Antigone. Kroschel. Thukydides, Buch 2, Platos Protagoras. Alle 14 Tage eine schriftlich Klassenübersetzung aus dem Griechischen ins Deutsche. Wiederholung der Grammatik. Gross

Französisch 2 St. Nach der französischen Sprachlehre von Ploetz—Kares Kapit 49—62 und Kapitel 72 u. 73 durchgenommen. Häufige Übungen im mündlichen Übersetze aus dem Deutschen ins Französische. Lektüre im Sommer: l'Avare par Molière, im Winte Le siège de Paris par Sarcey. Alle 14 Tage eine schriftliche Klassenarbeit. Wagner.

Englisch zusammen mit Sekunda A (Teilnahme freiwillig) 2 St. Im Sommer Wiede holung und Einübung der Formenlehre nebst häufigen Übungen im Übersetzen aus dem Deutsche ins Englische. Im Winter Durchnahme der Syntax nach Sonnenburgs Grammatik, Lektion 3 bis 41. Lektüre: History of England by O. Goldsmith. Wagner.

Hebräisch 2 St. Lektüre des 2. Buches Samuelis und ausgewählter Psalmen. Wiede holung der Formenlehre. Das Wichtigste aus der Syntax im Anschluss an die Lektüre. Mülle

Geschichte 3 St. Geschichte der Neuzeit vom Westfälischen Frieden bis zum Jah 1888 im Anschluss an das Lehrbuch von Jänicke. Bühring.

Philosophische Propädeutik 1 St. im Sommer. Logik im Anschluss an das Lehr buch von Rumpel. Lederer.

Mathematik 4 St. Fortgesetzte Übungen in Arithmetik, Stereometrie und Trigono metrie. Kombinationslehre, der allgemeine binomische Lehrsatz, die logarithmischen Reihe einiges aus der Lehre von den komplexen Zahlen, kubische Gleichungen. Falke.

Physik 2 St. Mathematische Geographie und Astronomie. Falke.

Zeichnen zusammen mit Sekunda (Teilnahme freiwillig) 1 St. Entwerfen und Schat tieren nach Modellen. Projektion. Planzeichnen. Blumen und Früchte in Farbe. Koppeheel

Gesang 1 St. Geistliche und weltliche Lieder. Choräle in rhythmischer und plane Form. Kantaten und Motetten für gemischten Chor und Männerchor. Finn.

Sekunda. Abteilung A. Klassenlehrer: Prof. Dr. Müller.
Abteilung B. Klassenlehrer: Prof. Lederer.

Religion 2 St. Behandlung des Matthäusevangeliums und der Apostelgeschichte Wiederholung des Katechismus und früher gelernter Kirchenlieder: in jedem Halbjahr ein schriftliche Arbeit. Weise.

Deutsch 3 St. Grundzüge der mittelhochdeutschen Laut- und Formenlehre im An schluss an die Lektüre des Nibelungenliedes. Lektüre und Privatlektüre aus Klopstock, Göthe Schiller, Lessing. Freie Vorträge. Übungen im Deklamieren. Aufsätze über folgende Themen 1. Arbeit und Fleiss, das sind die Flügel, die führen über Strom und Hügel. 2. Charakteristik Georgs nach Göthes Götz von Berlichingen. 3. Die Gans. (Nach einer Fabel in Verse zu bringen). 4. Worin hat die unvergleichliche Berühmtheit Friedrichs des Grossen ihren Grund? 5. Warum ist der Rhein der Lieblingsstrom des deutschen Volkes? 6. Der Durchzug der Salz-

ger durch Arnstadt, in Anlehnung an Göthes Hermann und Dorothea geschildert. 7. Was nag uns teilweise mit Hagens Charakter zu versöhnen. 8. Klassenaufsatz: Abt. A. Verhung Hannibals mit Napoleon I. — Abt. B. Die geschichtliche Bedeutung Napoleons I. derer (Bühring).

Latein 8 St. Cicero: de imperio Cn. Pompei. Livius I. Virgil Aeneis IV und V. derholung der Grammatik nach Seyffert. Wöchentlich ein Extemporale, alle 14 Tage ein rcitium. Müller.

Griechisch 7 St. Abt. A. Homers Odyssee B. 4—12. Lederer. Xenophons Hella B. 1, 4, 5. Herodot nach der Ausgabe von Abicht. Memorabilien nach der Ausgabe Bünger. Syntax nach Seyffert-v. Bamberg. Wöchentlich ein Exercitium oder Extemporale. ler. Abt. B.: Homers Odyssee B. 4, 6, 7, 8. Xenophons Anabasis B. 6 u. 7. Hellenica 1. derer.

Französisch 3 St. Nach der französischen Sprachlehre von Ploetz—Kares Kapitel 2-48. Häufige mündliche Übungen im Übersetzen aus dem Deutschen ins Französische. türe: Histoire de France de 1560—1643 par Duruy. Alle 14 Tage eine schriftliche Klassenit. Wagner.

Englisch Abt. B. 2 St. Laut- und Formenlehre der englischen Grammatik nach Sonnen-, Lektion 1—23. Häufige Übungen im mündlichen Übersetzen im Anschluss an das Übungsh der Grammatik. Wagner.

Hebräisch Sekunda A. 2 St. Grammatik nach Gesenius—Kautzsch (Kleine Ausgabe) dem Übungsbuch von Kautzsch. Müller.

Geschichte und Geographie. Abt. A. 3 St. Griechische und römische Geschichte Anschluss an das Lehrbuch von Jänicke. Müller. Abt. B. 3 St. Deutsche Geschichte Friedrich dem Grossen bis zur Gegenwart nach dem Lehrbuch von Jänicke. Ausserdeutsche ten Europas nach dem Leitfaden von Daniel. Lederer.

Mathematik Abt. A. 4 St. Wiederholung der Lehre von den Gleichungen ersten und ten Grades, und von dem logarithmischen Rechnen. Die Planimetrie bis zur Konstruktion regelmässigen Zehnecks und Fünfzehnecks. Trigonometrie. Einiges aus der Stereometrie. ke. — Abt. B. Wiederholung der Kreislehre und Flächengleichheit. Berechnung der geraden Figuren und des Kreises. Proportionalität der Strecken. Die Hauptsätze von den Poen und Wurzeln, Logarithmenrechnen, Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren rekannten und einfache quadratische Gleichungen. Berechnung der einfachsten Körper. hmetische Aufgaben von Fenkner. Mohrmann.

Physik 2 St. Sommer: Allgemeine Eigenschaften der Körper und Mechanik der festen flüssigen Körper. Winter: Magnetismus und Elektrizität. Vorschule der Experimentalsik von Börner. Mohrmann.

Zeichnen und Singen siehe Prima.

Tertia. Klassenlehrer: Prof. Dr. Grosse.

Religionslehre 2 St. Biblische Geschichte des Neuen Testaments wiederholt; Bilder der Geschichte der christlichen Kirche bis zur Reformation nach Schäfer; Einprägung und andlung des 4. und 5. Hauptstückes; Wiederholung der ersten 3 Hauptstücke; Bibelsprüche Kirchenlieder, teils wiederholt, teils neu gelernt; Kirchenjahr; in jedem Halbjahr eine iftliche Arbeit. Weise.

Deutsch 3 St. Lektüre und Erklärung ausgewählter Prosastücke und Gedichte a dem Lesebuche von Paulsieck—Muff. Übungen in der Dispostion und Deklamation. Freie V träge. Alle 3 Wochen eine schriftliche Arbeit. Hallensleben.

Lateinisch 8 St. Caesar de bello Gallico, Buch VII u. I. Ovid, Ausgabe von S belis, das Leben Ovids nach der Zusammenstellung in der Einleitung, Phaethon, Niobe. Wied holung und Erweiterung der Syntax nach der Grammatik von Seyffert-Fries und dem Übun buche von Ostermann-Müller. Wöchentlich ein Extemporale. Grosse.

Griechisch 7 St. Abt. A. Verba auf $\mu\iota$ und die unregelmässigen Verba nach W seners Paradigmen. Wiederholung und Erweiterung der Formenlehre. Übersetzen aus Wesen Elementarbuch. Xenophons Anabasis Buch I. Wöchentlich ein Extemporale. Hallenslebe Abt. B. Das Nomen und das regelmässige Verbum auf ω. Übersetzen aus dem Element buch von Wesener. Wöchentlich ein Extemporale, daneben häufige Formenübungen. Gross

Französisch 3 St. Elementargrammatik nach dem kurzen Lehrgang der französisch Sprache von Ploetz-Kares, Kapitel 42—51. Im Anschluss hieran die französische Sprachleh von Ploetz—Kares, Kapitel 1—23. Zahlreiche Übungen im mündlichen und schriftlichen Üb setzen im Anschluss an das Lehrbuch. Alle 14 Tage eine schriftliche Klassenarbeit. Wagn

Geschichte 2 St. Deutsche Geschichte vom Auftreten der Cimbern und Teuton bis zur Reformation. Bühring.

Erdkunde 1 St. Erdkunde von Deutschland und seinen Kolonien nach dem Leitfad von Daniel, dem Atlas von Debes und dem Kleinen Kolonialatlas. Bühring.

Mathematik Abt. A. 3 St. Arithmetik. Gleichungen mit 1, 2 und mehr Unbekannte die Grundbegriffe aus der Lehre von den Proportionen und Potenzen. Planimetrie fortgeset bis zur Verwandlung der Figuren. Falke. — Abt. B. Arithmetik. Die 4 Grundrechnung arten mit absoluten und algebraischen Zahlen. Arithmetische Aufgaben von Fenkner. Plan metrie: Lehrbuch von Töpfer bis § 57. Mohrmann.

Physik Abt. A. 2 St. Die wichtigsten Grundbegriffe aus Wärmelehre und Chemi Anthropologie. Falke.

Naturbeschreibung Abt. B. 1 St. Mineralogie. Falke.

Zeichnen Abt. A. 1 St., Abt. B. 2 St. Übungen im Schattieren mit Kreide. Pl stische Ornamente nach Gypsmodellen. Flachornamente in Farbe. Koppeheel.

Singen 1 St. Die besten Sänger vereint mit Prima und Sekunda, die übrigen m Quarta. Finn.

Quarta. Klassenlehrer: Oberlehrer Hallensleben.

Religionslehre 2 St. Biblische Geschichte des Alten Testaments nach Schäfer; Ein prägung und Behandlung des 3. Artikels und des 3. Hauptstückes; Wiederholung des 1. Haup stückes und des 1. und 2. Artikels; biblische Bücher; Bibelsprüche und Kirchenlieder, tei wiederholt, teils neu gelernt; jedes Halbjahr eine schriftliche Arbeit. Weise.

Deutsch 3 St. Erklärung von Lesestücken und Gedichten aus dem Lesebuch vo Paulsieck-Muff. Übungen im Vortrag von Gedichten. Satzlehre. Alle 3 Wochen ein Aufsat Hallensleben.

Latein 8 St. Cornelius Nepos: Miltiades, Themistocles, Aristides, Pausanias, Cimo Lysiander, Alcibiades und Epaminondas. Wiederholung der Formenlehre, die wichtigsten Ko

nktionen, consecutio temporum, Kasuslehre nach der Grammatik von Seyffert-Fries und dem bungsbuch von Hennings-Grosse. Wöchentlich ein Extemporale. Hallensleben.

Französisch 5 St. Elementargrammatik nach dem kurzen Lehrgang der französischen prache von Ploetz-Kares: Kap. 1—42. Häufige mündliche und schriftliche Übungen im Anhluss an die Lese- und Übungsstücke des Lehrbuches. Alle 14 Tage ein Extemporale Vagner.

Geschichte 2 St. Im Sommerhalbjahr griechische Geschichte, im Winterhalbjahr mische Geschichte. Wagner.

Erdkunde 2 St. Asien, Afrika, Amerika und Australien nach dem Leitfaden von aniel. Wagner.

Mathematik 2 St. Die Grundbegriffe der Planimetrie, Winkel, Dreieck, Kongruenz, ie Sätze von den durchschnittenen Parallelen. Falke.

Rechnen 2 St. Fortgesetzte Übungen in den früher erlernten Rechnungsarten, Dreitz mit umgekehrten Verhältnissen, zusammengesetzter Dreisatz, zusammengesetzte Zins- und abattrechnung, Wechselrechnung, Gesellschaftsrechnung, Mischungsrechnung, Terminrechnung. alke.

Naturbeschreibung 2 St. Botanik: Charaktere der wichtigsten Familien der Blütenflanzen, entwickelt an der Betrachtung der wichtigsten einheimischen Vertreter der Familien. bungen im Bestimmen. Zoologie: Systematische Wiederholung der Wirbeltiere. Die Gliederere mit ausführlicherer Betrachtung von Bau und Lebenserscheinungen der Käfer und Schmetrlinge. Mohrmann.

Zeichnen 2 St. Die gebogene Linie. Der Kreis. Kreisfiguren. Oval und Ellipse. oppelbogen. Stern- und Rosettenfiguren. Blumen- und Pflanzengebilde. Gefässformen. Spiralnien und ihre Entwicklung zu den Grundzügen des Ornamentes. Stilisierte Pflanzen. Ornaente verschiedener Stilarten. Einübung der griechischen Schrift. Koppeheel.

Singen 1 St. Choralgesang in rhythmischer und planer Form. Treffübungen nach m Turnliederbuch und Volkslieder. Finn.

Quinta. Klassenlehrer: Oberlehrer Dr. Bühring.

Religionslehre 2 St. Biblische Geschichte des Neuen Testamentes nach Schäfer. iederholung des ersten und Erklärung des zweiten Hauptstückes. Bibelsprüche und Kirchender. Müller.

Deutsch 3 St. Besprechungen prosaischer und poetischer Stücke aus dem Lesebuch n Paulsieck-Muff. Übungen im Vortrag an einer Anzahl gelernter Gedichte. Aufsätze, Satzungen (einfacher und zusammengesetzter Satz). Diktate und zwar alle 14 Tage eine schriftche Arbeit. Bühring.

Latein 8 St. Die unregelmässige Formenlehre nach der Grammatik Seyffert-Fries. ündliche und schriftliche Übersetzungen aus dem Lesebuch von Busch-Fries. Wöchentlich ein xtemporale. Bühring.

Erdkunde 2 St. Die Länder Europas mit Ausschluss des Deutschen Reiches nach aniels Leitfaden und Debes' Atlas. Bühring.

Geschichte 2 St. Erzählungen aus der griechischen und römischen Geschichte. Müller.

Rechnen 4 St. Wiederholung der vier Grundrechnungen der gemeinen Brüche. Denalbrüche und ihre Anwendung. Einfacher und zusammengesetzter Dreisatz mit geraden und

umgekehrten Verhältnissen. Zins- und Rabattrechnung, Gewinn- und Verlustrechnung. G sellschaftsrechnung. Bruchsatz, Verhältnisrechnung, Kettensatz. Finn.

Naturbeschreibung 2 St. Botanik: Pflanzen mit einfacherem Blütenbau. Z sammenfassung der Hauptvertreter der wichtigsten leichteren Familien. Zoologie: Säugetie und Vögel (nach Wossidlos Leitfaden). Grosse.

Zeichnen 2 St. Die gerade Linie, Richtung und Teilung derselben. Winkel u Winkelarten. Zickzack- und Mäanderzüge. Das Quadrat und Quadratfiguren. Bandforme Die Arten der Dreiecke. Zeichnen von sechs- und achteckigen Figuren. Mäanderbänder, Ban verschlingungen. Koppeheel.

Schreiben 2 St. Deutsche und lateinische Schrift in genetischer Folge in Wort und grösseren Vorschriften. Ziffernschreiben. Finn.

Singen 2 St. Fortsetzung der Notenkenntnis und Belehrungen über musikalisc Zeichen. Treffübungen nach Serings Notentafeln. Choralgesang in rhythmischer und plan Form, zweistimmige Lieder nach Erks Sängerhain. Einüben von Kantaten und Motetten. Fi

Sexta. Klassenlehrer: Oberlehrer Dr. Mohrmann.

Religionslehre 3 St. Biblische Geschichte aus dem Alten und Neuen Test mente nach Schäfer. Auswahl in Bezug auf das Kirchenjahr. Erklärung des ersten Haup stücks, dazu eine Anzahl Kirchenlieder und Bibelsprüche. Finn.

Deutsch 3 St. Lesen und Erklären ausgewählter Stücke aus dem Deutschen Les buch von Paulsieck-Muff. Nacherzählen der gelesenen Prosastücke, Vortrag auswendig gelernt Gedichte. Grammatische Übungen im Anschluss an den Anhang des Lesebuches. Rechtschreib Übungen durch Diktate. Mohrmann.

Latein 8 St. Regelmässige Formenlehre nach der Elementargrammatik von Seyffe und Fries. Übersetzen und Vokabellernen aus dem Lateinischen Elementarbuche von Henning Grosse. Extemporalien. Mohrmann.

Erdkunde 2 St. Geographische Grundbegriffe. Thüringen im Sommer, Deutsc land im Winter nach dem Leitfaden von Daniel und dem Atlas von Debes. Bühring.

Geschichte 1 St. Bilder aus der deutschen Geschichte im Anschluss an das Hilf buch von Jänicke und Hähnel. Bühring.

Rechnen 4 St. Übungen im gewöhnlichen Ziffernrechnen. Die vier Grundrec nungen in benannten Zahlen und in Brüchen. Bruchsatz. Gesellschaftsrechnung. Unse Masse, Gewichte und Hohlgemässe. Finn.

Naturbeschreibung 2 St. Botanik: Grundbegriffe der Pflanzenmorphologie i Anschluss an die Besprechung einheimischer Pflanzen mit einfachem Blütenbau. Zoologie: B trachtung des Körperbaues und der Lebensweise ausgewählter Vertreter aus der Klasse d Säuger. Mohrmann.

Schreiben 2 St. Deutsche und lateinische Schrift in genetischer Folge in Wort und grössern Vorschriften. Ziffernschreiben. Finn.

Singen 2 St. Notenkenntnis und Belehrungen über die notwendigsten Zeichen in d Musik. Treffübungen nach den Tafeln von Sering. Choralgesang in rhythmischer und plan Form. Lieder nach Erks Sängerhain. Kantaten und Motetten. Finn.

Über den Betrieb des Turnens und der Jugendspiele vergl. das Program von 1894 S. 33.

C. Lehrerkollegium.

Direktor Dr. Kroschel, Geh. Schulrat, Klassenlehrer der Prima.

Professor Falke, Lehrer der Mathematik und Physik.
„ Dr. Müller, Klassenlehrer der Sekunda A.
„ Lederer, Klassenlehrer der Sekunda B.
„ Dr. Grosse, Klassenlehrer der Tertia.
„ Dr. Wagner, Lehrer des Französischen und Englischen.
Oberlehrer Hallensleben, Klassenlehrer der Quarta.
„ Dr. Bühring, Klassenlehrer der Quinta.
„ Dr. Mohrmann, Klassenlehrer der Sexta.
Diakonus Weise, Religionslehrer für die obern und mittlern Klassen.
Kollaborator Finn, Lehrer für Gesang, Rechnen und Schreiben.
Den Zeichen- und Turnunterricht erteilt Kollaborator Koppeheel.

D. Lehrmittel.

Für die Lehrerbibliothek wurden angeschafft die Fortsetzungen der Zeitschrift für das Gymnasialwesen, der Jahrbücher für Philologie und Pädagogik, der geographischen Mitteilungen, des Grimmschen Wörterbuchs, der Lehrproben und Lehrgänge; Archäologischer Anzeiger; H. Wiessowa, Paulys Encyclopädie der klassischen Altertumwissenschaft Bd. 1 u. 2, Roscher, Lexikon der griechischen und römischen Mythologie 2, 2. Abt.; L. Bellermann, Schillers Dramen, 2. Bde., Vischer, Das Schöne und die Kunst; Matthias, Sprachleben und Sprachschäden; Theophrasts, Charakteres, Leipzig. Teubner 1897; M. Rothstein, Die Elegien des Sext. Propertius 2 Bde.; W. Oncken, Unser Heldenkaiser; Festschrift zum 100jähr. Geburtstage Kaiser Wilhelms des Grossen; H. v. Zwiedineck—Südenhorak, Deutsche Geschichte von 1806—1815 u. a. — An Geschenken gingen für die Bibliothek ein vom Fürstlichen Ministerium: A. Conze, Jahresbericht über die Thätigkeit des Kaiserl. Deutschen archäologischen Institut. 1897. M. Schneidewin, Die antike Humanität. Berlin 1897 und Offener Brief von Prof. Theobald Ziegeler über antike Humanität. Leipzig 1897.

Die Schülerbibliothek wurde aus den von der Beckschen Alexanderstiftung gewährten Mitteln vermehrt und erneuert.

E. Schüler.

Die Gesamtzahl der Schüler, welche das Gymnasium im gegenwärtigen Schuljahr besuchten, beträgt 181. Neu aufgenommen wurden 29 und zwar zu Ostern 21, im Laufe des Schuljahrs 8. Alle Schüler gehören der evangelischen Kirche an, ausser 2 Israeliten.

Verzeichnis der Schüler.

Ein dem Geburtsort auswärts geborener Schüler beigefügtes A zeigt an, dass deren Eltern gegenwärtig in Arnstadt ihren Wohnsitz haben; die mit * bezeichneten sind zu Michaelis abgegangen.

Prima.

1. *Fritz Mekus aus Halle (Saale).
2. *Kurt Schramm aus Arnstadt.
3. *Arthur Wöller aus Kühnhausen.
4. *Alfred Theuerkauf aus Waltershausen (A.).
5. *Alfred Keil aus Arnstadt.
6. *Ernst Zetsche aus Ilmenau.
7. Arthur Engelmann aus Arnstadt.
8. Walther Börner aus Greussen.
9. Arnold Kramer aus Grossballhausen.
10. Johannes Müller aus Plaue.
11. Felix Gräser aus Arnstadt.
12. Hermann Schmidt aus Darmstadt (A.)
13. Otto Hamann aus Halsbach i. S.
14. Fritz Bachmann aus Arnstadt.
15. Otto Zeitz aus Greussen.
16. Walther Theuerkauf aus Königsee (A.)
17. Ernst Debes aus Burgtonna.
18. Gustav Ettling aus Dingelstedt (A.)
19. Georg Leib aus Arnstadt.
20. Walther Engel aus Langewiesen.
21. Eberhard von Puttkamer aus Jagow.
22. Walther Gross aus Vacha.
23. Karl Deahna aus Hildburghausen.
24. Alphons Rudolf aus Eischleben.

Sekunda.

1. Karl Hartung aus Trassdorf.
2. Hugo Trautmann aus Marlishausen.
3. Hermann Arnold aus Kornhochheim.
4. Wilhelm Beetz aus Langewiesen (A.).
5. Rudolf Grossmann aus Berlin.
6. Max Sorge aus Oberweissbach.
7. Otto Stolle aus Grossbreitenbach.
8. Felix Kuberka aus Arnstadt.
9. Arthur Meng aus Dietharz (A.)
10. Ernst Buddensieg aus Greussen.
11. Paul Osterloh aus Halle.
12. Fritz Witt aus Leipzig (A).
13. Kurt Meurer aus Königsee.
14. Rudolf Braune aus Gebesee.
15. Ernst von Mittelstaedt aus Altenkirchen.
16. Erich Giesecke aus Nordhausen (A.)
17. Kurt Macheleidt aus Leutenberg.
18. Gustav Eckhardt aus Ufhoven.
19. Wolfgang von Schierholz aus Plaue.
20. Johannes Eymess aus Arnstadt.
21. Johannes Bippart aus Hermannshof (A.)
22. Erich Hülsemann aus Arnstadt.
23. Rudolf Buddensieg aus Greussen.
24. Edmund Mohring aus Trassdorf.
25. Walther Hotzel aus Grossbreitenbach.
26. *Wilibald Kirsten aus Elxleben.
27. Karl Heinemann aus Marlishausen.
28. Georg Fickewirth aus Langewiesen.
29. Walther Braun aus Zöbigker.
30 Otto Köhler aus Arnstadt.
31. Paul Schuder aus Grosskeula.
32. Johannes Bachmann aus Arnstadt.
33. Georg Witt aus Arnstadt.
34. Georg Brehme aus Möhrenbach.
35. Rudolf Gräser aus Arnstadt.
36. *Hermann Dietz aus Arnstadt.
37. Hermann Rosenbaum aus Arnstadt.
38. Paul Lederer aus Arnstadt.
39. Karl Liebe aus Artern.
40. Ulrich Brummi aus Loebejün.

Tertia.

1. Bernhard Grosse aus Arnstadt.
2. Walther Schuder aus Grosskeula.
3. Wilhelm Talsch aus Allstedt (A.)
4. Paul Lotze aus Halle a. S.
5. Paul Thieme aus Schweinbach.
6. Ernst Cramer aus Grossballhausen.
7. Nathanael Hager aus Dorfilm.
8. Max Möller aus Ettischleben.
9. Max Hilpert aus Dornheim (A.)
10. Kurt Barnstein aus Gebesee.
11. Wilhelm Wadsack aus Kirchengel.
12. Karl Börner aus Greussen.
13. Erwin Voigt aus Sitzendorf.
14. Kurt Grässer aus Plaue.
15. Johannes Ortloff aus Ilmenau.
16. Fritz Haase aus Rodewisch (A.)
17. Walther Minner aus Arnstadt.
18. Martin Brode aus Donndorf (A.)

Gustav Braune aus Schönfeld b. Artern.
Kurt Peter aus Königsee
Edgar Engel aus Langewiesen.
Emil Schmidt aus Bessungen (A.)
Max Lincke aus Grossbreitenbach.
Karl Schumann aus Grosshettstedt.
Max Kästner aus Liebenstein.
Gustav Gutzki aus Rackwitz (A.)
Erich Cämmerer aus Arnstadt.
Johannes Leupold aus Arnstadt.
Erich Grosse aus Arnstadt.
Erich Glaser aus Arnstadt.
Gustav Cramer aus Grossbreitenbach.
Richard Ellmann aus Siegelbach.

33. Max Paul aus Halle a. S. (A.)
34. Johannes Beetz aus Langewiesen (A.)
35. Albin Trefflich aus Espenfeld.
36. Hermann Minner aus Arnstadt.
37. Georg Lindemann aus Hannover.
38. Rudolf Rosenbaum aus Hirschbach.
39. Hugo Apfelstedt aus Angstedt.
40. Otto Mülverstedt aus Espenfeld.
41. Johannes Köhler aus Arnstadt.
42. Paul Metzner aus Königsee.
43 *Erich Brand aus Grossbehringen.
44. Erich Wiegand aus Altenfeld.
45. Walther Hirschmann aus Arnstadt.

Quarta.

. Kurt Wagner aus Arnstadt.
. Rudolf Kieser aus Arnstadt.
. Karl Keil aus Arnstadt.
. Hans Franke aus Arnstadt.
. Kurt Schuder aus Grosskeula (A.)
. Hugo Stössel aus Siegelbach.
. Paul Meusinger aus Elleben.
. Walther Liebmann aus Arnstadt.
. Walther Einert aus Arnstadt.
. Kurt Kraus aus Schweinfurt.
Paul Fleischmann aus Erfurt (A.)
Alexander Freysoldt aus Gräfenthal.
. Hans Theiss aus Ilmenau.
*Walther Voigt aus Arnstadt.
Johannes Hager aus Dorfilm.

16. Kurt Köhler aus Griesheim.
17. Paul Boll aus Arnstadt.
18. Ludwig Müller aus Arnstadt.
19. Ewald Frey aus Gebesee.
20. Wilhelm Meissner aus Stadtilm.
21. Karl Zschetzsche aus Arnstadt.
22. Hans Voigt aus Sitzendorf.
23. Fritz Ahrendts aus Arnstadt.
24. Max Stern aus Arnstadt.
25. Hermann Sterzing aus Arnstadt.
26. Oskar Grüning aus Zella St. Bl.
27. Erich Jacobi aus Ichtershausen.
28. Otto Kreitner aus Arnstadt.
29. Wilhelm Wehling aus Marlishausen.

Quinta.

Karl Woge aus Arnstadt.
Rudolf Herbst aus Arnstadt.
. Erich Gerstenhauer aus Arnstadt.
Ernst Theuerkauf aus Arnstadt.
Kurt Danziger aus Arnstadt.
Hermann Konther aus Plaue.
Erich Leupold aus Arnstadt.
. Adolf Conrad aus Gräfenroda (A.)
. Erich Wagner aus Arnstadt.
. Georg Recknagel aus Arnstadt.

11. Theodor Müller aus Oberweissbach.
12. Eugen Wagner aus Arnstadt.
13. Karl Domhardt aus Langewiesen.
14. Fritz Rieck aus Arnstadt.
15. Karl Hummel aus Bombay, Ostindien.
16. Oskar Hilpert aus Braunsrode (A.)
17. Erich Kühn aus Berlin (A).
18. Hans Kirsch aus Arnstadt.
19. Hugo Krapp aus Arnstadt.

Sexta.

. Fritz Hahne aus Leipzig (A.)
Ernst Metge aus Arnstadt.
. Johannes Hemleben aus Eyba.
. Ernst Mönch aus Rathenow (A.)
Hans Kieser aus Arnstadt.

6. Rudolf Malsch aus Schweina.
7. Kurt Graf aus Gräfenroda.
8. Hermann Meinhardt aus Worbis.
9. Armin Mülverstedt aus Marlishausen.
10. Johannes Lüdecke aus Makranstädt.

11. Hans Tischer aus Arnstadt.
12. Walther Cämmerer aus Arnstadt.
13. Walther Gelpke aus Dessau.
14. Karl Schmidt aus Arnstadt.
15. Arthur Dussdorf aus Waltersdorf.
16. Walther Krause aus Sondershausen.
17. Franz Schmidt aus Arnstadt.
18. Fritz Zetsche aus Ilmenau.
19. Walther Heyder aus Plaue.
20. Hermann Gölitz aus Wülfershausen.
21. Arthur Schmidt aus Arnstadt.
22. Herbert Dietz aus Arnstadt.
23. Erich Engelmann aus Arnstadt.
24. *Kurt Hopfe aus Oberweissbach.

Von den 12 Abiturienten dieses Schuljahrs widmen sich der Theologie 2, der Rechtswissenschaft, 5 der Medizin 1, der klassischen Philologie 1, dem Militärdienst 2, dem Bankfach 1. Die persönlichen Verhältnisse der einzelnen sind ersichtlich aus folgender Tabelle.

Name des Abiturienten.	Geburts- Zeit.	Geburts- Ort.	Konfession.	Stand des Vaters.	Dauer des Besuchs I	Dauer des Besuchs II	Studium oder Beruf.
a. Michaelis 1897							
1. Fritz Mekus	31. X. 76	Halle (S.)	ev.	Sanitätsrat	1½	2½	Medizin
2. Kurt Schramm	10. VI. 78	Arnstadt	ev.	Kollaborator a. D.	7½	2	Jura
3. Arthur Wöller	10. X. 77	Kühnhausen	ev.	Lehrer in Ringleben	8½	2	Theologie
4. Alfred Theuerkauf	27. VIII. 77	Waltershausen	ev.	Postsekretär a. D. in Arnstadt	9	2	Jura
5. Alfred Keil	17. VIII. 79	Arnstadt	ev.	Rentamtmann	9½	2	Militärdienst
6. Ernst Zetsche	21. VI. 77	Ilmenau	ev.	Fabrikbesitzer	6½	2	Jura
b. Ostern 1898							
7. Arthur Engelmann	28. IV. 79	Arnstadt	ev.	Fabrikbesitzer	8	2	Philologie
8. Walther Börner	28. IX. 79	Greussen	ev.	Oberamtmann	6	2	Jura
9. Arnold Cramer	1. XII. 79	Grossballhausen	ev.	Pfarrer	8	2	Jura
10. Johannes Müller	24. V. 79	Plaue	ev.	Pfarrer in Oberndorf	9	2	Militärdienst
11. Felix Gräser	13. VIII. 79	Arnstadt	ev.	Bürgerschullehrer	9	2	Theologie
13. Herm. Schmidt	21. XI. 78	Darmstadt	ev.	Briefträger in Arnstadt	9	2	Kaufmann

Das Zeugnis für den einjährig-freiwilligen Dienst wurde 17 Sekundanern zuerkannt, davon traten 3 in das praktische Leben ein.

Von unsern frühern Schülern übersandten uns: Herr Geheimer Kirchenrat D. Stade seine Rektoratsrede über die Entstehung des Volkes Israels; Herr Sanitätsrat Dr. Heyder seine Untersuchungen über Croup und Diphtherie; Herr Dr. P. Schadow seine Arbeit über eine attische Grablekythos, und Herr Dr. L. Schuchard seine Dissertation, Quantitative Bestimmung von Kalk-, Magnesia- und Phosphorsäure-Ausscheidung. Ferner widmete Herr Stud. med. Fritz Lassen dem Klassenzimmer der Prima eine grosse Photographie der Laokoon-Gruppe.

Ausserdem möge eine interessante Schilderung, die Freiherr von Gärtner-Griebenow (vergl. Seite 21) von seiner Reise nach Teheran in einem seiner Briefe an den Unterzeichneten gab, hier wörtlich angeführt werden:

. . . . . „Interessieren wird es Sie auch, etwas von meiner Reise zu hören, um so mehr, als ich dabei die bis jetzt bekannten ältesten klassischen Stätten der Welt besucht habe.

Am 20. Februar (1896) fuhr ich zu Schiff von Bombay über Karáchi, Maskát, Bender-Abbas, Linga, Bahraïn, Buschéer nach Basrah und von da mit Flussdampfer den Tigris hinauf nach der alten Khalifenstadt Bagdad, einem äusserst schmutzigen Nest. Von da machte ich einen Ausflug von 10 Tagen mit der Karawane nach Babylon und Kerbela, dem Wallfahrtsorte der Perser (Schias).

Ich bin, trotz der Herrn Gelehrten, zu der Überzeugung gekommen, dass das auf dem rechten Ufer gelegene Babylon d. h. der Turm zu Babel, jetzt Birs Nimrod genannt, und der circa 25 Kilometer entfernte, auf dem linken Ufer gelegene Palast des Nabukadonasser (= hängende Gärten der Semiramis, jetzt ‚Babel' genannt) nie eine Stadt gebildet haben. Es liegt eben einer jener zahlreichen Fälle vor, so namentlich in Agra und Dilhi, wo es einem Herrscher plötzlich eingefallen ist, mit Kind und Kegel seine Millionenstadt zu verlassen und eine Strecke weiter eine neue, ebenso schöne Stadt entstehen zu lassen.

Unter dem Turm zu Babel sollen sich die Herren Primaner, die das Glück haben unter Ihrer Aufsicht zu stehen, nicht etwa einen Turm vorstellen, wie ihn Doré gezeichnet. Mit Wagen hat man nie hinauf fahren können. Die Höhe ist der orientalischen Phantasie so unermesslich erschienen, weil auf Hunderte von Meilen ringsherum die Erdoberfläche flach ist d. h. alles Steppe ist. Der Turm steht auf einem mässigen, mit glasierten Thonscherben bedeckten Hügel und ist jetzt etwa noch 70 Fuss hoch; er ist aus Ziegelsteinen aufgeführt, die teilweise, wohl durch Feuer, in Blöcke verschmolzen sind. Sein Umfang ist der eines gewöhnlichen Aussichtsturmes.

Die hängenden Gärten der Semiramis bestehen aus einem etwa 500 Schritt im Quadrat messenden und etwa hundert Fuss hohen Erdhügel. Durch Ausgrabungen hat man riesige Mauern entdeckt, die bis zur Sohle des Hügels reichen. Die schwer zu entscheidende Frage ist: ist der Hügel ein natürlicher oder ein künstlicher? Die Mauern sind äusserst sorgsam aufgeführt. Zwischen jedem der 12 Zoll im Quadrat grossen, fast weissen Backsteinen sind Palmenblätter mit Teer anstatt des Mörtels gelegt.

Interessiert hat mich, was ich von einem Amerikaner dort hörte, der seit 3 Jahren in dieser Gegend Ausgrabungen angestellt und jetzt zurückgefahren ist, um seine Ergebnisse wissenschaftlich verwerten zu lassen. Er hat in Nuphar, 15 Kilometer südlich von Babylon, Bausteine mit dem Merkzeichen des Königs Saga gefunden, der 6000 Jahre vor der babylonischen Zeit gelebt habe. Man hatte von diesem Könige gewusst, aber bisher noch keine Beweise für seine Existenz in Händen. Als ich mein Erstaunen äusserte, meinte der Amerikaner lächelnd: Ich habe bestimmte Anhaltspunkte, dass man dort Beweise dafür finden wird, dass dort bereits eine Kultur existiert hat 12000 Jahre vor dem Könige Saga.

Von Bagdad fuhr ich nach Buscheer zurück und trat von dort am 7. April meine 1350 Kilometer lange Landreise mit der Karawane nach Teheran an, wo ich am 22. Mai angekommen bin. Während dieser 46 Reisetage habe ich nur zweimal gerastet; 5 Tage in Schiras und 8 Tage in Isphahán. Die Reise war sehr ermüdend und reich an Entbehrungen, und dabei grösstenteils höchst uninteressant. Wenn man Tage lang durch unbebebaute, baum-, gras- und strauchlose Einöde zu reiten hat, überall fast ungeniessbares Wasser und so gut wie nichts zum Essen findet, dann wird das Reisen beschwerlich.

Lichtseiten waren die beiden genannten Städte — Isphahán ist aber bei weitem schöner als das vielbesungene Schiras — und vor allem Persepolis. Die Ruinen des Palastes zeugen davon, dass es das herrlichste Bauwerk der Welt war. Riesige Proportionen, Steinblöcke von 24 Fuss keine Seltenheit, und dabei die feinste Ausführung in den Details. Es ist geradezu überwältigend. Leute, die derartiges machen konnten, waren keine Barbaren und ich kann nicht verstehen, wie man bei uns lehren kann, wir seien Alexander d. Gr. zu Danke verpflichtet, weil er die griechische Civilisation gerettet. Der Barbar war der betrunkene Macedonier, der um vor einem Frauenzimmer zu renommieren, die Brandfackel in diesen Feenpalast schleuderte. Zwei Tagemärsche von Persepolis passierten wir die Ruinen von Pasargodä und das Grab des Cyrus.

Besondere Abenteuer hatte ich nicht. Auf dem Tigris sahen wir Piraten, die aber vor unserem Dampfer sich aus dem Staube machten. Und in Persepolis hatten wir ein friedliches Rencontre mit einem Araberhäuptling, der für vogelfrei erklärt worden ist und seit 2 Jahren den Soldaten ein Schnippchen schlägt.

Dagegen ist meine grosse Karawane, mit 78 Kisten, die meine ganze Habe enthielten, in der Nähe von Schiras von den räuberischen Nomaden geplündert worden. Abgesehen davon, dass ich meine sämtlichen Andenken verloren habe, ist es höchst unangenehm, auf einen neuen Posten anzukommen und nichts als drei Anzüge und etwas Wäsche bei sich zu haben. Hier ist nichts zu ersetzen.“ . . . . . .

F. Ordnung der öffentlichen Prüfung.

Donnerstag, den 31. März,

vormittags von 8 Uhr ab:

Sexta von 8—9 Religion und Naturbeschreibung.
Quinta von 9—10 Latein und Erdkunde.
Quarta von 10—11 Latein und Französisch.
Tertia von 11—12 Latein und Religion.

Nachmittags von 2 Uhr ab:

Sekunda von 2—3 Physik und Griechisch.
Prima von 3—4 Französisch und Mathematik.

Nach Beendigung der Prüfung wird das Schuljahr mit dem Zensur-Aktus und der Bekanntmachung der Versetzung geschlossen.

Das neue Schuljahr beginnt Montag, den 18. April, früh 7 Uhr.

Arnstadt, den 29. März 1898.

Dr. Kroschel.

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
515C126 C001 V007
CALCULUS [S.L.
3 0112 017225134